BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIV
D
25
NAPOLI

XXXIV
D
25

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

CYCLOMATHIA

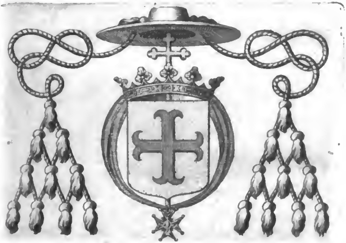
SEV

MVLTIPLEX CIRCVLI CONTEMPLATIO,

TRIBVS LIBRIS COMPREHENSA.

In { *I. Quadraturæ Examen confirmatur ac promouetur.*
II. Anguli contingentiæ natura exponitur.
III. Quadratricis facultates inauditæ proferuntur. }

Authore VINCENTIO LEOTAVDO Delphinate Societatis IESV.



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

LVGDVNI,
Sumptibus BENEDICTI CORAL, in vico Mercatorio, ſub ſigno Victoriæ.

M. DC. LXIII.

CVM SVPERIORVM PERMISSV.

Digitized by Google

Digitized by Google

ILLVSTRISSIMO AC REVERENDISSIMO DOMINO,

D. GEORGIO D'AVBVSSON,

E' COMITIBVS DE LA FVEILLADE,

Archiepiſcopo ac Principi Ebredunenſi,

TORQVATO REGIORVM ORDINVM Commendatori, Regíſque Chriſtianiſſimi apud Regem Catholicum Ordinario Legato.

VIDERER haud immeritò ſuſtinere culpam non leuem alicuius temeritatis, ARCHIPRÆSVL ILLVSTRISSIME, *dū iſti Opuſculo meo Excellentiæ Tuæ meritis nimiùm quantùm impari, è præfixo ipſius nomine pretium & æſtimationem quæro: niſi, quæ illius humanitas hunc fœtum naſcentem excepit, ea crimen à me omne amoueret; & ſuo iure lucem aliquam repeteret ab eo, cui totam tribuiſſet. Etſi enim Liber iſte plenam vltimámque deciſionem eius quæſtionis continere videatur, quæ omnibus hactenus Mathematicis nobiliſſima multarum contentionum Palæſtra tantò antè fuit, eritque in poſterum (agit enim de celeberrimâ illâ figuræ circularis reductione in aliam rectis lineis conſtantem) ad hæc viam aperiat expeditiſſimam eandemque & tutiſſimam & iucundiſſimam, ad perfectam iſtius Myſterij euulgationem hæc tamen quantacunque, non videbam eſſe eiuſmodi, quæ dignum tanto Patrocinio librum efficerent, niſi mihi voluntas illius eximia, duplicem*

neceſsitatem impoſuiſſet, & hoc tempore, & hoc Nominis auſpicio emittendi. Sic enim ipſe mecum reputabam, non vulgare aliquid ei offerendum, cui pridem Gallia, ornatæ; Europa penè tota, conſeruatæ gloriam detuliſſet, quemque periculoſiſſimo tempore turbarum imminentium, quietis defenſæ ſuſpexiſſet autorem. Quæ cùm dico, non eſt quòd verear, ne interdictum Dedicationis iſtius officium corrupiſſe meâ ipsâ intempeſtiuâ declaratione videar, & obiectos demandatione ſeuerâ, à Modeſtiâ Tuâ tuarum laudum euulgationi obices perfregiſſe: hæc enim ſi tacerem, loquerentur Indigenæ qui vident, prædicarent Exteri qui audiunt, Vrbes denique ipſæ ac domus quas etiam ſenſus iſte afficit, non ſilerent. In quo non oportet meam eſſe vnius deteriorem conditionem quàm omnium; & cùm ſit in me quàm in cæteris, loquendi materia major, eandem non eſſe cum cæteris libertatem. Eſt animus tamen, etiam illi Modeſtiæ tuæ ſatisfacere ex parte ſaltem: ſi enim de Laudibus Tuis dicam, vt non tam ex meo illa quàm ex omnium ore auditura ſit Excellentia Tua, criménque adeo iſtud qualecunque meum, conſecrati veriùs quàm violati ſilentij futurum ſit.

Duo ſunt quæ in Excellentia Tua meritò nemo non ſuſpicit; Doctrina videlicèt ſcientiarum omnium complexione cumulata, non minori cum laude coniuncta Politicæ adminiſtrationis: Huic accedit ſecundum, nihilo quàm primùm mirabile minùs, Habilitas illa naturalis ad res ita diuerſas, viſque ingenij admirabilis, quæ per vſum comparata in adultis, feliciùs in Excellentia Tua, ingenita iam à primis annis adoleuit. Et doctrinæ quidem ſpecimen ſanè quàm illuſtriſſimum, nobile illud Europæ Lycæum Sorbona tum vidit, cùm omnibus eruditionis exploratiſſimæ decoratum inſignibus, ad cæterorum culturam emiſit. Nam ecce continuò ſacra conuocati Cleri Comitia in rerum ſuarum Promotorem delegerunt, in quo quàm feciſſent ſapienter, probauit non ita multò pòſt euentus: Audita enim vox eſt tua ſiue in priuato conſeſſu, cùm deliberandum fuit, ſiue in publico, cùm diſputandum, tantâ omnium admiratione & plauſu, vt

ſi

ſi facundia ſpectetur, nihil eloquentius; ſi rationum pondera, nihil neruoſius; ſi vis & acumen, nihil ſubtilius eſſe affirmarent: adeò nihil humaniorum literarum ſplendorem ſitus Philoſophicus detriuerat, nihil Oratorius nitor, majeſtati Sapientis officiebat. Ita cùm Regi Regiiſque Miniſtris ſupplicandum eſſet, Vnus omnium es inuentus qui Regiè diceres: quod eſt à Te perfectum eo cum aſſenſu & audientis Aulæ & Cleri delegantis, vt iam tum cogitare vterque cœperit, quid facere poſſes euectus ad Eccleſiaſticas Dignitates, qui Eccleſiaſtica munia tantâ cum dignitate obires. Neque diutius vel merito tuo Clerus, vel Cleri optatis Rex optimus, vel Regis voluntati occaſio defuit. Cùm enim Illuſtriſſimum Archiepiſcopum Guillelmum d'Hugues fato non immaturo illo quidem, acerbiſſimo tamen, Ebredunenſi Eccleſiæ ſubtraxiſſet inopportuna mors: in eius locum deſignauerat Regia Majeſtas Epiſcopum Vapincenſem Artuſium de Lyonne, qui facultate ſingulari & non diſſimili virtutum præſtantiâ, prioris deſiderium lenire facilè poſſet: ſed Vir optimus, cùm erga gregem ſibi commiſſum tenerrimo afficeretur amore; nec ſuperioris gradûs ſplendore, nec vllâ opulentioris fortunæ acceſſione adduci vnquam potuit, vt ab eo auelleretur: quo factum eſt, vt ſine morâ, communique omnium plauſu ad Metropolitanam Ebredunenſem Eccleſiam regendam promoueretur iam tum de Eccleſiâ bene meritus Georgius Aubuſſonius; verùm, ne tum quidem gregem demandatum aſpectu ſuo recreandi ſpatium nouo paſtori conceſſum eſt: nam, cùm Cleri Gallicani Comitia generalia conuocandi tempus inſtaret, quibus Comitiis te oporteret intereſſe; non interfuiſti ſolùm, quod erat officij; ſed, quod ſingularis omnium de te iudicij fuit, etiam præfuiſti vnà cum Archipræſule Rhemenſi & Epiſcopo Matiſconenſi; quo vtroque è viuis interea ſublato, mirum, quanta negotiorum moles in Te Vnum incubuit, cui ſuſtinendæ ita Te non modò parem ſed ſuperiorem etiam præſtitiſti, vt gratiæ non vulgares ab vniuerſo cœtu decretæ tibi fuerint & ampliſſimis verbis habitæ. Atque ex eo tam bene geſto munere, non mediocrem Tuæ in rebus grauiſſimis

 gerendis

gerendis induſtriæ opinionem concitaſti tum apud omnes, tùm maximè apud Regem ſolertiſſimum & attentum ad omnia, vt iam tum operâ tuâ vti, cùm res ferret, meditaretur.

Inde, quâ & voluptate tuâ & Gregis tui lætitiâ Metropolim tuam inuiſiſti? Quâ curâ Diœceſim luſtraſti? Quàm ſalutaribus decretis vel labantem Diſciplinam firmaſti, vel erexiſti iacentem? Quàm ſingulari ſtudio Diuinum vbique cultum promouiſti? ſed ecce iterum in Aulam reuocaris, adeo te plures trahebant ad ſeſe quem pluribus haud imparem ſciebant. Ibi celeberrimam illam coram Rege de ſingularibus certaminibus orationem habuiſti, quâ oratione Nobilium familiarum ſtabilita pax, & recrudeſcens toties ſanguinis Gallici cicatrix obducta. Inde ad grauiora Reipublicæ conuerſus vulnera, docuiſti quas inimicitias ſuſcipere, quæ bella gerere, quibuſcum hoſtibus congredi glorioſum eſſet homini Gallico, cùm detractâ laruâ Ianſenium oſtendiſti, & afflatos Pontificio fulmine ramos, bonis ad ſecuritatem, malis ad ignominiam ſuo in trunco dignus Arbiter indicaſti.

Excepit has curas Italica Legatio, ita tecum ſemper agente Numine vt ex onere onus, ex Honore Honos perpetuâ ſerie naſceretur. In quâ Legatione dubium eſt, ſatisfeceriſne Regi magis, an Italiæ Principibus. Certè Venetiis (qua in vrbe mora tua longior fuit) tanta cum dignitate patrij nominis gloriæ ſplendorique per te conſultum eſt, vt omnibus perinde carus, Regi quidem de Hiſpanicâ Legatione cogitandi occaſionem dederis, Senatui vero totius Europæ celeberrimo, ampliſſima quæque tibi deferendi. Detulerunt enim (intercedentibus licèt aliarum Nationum Legatis non paucis) meritum vt Excellentiæ nomen Tuæ Dignitati tribueretur, vtque liceret munere Legati fungentem, Epomide ſupparóque penulatum apparere. Idque conceſſum non alio ſuaſore quàm Te, qui in ampliſſima frequentiſſimi Senatus Corona, ita Tuam totiúſque Regni cauſam patrio illorum egiſti ſermone, vt qui audirent verba, nihil magis Italicè; qui res perpenderent, nihil magis Gallicè dici poſſe prædicarent. Loquebatur

iterum

iterum in Curia Græca Cicero Romanus, idem qui Romæ fuerat; niſi quòd ille, indigena in aliena regione; iſti in ſua, peregrini ſibi videbantur.

Deerat hoc vnum Aubuſſoniæ familiæ decus; vt quam olim Rhodia Crux in Maioribus tuis extulerat, Gallica iam Torquatorum Equitum in te nobilitaret. Firmauit illa pridem Anchorata Crux tua fluctuantem Rhodum Petro Aubuſſonio magno Rhodiorum Equitum Magiſtro, qui grauiſſimam formidatiſſimi Mahometis procellam vt fortiter excepit, ita feliciter diſpulit. Ornauit eadem Infulas Lemouicenſes, Carcaſſonenſes, Tullenſes in totidem Præſulibus, quos fœcundiſſima virorum illuſtrium familia in Eccleſiæ vtilitatem emiſit. Eadem illa è duobus fratribus alterum Leonem Aubuſſonium Præfectum caſtris Regiis in Belgio fortiter dimicantem, plumbeaque glande trajectum in ipſo gloriæ portu ad ſumma quaque, velis expanſis nauigantem fixit: alterum pari fortitudine, Franciſcum Comitem de la Fueïllade tam altè firmitérque Regis in animo ſtabiliuit, nulla vt tempeſtate auelli, nullo turbine diſcuti poſſe videatur. Crucem hanc, inquam, ſacris profaniſque Lauris coronatam ſupererat hoc vnum, vt puriores Sancti Spiritus radiÿ glorioſiùs illuſtrarent.

Meritò igitur ſub auſpiciis tanti Hominis librum dicar edere in lucem, qui fulgentiſſimo iſto radiati Torquis ſplendore luceſcet: hunc æquis oculis aſpicient Galli, in quo tam amabilem reperient potentiſſimæ teſſeram Clientelæ: Itali excipient, in cuius fronte meritiſſimi de ſe Legati præfixum nomen legent: Hiſpani amplectentur, quem prudentiſſimo penè rupti fœderis Conciliatori, & diſſidÿ Anglici pacifico Proxenetæ, imo & vni è ſuis dedicatum eſſe ſcient. Sic enim Regi Catholico, probata Tua virtus eſt, vt, quod hactenus Legatorum nemini contigerat, in omnia Majorum Hiſpaniæ iura vocareris, quanquam hoc te ſolùm Majorem putas, quòd & honorando Hiſpano Nomini magis obligatum, & ornando Gallico tutandóque aptiorem credis. Ita enim te geris vbique, vt, ſicut antè dixeras Italicè, poſſis etiam cùm libuerit, Hiſpanicè loqui, & ita exteris placere, vt tuis ne diſpliceas.

Hæc

Hæc me & alia ſuper aliis occurrentia longiùs raperent, niſi me finem aliquando facere oporteret irritandæ Modeſtiæ. Quæ tamen cauſa nihil vetabit, quominus me propalam profitear infinitis Excellentiæ Tuæ, & Beneficiis deuinctum & ornatum Officiis. Quâ in re iniuriæ nihil facio Modeſtiæ tantæ, dum conſulo pudori meo, qui nullus foret, niſi ex animo dici vellem.

EXCELLENTIÆ TVÆ.

Humillimus & obſequentiſſimus ſeruus
VINCENTIVS LEOTAVDVS,
è Societate IESV.

Præfatio

Digitized by Google

Præfatio ad Lectorem Geometram.

DVm illam (LECTOR ÆQVISSIME) celeberrimam circuli Quadraturam à clariſſimo Geometriæ lumine R. P. Gregorio à ſancto Vincentio Societatis noſtræ non vulgari res Geometricas tractandi ratione excogitatam, à ſcriptoribus nec paucis, nec imperitis, nec parcis lucubrationibus à primo ipſo eius partu omnem in partem verſatam, & excuſſam cernis: tibi fortaſſe ſubeat cogitatio, eam nec eo, quo par eſt, plauſu, nec eâ quæ eius Authori tam bene de Geometriâ merito debetur, obſeruantiâ, exceptam eſſe. At longè eſſe ſcito alium Authoris ipſius ſenſum candido Geometrâ ſanè digniſſimum. Hic enim, vt refert Alphonſus de Saraſa in Præfatione confirmationis Quadraturarum, nullum à Geometriæ cultoribus in ſe conferri poſſe teſtatur acceptius officium, quàm ſi ea omnia, quæ in eius opere minùs probanda ipſis videbuntur, ſcripto potiùs edito, quàm priuatis vel Epiſtolis, vel ſermonibus proponere dignentur: vtpote qui ſi veritatis, cui ſoli ſtudet, ratio habeatur; ſuî ſatis rationem haberi cenſeat. Nec verò Geometræ, quo apud ſe loco ſint tum Author, tum eius Tetragoniſmi, teſtimonium exhibere poſſunt illuſtrius; quàm, cùm poſthabitis cæteris, quorum vix poſſit iniri numerus, horum tantùm contemplationem vt ſuis vigiliis digniſſimam totâ animi contentione ſuſceperunt. Illi itaque præ cæteris & Authori veritatis ſolius ſtabiliendæ, vt retuli, promouendæque Geometriæ cupi-

é diſſimo

Digitized by Google

diſſimo cumulatiùs ſatisfeciſſe, & toti Matheſeos Academiæ impenſiùs conſuluiſſe videntur: qui eas, quæ in hac materiâ ſibi occurrêre difficultates (occurriſſe autem nec paucas, nec leues neceſſe eſt, cùm in Conicis, & Rationibus, Rationúmque Proportionibus, quibus nihil in Mathematicis abſtruſius, tota verſetur) in lucem omnibus contemplandas expoſuêre, vt ſcilicet omnia controuerſiæ capita per otium perpendendi cuilibet copia fiat; ac tandẽ in totius Geometriæ emolumentum non mediocre communibus omnium votis, quod hactenus deſideratur, litem ex æquo definiendi facultas præbeatur. Atque ea ſanè fuit, cùm primùm harum Quadraturarum præ cæteris inſignium Examen illud à me aliquot antè annis editum meditari cœpi, animi mei ſententia: nec verò nunc alia ſubeſt, cum hanc eiuſdem Examinis confirmationem ac promotionem inſtituo. Cuius neceſſariò ineundæ hæc data eſt occaſio.

Geometra non in poſtremis numerandus Franc. Xauerius Aynſcom Gregorij à ſancto Vincentio Auditor, in Huius Quadraturarum defenſionem, vt grati erga tantum Præceptorem animi officium poſtulabat, opus edidit Geometricum eruditione non vulgari refertiſſimum, illam ſcilicet Quadraturarum Geometricam expoſitionem ac deductionem. In quâ & de Rationibus, ac Proportionibus quædam accuratè tradidit, & ambiguarum aliquot Præceptoris ſui Propoſitionum ex eius mente, aut etiam ore interpretationem inſtituit: quibus viam ſibi pararet ad ea refellenda; quæ ad id vſque temporis aduersùs haſce Quadraturas à variis ſcriptoribus obiecta fuerant. Inter quæ, ea quæ in iiſdem Quadraturis in earumdem Examine à me perſtringi contigerat, minimè indigna, quæ à ſe perpenderentur, ei viſa fuêre, eo præſertim nomine, quòd Quadraturas omnes (quod nemo alius præſtiterat) complexus fuiſſem, & ad

Arithmetices

Arithmetices Iudicium, quo nullum æquius, nullum manifeſtius in huiuſmodi controuerſiis adiri poteſt, prouocaſſem. Cùm ecce Geometræ aliquot non imperiti, quorum conſuetudine familiariter vti ſoleo, interrogatione non inexpectatâ à me ſciſcitantur, quid de hac Quadraturarum nouâ deductione, ac confirmatione ſentirem, ſentiendúmque putarem? Num videretur hanc Tetragoniſmi rationem ita tandem ſtabilitam, vt omne ſublatum ſit illam aliquando impugnandi argumentum: Huic ego minimè alienæ, & à neceſſariis profectæ petitioni non potui abſque notâ violatæ amicitiæ non ſatisfacere; nec in hac, quæ mihi cum veritate communis cauſa foret, præuaricandum cenſui, præſertim cùm mentem ſuper hac quæſtione perpaucis aperire liceret. Hoc ergo vnum, idémque variis ſciſcitantibus reſponſum dedi. Quod quia totius huius opuſculi argumentum continet, ipsúmque per ſe ſolùm cuilibet; qui breuitate delectetur, vel otio careat, facere ſatis poteſt, illud hîc tibi obiter exhibeo.

Aio itaque R. P. Franciſcum Aynſcom nec pauca, nec leuia de Rationibus in ſuâ illâ Quadraturarum Expoſitione paſſim retuliſſe Aio eundem ſcriptores non nullos in Rationum doctrinâ peregrinos, qui ex inanibus Principiis ſuis Theoremata non pauca Gregorij à ſancto Vinc. veriſſima labefactare conabantur, pro meritis caſtigaſſe. Sed iis omiſſis, quorum nec tuendam, nec impugnandam cauſam ſuſcepi; ſufficiat hîc eorum meminiſſe, de quibus non bene mihi cum illo conuenit.

In primis ergo aſſero nullâ meliori confirmatione, ea quæ in Examine aduersùs haſce Quadraturas à me obiecta ſunt, ſtabiliri potuiſſe, quàm hac ipsâ earum deductione, datáque ad allatas à me difficultates ab eius Authore reſponſione. Etenim nemo ſibi facilè non perſuadeat nihil tum ab ipſo

Digitized by Google

huius Cyclometriæ Authore, tum ab eius interprete & fautore in hac Apologiâ omiſſum: quod aliquid roboris ad hoſce Tetragoniſmos tuendum habere videretur. At quid in ea defenſione allatum ſit noui præter ea, quæ ab ipſomet Authore adducta fuerant, quæque in Examine reieceram, me equidem planè fugit. Et verò ad primam Quadraturam quod attinet,

Obieci primò Prop. 47. & ſequentibus Libri 2. Examinis, abſolutam non fuiſſe Quadraturam illam ab eius Authore Gregorio à ſancto Vinc. Prop. 44. Lib. 10. Operis Geom. eò quòd tertiam Rationem duorum quorumdam ſolidorum ad hunc Tetragoniſmum omnino neceſſariam, nec definierit ipſe citata illa Prop. nec vnde, aut qua via noſci poſſet, expoſuerit. Hanc igitur Rationem exhibendi onus incumbebat Quadraturæ huius fautori, ſi obiectioni à me adductæ ſatisfactum vellet. An autem illam exhibuiſſe cenſendus eſt cùm pag. 104. ex ſpatiis quibuſdam Hyperbolicis, quæ ab ipſo Cyclometra primùm obſeruata ſunt, hoc eſt, ex tenebris totius Geometriæ denſiſſimis deduci poſſe aſſerit? Cur non deduxit ipſe? Cur alteri deducendam commiſit, ſi vel à ſe, vel ab ipſo Authore ad exitum perductum fuiſſe hunc Tetragoniſmum ſuadere vellet. Næ ille, qui dictam Rationem exhibuerit, Author Quadraturæ, iure dicitur; non item qui exhiberi poſſe tantùm pronunciarit.

Obieci ſecundò contra eandem primam Quadraturam, eandem illam tertiam Rationem ad Tetragoniſmum neceſſariam iuxta citatam Prop. 44. Lib. 10. Operis Geom. ex duabus prioribus Rationibus haberi non poſſe, eò quòd prima ſecundæ, & ſecunda tertiæ neque ſit æque-multiplex, neque æque-multiplicata, licèt ſingulæ partiales rationes hanc æque-multiplicitatem, aut æque-multiplicationem obſeruent. Sed huiuſmodi Rationes partiales oſtendi

Prop.

Prop. 50. Lib. 2. Exam. iuxta ſenſum ab Alphonſo de Saraſa in confirmationibus Quadraturarum vſurpatum (qui haud dudiè ipſius Cyclometræ ſenſus eſt) planè eſſe inutiles ad illam tertiam Rationem obtinendam. Ergo (concluſi ego citatis locis) nullo in ſenſu tertia illa expetita Ratio poteſt obtineri; nullus enim præter memoratos ſenſus alius excogitari poteſt. Ergo nec ea methodo Quadratura poteſt inueniri. Huic obiectioni quî occurrit Quadraturarum interpres? Ait Authoris mentem, eam nunquam fuiſſe; vt voluerit primam Rationem eſſe æque-multiplicatam ſecundæ, ac ſecunda æque-multiplicata eſt tertiæ: adeò vt à me, qui in eo ſenſu Tetragoniſmum hunc labem pati demonſtraui; ne impetitus quidem, nedum læſus fuerit Tetragoniſmus huiuſmodi. At miror ab eo minimè fuiſſe obſeruatum, cùm facilè poſſet obſeruari; me tertiam illam Rationem ad Quadraturam hanc neceſſariam obtineri non poſſe demonſtrauiſſe, iuxta ſenſum quemlibet; ac præſertim iuxta ſenſum æque-multiplicationis ab Alphonſo de Saraſa ab Authoris ore exceptum. Ex quo quidem Reſponſo patet non tantùm nihil ponderis ex ratiocinatione mea detractum, ſed etiam eidem additum non parum.

Obieci tandem tertiò citata Prop. 50. ad calcem (quo nullum fortaſſe ad rem aptius Argumentum videatur) ſi minùs bene aſſecutus ſum ſenſum, quo aſſerit Author vnam rationem aliam continere, & ex duabus notis tertiam innoteſcere (quanquam quî non fuerim aſſecutus, cùm nullum omiſerim) adeóque hanc primam Quadraturàm minimè abſolutam perperam pronunciarim: ecce citato loco Quæſtionem innumeris propoſui ſeruatis conditionibus omnibus à Cyclometra requiſitis, in quâ ab ipſo exigebam, vt tertiam Rationem ignotam ex duabus datis iuxta ſuum ſenſum, nouámque methodum exhiberet? Nunquid igitur huius Cyclometriæ Pro-

 pugnato

pugnatoris munus non erat, ſi eius veritatem probatam vellet, huiuſmodi Quæſtioni ſatisfacere? ne vllam quidem eius mentionem fecit: quod nullus inaduertentiæ interpretis ſolertiſſimi tribuat, ſed ſummæ eam quæſtionem ſoluendi difficultati, aut omnimodæ impoſſibilitati. Vnde conſtet vel ex hoc vno Capite id meo huius primæ Quadraturæ Examini Reſponſum, non tantùm illud non impetere; ſed non mediocriter confirmare, ac promouere. Nunc eodem quoad reliquas Quadraturas idem præſtare declaratum pergo.

Ad ſecundam Quadraturam, eíque affines duas ſequentes velut à ſe demonſtratum ſupponit earum Artifex eandem eſſe Proportionem duarum Rationum; quas ſolida quatuor ex directo planorum quorumdam parabolicorum ductu genita obſeruant: quæ eſt aliarum duarum Rationum, quas habent alia quatuor ſolida ex iiſdem planis in ſe ſubalternè ductis procreata, vt expoſui Lib. 3. Exam. Pro. 9. At euidenter offendi Prop. 16. & 17. variis Epilogiſmis duas illas Proportiones nullatenus eſſe æquales. Occurrit iam Quadraturarum Propugnator Franc. Aynſcom pag. 143. aſſerens varios, eóſque valdè inæquales Epilogiſmos naſci poſſe ex eodem plano in ſe ducto iuxta variam ductuum rationem; idque fuſiori declarat inductione, ſed minimè neceſſariâ. Id enim quis negat, aut ignorat? Illud vnum declarandum fuerat (cuius ne meminit quidem) me ex variis, qui iniri poſſunt, eiuſdem plani ductibus debito non vſum fuiſſe ad ſolida conflanda, quæ numeris exhibueram debito autem vſum me fuiſſe, præter quàm quòd euidenter conſtat loco citato Examinis, ex ipſomet colligitur Prop. 6. pag. 148. Vbi eadem ipſa ſolida ad Quadraturam ſuam abſoluendam illâ ipsâ meâ methodo efformat: quod eum miror non obſeruaſſe.

Ad hæc. Eſto, eadem ſit quatuor illarum Rationum Proportio:

portio: Cur idem Quadraturarum Patronus ſilentio prætermiſit Propoſitionem meam 18. Lib. 3. Examinis hac in controuerſia ſummi momenti? In quâ apertiſſimè demonſtraui ex nota Rationum Porportione Rationes ipſas (quod ad has Quadraturas omnino neceſſarium eſt) nullatenus innoteſcere poſſe. Cùm ergo hæc duo à me adducta Argumenta aduersùs ſecundam, cæteráſque duas inſequentes Quadraturas earum fautor, vel non meminerit, vt ſecundum, vel, vt primum, ſuâ etiam authoritate comprobarit: quid grauius ad ſententiam aduerſus eas à me latam confirmandam, & promouendam deſiderari poteſt?

Ad eam porrò, quam quaſi nouam idem Quadraturarum interpres exponit Parte 3. Quadraturæ ſecundæ Prop. 8. & ſequentibus, quod attinet: cùm iiſdem fundamentis, quibus Quadratura ſecunda proximè diſcuſſa nitatur, vt patet ex Propoſitione 9. pag. 157 quid de eâ, etſi nullo alio defectu (quod minimè concedo) laboraret, ſtatuendum ſit, manifeſtum eſt.

Præter has ad Tetragoniſmos pertinentes difficultates, aliam non leuem circa Angulorum naturam adduxi Lib. 2. Examinis Prop. 27. aduerſus ſententiam eximij Cyclometriæ Authoris, qui præter morem (Antiquitatis enim ſe præbet paſſim obſeruantiſſimum) omiſſa veterum Geometrarum, Geometriæ in primis parentis Euclidis, Authoritate Angulos quoſcunque omni penitus Quantitatis iure carere aſſeruit: ne, inquit, ſeſe ipſa deſtruant Geometrica Principia: quod conſecuturum probare nititur petito ex Angulis contingentiæ Argumento. At præter quàm quòd incommodum tam inſigne tot, támq; ſagacia Geometriæ Lumina latere hactenus potuiſſe credendum non eſt; Argumentum illud ſatis euidēter infregiſſe mihi videor citato loco, vbi Angulos Quātitatis quidē veræ ſpeciē non eſſe cōceſſi; non eo tamē nomine

omni

omni Quantitatis iure excidere contendi, & apertè demonſtraui: cuius Probationis meæ robur haud vllo modo concuſſit Quadraturarum fautor, & interpres: cùm cap. 2. de Naturâ Rationum Prop. 2. & ſequentibus, nihil niſi fuſiorem Præceptoris ſui ſententiæ expoſitionem afferat nulla, vt videre eſt, ratiocinationis meæ facta mentione; aut vlla, quod maximè oportebat, inſtituta oppugnatione: Vnde conſtat hoc etiam Examinis mei caput non leuiter confirmari ac promoueri.

Prætereunda non eſt hîc illa, cùm maximi ſit momenti; quæ me inter, & R. P. Gregorium intercedit controuerſia circa Rationum, ac Proportionum denominatores. Aſſeruerat ille Lib. 8. Defin. 2. operis Geom. Rationis cuiuſuis ſolitariè ſumptæ, & abſque omni ad alteram Rationem relatione nullum dari poſſe denominatorem. Aſſerui ego Lib. 1. Examinis parte 2. Propoſitionis 2. eius generis Rationis ſic ſolitariè ſumptæ verum dari denominatorem: quem verò laudatus Author denominatorem ſtatuit; nihil aliud eſſe contendi, quàm denominatorem Propoſitionis, quæ inter duas Rationes intercedit: quod euidenter demonſtraſſe mihi videor: atque ita viſum Quadraturarum fautori mihi perſuadet eius de hac contentione ſilentium, quod in non leuem ſententiæ meæ confirmationem nemo non meritò interpretetur. Improbat verò idem, quod citato loco Aſſert. 3. ſtatui, nempe in Quantitate continua cuiuſuis ſpeciei; ſiue ea ſit ſuperficies, ſiue Corpus; Rationem Denominatorem eſſe duarum linearum rectarum ſimilem Rationem. Vult enim (quod probaſſe debuit) duas ſuperficies, aut ſolida duo, non minùs aptè denominatoris munere fungi, quàm rectas duas lineas. Quod nemo, qui denominatoris notionem perceperit, ipſi conceſſurus eſt. Cùm enim Rationis alicuius Denominator, ſit Ratio omnium Rationum eiuſdem ſpeciei notiſſima; hoc ſane

nẽ munere fungi aptiùs poſſunt nullæ duæ quantitates ſimilem Rationem cum denominata obſeruãtes, quàm duæ rectæ lineæ, quippe quæ ſimpliciſſimæ ſunt, nec duplici dimenſione, vt ſuperficies; aut triplici, vt ſolida, conſtant; vnde impeditiorem naſci neceſſe eſt earum cognitionem. Et verò quis non videat hunc ſemper fuiſſe Geometrarum omnium ſenſum: cùm Rationes aliter nunquam exprimant, quàm duabus rectis lineis ſimilem Rationem obſeruantibus. Quid Exempla proferam, cùm paſſim obuia ſint, etiam apud Operis Geometrici Authorem adeóque ipſummet illius Quadraturarum Interpretem?

Hæc fuit Geometris quibuſdam, qui, vt initio monui, meam circa defenſionem Quadraturarum à Doctiſſimo P. Franc. Aynſcom contra meum earum Examen ſuſceptam, ſententiam expetierant, priuatim data Reſponſio. Quam, vt cuilibet, ita ipſis cumulatè ſatisfacturam cenſebam. At mea me longè fefellit ſpes. Ecce enim illi ipſi, quorum votis videbar ſtudioſiſſimè obſecutus, vrgere me, etiam quàm ante, vehementiùs cœperunt; vt hoc ipſum, quod ſuper hac diſſertatione grauiſſima à me reſponſum tulerant perpauci, publici iuris facerem: ne, inquiebant, veritati, cuius declarandæ cauſa Examen horum Tetragoniſmorum primùm ſuſceperam, nunc efficeret ſilentium meum poſt eiuſdem Examinis impugnationem: quæ apud nonnullos vel minùs hoc in genere exercitatos, vel leuiùs illam perpendentes, ipſum vocaret in dubium. Quanquam verò latam in eo examine ſententiam, eius ferendæ Rationum momenta, vt ex hactenus relatis patet, euidentiſſima eo periculo vacare mihi perſuadeant: nefas tamen duxi data ex animo neceſſariorum monita non audire.

Quare opuſculum hoc meditari tum cœpi: quo ſuperiùs obiter annotata non paulò copioſiùs, enucleatiùs, clariúſ-

que complexus ſum, vt aliqua cum dignitate in lucem prodire, & maiori Lectoris mei, cui impensè ſtudeo, cum voluptate, & concipiendi facultate luſtrari poſſet. Illud porrò paulò tardiùs tibi exhiberi ne mirere. Tardiùs ad me peruenit illa R. P. Franciſci Aynſcom Geometrica Quadraturarum deductio: morâ niſi tardiore ad Artifice ſatis tardo occurrentes minimè leues difficultates perſpici, & explicari potuêre: adde Typographorum pro more procraſtinationes; ſed quod longiores traxit moras ſpes fuit, quam Alphonſus de Saraſa in confirmationibus huius Quadraturæ, tum in præfatione ad Lectorem, tum ad calcem Corollarij decimi dedit, fore vt Doctiſſimus ipſe harum Quadraturarum Author eandem materiam planiori, fuſioríque explicatione proſequeretur: ex quâ non parum lucis tantis difficultatibus acceſſurum ſperari fas erat; quâ peropportunè vti poſſem ad poſtremam tandem earum definitionem conſtituendam: ſed hactenus huiuſmodi expoſitione ægerrimè ſanè careo, nec niſi inuitus eâ non obtentâ hanc lucubrationem, quæ moras nequit longiores pati, in lucem emitto: cuius rudem hanc deſignationem primùm accipe.

Tribus omnino Libris opuſculum hoc complexus ſum. Duo priores circa motam meum inter Examen Quadraturarum, & earum Geometricam deductionem à Franc. Aynſcom. inſtitutam, ferè toti verſantur. Tertius datâ, quam referam, occaſione iis eſt adiunctus. Primus Liber in tres partes diuiditur. Prima primam Quadraturam, variáque Lemmata tum ad eam, tum ad reliquas clarè percipiendas neceſſaria complectitur. Secunda in ſecundæ Quadraturæ, duarúmque reliquarum diſcuſſione verſatur. Tertia illam quaſi nouam Quadraturæ methodum à Quadraturarum interprete propoſitam expendit. Liber ſecundus ad eandem quidem controuerſiam pertinet, ſed quæ circa Angulorum naturam

ſolùm

ſolùm verſatur, ac præſertim Anguli cornicularis ſiue contingentiæ: qui recentioribus aliquot Geometris non obſcuri alioqui nominis occaſionem præbuit de omni Angulorum genere aliter & ſentiendi & loquendi, quàm Geometriæ Parens, omníſque ab eo hactenus Geometrarum ſchola vel ſenſerit vel locuta ſit; imò & quædam nobiliſſimæ huius diſciplinæ inconcuſſa fundamenta conuellendi; ſed immeritò, vt contra Valliſium agens, apertè ibi ſum oſtenſurus.

His acceſſit Liber Tertius, qui in perantiquâ illâ Dinoſtratæâ Quadratrice contemplandâ totus verſatur. Quanquam verò tanta cum præcedentibus eius connexio non appareat; omni tamen non omnino caret: cùm, perinde vt illa, ad circuli Tetragoniſmum diuersâ licet ratione pertineat: ad Cyclomathiam certè ſpectat, quam verſamus. Me porrò ad huius curuæ Lineæ facultates perſcrutandas vel maximè permouit alia non abſimilis recentiùs excogitata Linea, quam eius Authoribus Cycloïdem placuit vocitare: de quâ cùm maximi nominis aliquot Geometræ, in quibus haud in poſtremis numerandus videtur Antonius Lalouera noſter, mira ſanè demonſtrent: genium libuit tentare meum, & an aliquid ſimile, quod eruerem, in eâ lateret, inquirere. Nec me capti conſilij pœnituit deinceps: ſiquidem eam facultatum tam inſignium fontem eſſe comperi; vt Cycloïdem non ſolùm de antiquitate ei concedere; ſed etiam de dignitate vix cum eâ contendere meritò videatur, præſertim cùm illam, vt ſuo loco conſtabit, velut Parentem debeat agnoſcere. Quid quòd dotibus inſignioribus cum celeberrimâ illa Helice Archimedæâ communibus potiatur? Quare Librum hunc tertium Geometris non ingratum fore confido, hoc etiam reliquis duobus fortaſſe gratiorem; quòd planâ, nullíſque diſſertationum ſalebris impeditâ methodo tradatur.

Ne quid demum, quod æquo Lectori meo obeſſe poſſit

omittam: moneo non potuiſſe Typographiam me longiùs abſente in lapſus aliquot non incurrere: grauiores ad calcem reſtitutos inuenies; leuiores ipſa per ſe ſolertia tua reſtituet cum inter legendum occurrent. Figuræ ſingulis paginis, in quibus de his agitur, apponi non potuere non ſine aliquo incommodo tuo: cui occurrent facilè earum tabellæ aliquot ſuo loco annexæ; quæ, cùm feret neceſſitas, explicari & conſuli poſſint. Vale & Faue.

LIBER

Digitized by Google

LIBER PRIMVS.

LIBRI PRIMI PARS PRIMA.

MONITVM.

AFFERT initio Libri 10. *operis ſui Geometrici Geometra in primis Clarus R. P. Gregorius à S. Vincentio Societ. noſtræ propoſitiones aliquot maioris, quàm primâ fronte appareat, ad eam, quam inſtituit, Tetragoniſmi methodum ponderis ac momenti. Ac præ cæteris inſignes videntur ſeptima, octaua, & duodecima: vnde, vt attendenti patet, eius circa Quadraturas omnes ratiocinatio petitur vniuerſa. Harum porrò fundamentum ſunt Quinta, & Sexta: quas tam paucis complexus eſt laudatus Author; vt ex tanta breuitate non niſi caligo in reliquas illas ſequentes deriuari potuerit tam denſa; vt nec Authoris ipſius expoſitio in ſcholiis Propoſitionis ſextæ, & octauæ; nec eius doctiſſimi interpretis P. Franciſci Aynſcom in ſua Quadraturarum deductione elucidatio ita potuerit abſtergere; quin nebulis adhuc ſatis craſſis offuſæ videantur dictæ propoſitiones. Quarum cùm is ſit, vt iam monui, in quatuor illas ab Authore concinnatas Quadraturas influxus; vt eo præciſo, præcidi & ipſas neceſſe ſit: expedit eas hîc paulò accuratiùs expendere, præſertim cùm à me in examine ipſo Quadraturæ, intactæ fuerint prætermiſſæ; quippe cui aliæ non deerant difficultates proponendæ: quæ ipſas Quadraturas proximè & cominùs peterent: quod tunc ad inſtitutum ſatis fore viſum fuit. Nunc verò cùm confirmationem, promotionémque eorum aggrediar, quæ in examine à me ſunt allata-*

Digitized by Google

ne quid, ſi fas fuerit, omittam ſuper hac materia à me rurſus aliquando tractandum (alia fortaſſe aliis occurrent) citatas propoſitiones in diſcuſſionem voco: ad quam praua aliquot viam ſternent.

PROPOSITIO I. *Theorema.*

SI rationis cuiuſuis A B termini inuertantur, vt fiat noua ratio B A. Dico rationem æqualitatis inter haſce duas rationes A B, & B A mediam eſſe proportionalem.

Demonſtratio.

A 5	A 5	B 3	B 3
B 3	A 5	B 3	A 5

Statuatur inter duas illas rationes A B & B A ratio æqualitatis A A, ſiue B B: cuius ſcilicet termini ſint inter ſe æquales; æquales autem ſint terminis vel A, vel B ipſarum rationum, vt ſchema refert. Quibus poſitis. Ratio A B ad rationem æqualitatis A A ita ſe habet, vt ſe habet reciprocè conſequens A rationis æqualitatis A A ad conſequentem B rationis A B per Prop. 8. Lib. 1. Exam. Quadraturæ. Duarum enim rationum A B & A A æquales ſunt antecedentes. Rurſus, cum duarum rationum A A, & B A conſequentes ſint æquales: ita ſe habebit ratio æqualitatis A A ad rationem B A, vt ſe habet antecedens A ad antecedentem B per Prop. 7. Lib. 1. Exam. Quadrat. Sed vt A ad B ita ſe habere oſtenſa eſt ratio A B ad rationem A A. Ergo ita eſt ratio A B ad rationem A A, vt ratio A A ad rationem B A. Ergo ratio A A æqualitatis media eſt proportionalis inter rationes A B & B A: quarum hæc illius terminos inuertit. Quod eodem ferè modo probare liceret aſſumptâ alterâ ratione æqualitatis B B. Quare ſi rationis cuiuſuis A B termini, &c. Quod erat probandum.

Aliter idem probatur.

A 5	B 3	C 15	A 5	E 25
B 3	A 5	D 15	A 5	F 25

Eodem aſſumpto ſchemate ſi ratio A B ducatur in rationem B A iuxta Propoſ. 16. Lib. 1. Exam. Quadr. gignetur per hanc multiplicationem ratio æqualitatis C D. At ductâ in ſe ratione æqualitatis A A, gignitur etiam ratio æqualitatis E F, hoc eſt, ratio æqualis rationi C D ex ratione A B in rationem B A ductâ genitæ ergo per Prop.

Prop. 17. Lib. 6. Elem. (cur enim ea propoſitio relatiuis etiam quantitatibus non conueniat?) hæ tres relatiuæ quantitates, ſiue rationes ſunt continuè proportionales. Quod erat aliter probandum.

PROPOSITIO II. *Theorema.*

SI duarum rationum A B, C D æquales conſequentes B & D habentium termini inuertantur: vt fiant duæ aliæ rationes B A, D C.

Dico duas rationes A B, C D proportionales eſſe duabus rationibus D C, B A reciprocè, hoc eſt, ita eſſe A B ad C D, vt viciſſim D C eſt ad B A.

Demonſtratio.

A 12	C 6	B 4	D 4
B 4	D 4	A 12	C 6

Ratio A B ad rationem C D, cuius conſequens D æqualis eſt conſequenti B ex ſuppoſitione, ita ſe habet vt Antecedens A ad Antecedentem C per Prop. 7. Lib. 1. Exam. Quadr. Rursùs, ratio D C ad rationem B A, cuius Antecedens D æqualis eſt Antecedenti B, ita ſe habet vt conſequens A ſe habet ad conſequentem C per Prop. 8. Lib. 1. Exam. Quadr. ſed vt A ad C, ita eſt ratio A B ad rationem C D, vt oſtenſum eſt. Ergo ita eſt ratio A B ad rationem C D, vt reciprocè ratio D C eſt ad rationem B A. Ac proinde. Si duarum rationum, &c. Quod erat demonſtrandum.

Aliter idem probatur.

Tam ratio A B ducta in rationem B A; quàm ratio C D ducta in rationem D C producit rationem æqualitatis per prop. antecedentem. Cum eadem quantitas fiat ex ratione A B in rationem B A ductâ, quæ fit ex ratione C D ductâ in rationem D C: ita erit per Prop. 16. Lib. 6. Elem. prima quantitas A B ad ſecundam C D, vt tertia D C ad quartam B A. Quod erat probandum.

PROPOSITIO III. *Theorema.*

SI rationis A D ad B F Antecedens A D augeatur additâ quantitate quapiam D C.

Dico rationem facti Antecedentis A C ad eundem con-

Digitized by Google

ſequentem B F, æqualem eſſe duabus partialibus rationibus A D ad B F, & D C ad B F.

Demonſtratio.



Duæ rationes A D ad B F, & D C ad B F eundem nactæ conſequentem B F in rationem vnicam A C ad B F per veram rationum additionem coaleſcunt additis earum Antecedentibus A D & D C, eodémque ſeruato conſequente B F, vt oſtendi Prop. 10. Lib. 1. Exam. Quadrat. vel Prop. 15. Lib. 4. Inſtitut. Arithm. Duæ ergo rationes A D ad B F, & D C ad B F partes ſunt, quibus tota ratio A C ad B F conſtituitur, iiſdémque ſimul ſumptis æqualis eſt. Quare. Si ad rationis A D ad B F &c. Quod erat probandum.

Scholium.

Iuuerit hic quidpiam obſeruare ad quædam alia non abſimilia, quæ ſequuntur, elucidanda non inutile. Nimirum duobus modis ſpectari poſſe quantitatem D C appoſitam ad rationis Antecedentem A D, vt obſeruari iubet Author in primis clarus operis Geom. in ſcholio Propoſitionis 6. Lib. 10. primo quidem modo ita vt cenſeatur D C abſoluta, & præciſè ſecundum ſe abſque omni ad conſequentem B F, vel alium quemcunque terminum comparatione, licèt totus deinde Antecedens A D ex duabus quantitatibus A D, D C conflatus ad conſequentem B F referatur. Vel ita, vt eadem quantitas C D referri cenſeatur ad eundem conſequentem B F rationis prioris A C ad B F: quo ſenſu non tam quantitas C D ad Antecedentem A C apponi; quàm ratio C D ad B F, addi ad rationem A C ad B F concipitur; rectéque dici poteſt, vt loquitur citatus Author tum in hoc, tum in aliis ſimilibus caſibus, quorum infrà recurret mentio; rationem totam totius Antecedentis A C ad B F, eſſe rationem A D ad B F, & C D ad B F; ex his enim duabus per veram, ac demonſtratiuè ſtabilitam Additionem totalis illa ratio A C ad B F conſtitui probatur: quo fit vt identica non ſit hæc Propoſitio. *Ratio totius A C ad B F eſt ratio A D ad B F, & ratio D C ad B F.* At verò ſi quantitas D C abſoluta ſupponatur; vix identitatis vitio carebit eadem illa enuntiatio. Quod enim diſcrimen inter ſubiectum & prædicatum propoſitionis huius obſeruari poteſt, vt identica non ſit. *Ratio totius quantitatis A C ad quantitatem B F, eſt ratio quantitatis A D cum quantitate D C ad quantitatem B F?* numquid idem

planè

planè eſt, eandémque menti ingenerat ſpeciem, ſiue dixeris, *Tota quantitas, A C*; ſiue *quantitas A D cum quantitate D C?* Vnde patet quo ſenſu in hac Prop. addi velim quantitatem D C ad Antecedentem A D: eo ſcilicet, vt ipſa etiam quantitas DC ſumatur relatiuè;& velut Antecedens rationis D C ad B F; vt potiùs rationes A D ad B F, & D C ad B F, quàm ſimplices quantitates A D, DC addi cenſeantur.

Obſerua ſecundò rationem A C ad A D, proportionem eſſe rationum duarum A C ad B F, & A D ad B F, vt conſtat ex Prop.7.Lib.1. Exam. Quadrat. hoc eſt, ratio A C ad B F ita ſe habet ad rationem A D ad B F, vt quantitas A C ſe habet ad quantitatem A D. Similiter, ratio D C ad A C Proportio erit rationis D C ad B F (quæ eſt exceſſus, quo ratio A C ad B F ſuperat rationem A D ad B F) ad rationem A C ad B F. Idem dicito de rationibus D C ad A D, & A D ad D C. Id porrò verum eſt propter eandem rationem, quæcumque quantitas B F ſtatuatur conſequens communis harum rationum; adeo vt ratio, verbi gratiâ, D C ad A C ſit proportio exceſſûs, quo ratio quæuis maior, cuius Antecedens ſit A C, rationem minorem Antecedentis A D ſuperat. Nec ex eo percelli quiſquam debet: nulla enim eſt ratio, cuius Antecedens non poſſit eſſe A C iuxta euidens illud Axioma. *Qualibet quantitas ad aliam quampiam quantitatem eandem poteſt habere rationem; quam quadam data quantitas habet ad aliam datam quantitatem.* Quod idem, ac iſtud ſonat *Tribus datis quantitatibus quartam licet proportionalem inuenire.* Ea autem quarta quantitas erit B F conſequens rationis; cuius Antecedens erit A C, tertia data quantitas. Quamquam ergo rationum Antecedentes A C, A D, D C iidem ſemper ſint, & eandem exhibeant rationem inter ſe comparati; quæ Proportio eſt rationum accedente quopiam conſequente B F conſtitutarum: variæ tamen futuræ ſunt rationes pro vario poſito conſequente B F. Ita vt, etſi Proportio A C ad A D, vel ad D C eadem ſemper retineatur, eáque nota ſit: niſi tamen notus ſtatuatur conſequens B F communis rationum A C ad B F A D ad B F, &c. nihil ex data Proportione rationum colligi poteſt, vnde ipſæ rationes innoteſcant, vnde in Examine Quadrat. Lib.3. Propoſ. 77. argumentum deduxi grauiſſimum, quo nouæ Quadraturæ labefactari viſæ ſunt. Atque hæc, quæ apertiſſima ſunt, hîc obſeruaſſe proderit ad alia paulò impeditiora aditum paratura planiorem.

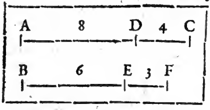
Digitized by Google

PROPOSITIO IV. *Theorema.*

IIſdem poſitis. Additâ ſcilicet quantitate D C ad rationis A D ad B F Antecedentem A D; ſi conſequens B F ſecetur in E ſimiliter vt A C ſecatur in D.

Dico rationem A D ad B E excedere rationem A D ad B F, ratione D C ad B F.

Demonſtratio.



Cum B F & A C ſimiliter ſecentur in D & E: ratio A D ad B E æqualis erit rationi A C ad B F. Sed ratio A C ad B F excedit rationem A D ad B F ratione D C ad B F. Ergo etiam ratio A D ad B E excedit rationem A D ad B F ratione D C ad B F. Quod erat probandum.

Corollarium.

Hinc colligas duarum rationum ad eundem conſequentem reductarum Additionem iniri poſſe ſeruato alterius Antecedente, & diminuto conſequente iuxta Proportionem datarum rationum. Vt ſi duæ rationes A D ad B F, & D C ad B F proponantur addendæ: duobus id modis abſolui poterit: priore, ſi duos Antecedentes A D, D C addideris, factóque Antecedenti A C eundem aſſignaueris conſequentem B F. Altero, ſi fiat vt vterque Antecedens A C ad A D, ita conſequens B F ad B E; erit enim ratio A D ad B E æqualis rationi A C ad B F.

Eodem modo à ratione A D ad B E ſubducetur ratio D C ad B E: ſi fiat vt Antecedens A D ad Antecedentem D C rationis ſubtrahendæ; ita conſequens communis B E ad B F; & B F ſtatuatur conſequens rationis, cuius Antecedens ſit A D: erit hæc ratio, ea quæ relinquitur ſubductâ ratione D C ad B E à ratione A D ad B E. Probatur. Nam cum ex hypotheſi conſtructionis ita ſit A D ad D C, vt B E ad E F; ita erit A C ad B F, vt A D ad B E. At ſi à ratione A C ad B F dematur ratio D C ad B F; reliqua ſit ratio A D ad B F iuxta communem ſubtractionis modum Prop. 12. Lib. 1. Exam. Quadrat. demonſtratum.

PRO

Digitized by Google

PROPOSITIO V. *Theorema.*

SI ad rationis A C ad B E conſequentem B E quædam addatur quantitas E F: ſecetur autem Antecedens A C in D ſimiliter vt tota quantitas B F ſecta eſt in E.

Dico rationem A C ad B E excedere rationem A C ad B F ratione D C ad B E.

Demonſtratio.

Ratio A C ad B E excedit rationem A D ad B E ratione D C ad B E per Prop. 3. & eius ſcholium. At ratio A D ad B E æqualis eſt rationi A C ad B F. Ergo ratio A C ad B E excedit rationem A C ad B F ratione D C ad B E. Quare. Si ad rationis A C ad B E conſequentem, &c. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Ex eadem Propoſitionis huius ſuppoſitione ſequitur etiam rationem A C ad E F excedere rationem A C ad B F ratione A D ad E F. Nam ratio A C ad B F æqualis eſt rationi D C ad E F. Sed ratio A C ad E F ſuperat rationem D C ad E F ratione A D ad E F. Ergo etiam ratio A C ad E F ſuperat rationem A C ad B F eâdem ratione A D ad E F.

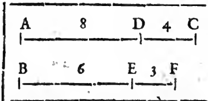
PROPOSITIO VI. *Theorema.*

SI ad rationis A C ad B E conſequentem B E addatur quantitas quæpiam E F: ſecetur verò Antecedens A C in D, vt tota quantitas B F ſecatur in E.

Dico proportionem rationis D C ad B E (quæ eſt exceſſus rationis A C ad B E ſupra rationem A C ad B F, aut A D ad B E) ad rationem A C ad B E, eſſe rationem E F ad B E. Proportionem autem eiuſdem rationis D C ad B E ad rationem A C ad B E eſſe rationem E F ad B F. Ac denique Inuertendo. Proportionem rationis A C ad B E ad rationem D C ad B E eſſe rationem B F ad E F.

Demonſtra

Demonſtratio.



Prima Aſſertionis pars probatur. Proportio rationis D C ad B E ad rationem A D ad B E eſt ratio Antecedentium D C ad A D per Prop. 7. Lib. 1. Exam. Quadrat. cum ſit idem vtriuſque rationis conſequens B E. Sed per Prop. 5. ratio D C ad B E eſt exceſſus, quo ratio A C ad B E ſuperat rationem A C ad B F. Ergo ratio D C ad A D eſt Proportio rationis, quâ ratio A C ad B E ſuperat rationem A C ad B F, ad rationem ipſam A C ad B F. Sed vt D C ad A D ita eſt E F ad B E. Ergo ratio E F ad B E Proportio etiam eſt rationis D C ad B E ad rationem A C ad B F.

Secunda pars, quod ratio E F ad B F ſit Proportio rationis D C ad B E ad rationem A C ad B E eſt etiam euidentiſſima. Cum rationum D C ad B E, & A C ad B E idem ſit conſequens B E; earum Proportio ratio erit D C ad A C per Prop. 7. Lib. 1. Exam. Quadrat. Sed vt D C ad A C ita eſt E F ad B F. Ergo ratio E F ad B F Proportio etiam eſt rationis D C ad B E ad rationem A C ad B E.

Tertia denique pars eodem modo conſtat; Nam rationis A C ad B E ad rationem D C ad B E eiuſdem cõſequentis Proportio, eſt ratio A C ad D C Antecedentium per Prop. 7. Lib. 1. Examinis Quadrat. Sed vt A C ad D C; ità eſt ex hypotheſi B F ad E F. Ergo etiam ratio B F ad E F eſt Proportio rationis A C ad B E ad rationem D C ad B E. Quare ſi ad rationis A C ad B E &c. Quod erat probandum.

PROPOSITIO VII. *Theorema.*

Propoſitiones quinta & ſexta Libri 10. operis Geometrici vno ſenſu veræ, altero falſæ dici debent.

Expoſitio & Demonſtratio.

Percelluère aliquot, eóſque minimè rudes Geometras hæ duæ Authoris Cyclometriæ grauiſſimi Propoſitiones. Qui eas non falſitatis tantùm nomine condemnarunt; ſed eo etiam, quod inter ſe non conſonare viderentur, eaſdem exploſerunt, vnáque cum eis nouam Tetragoniſmi per rationes diſſimiles inſtituendi methodum; cuius in hiſce Propoſitioinibus fundamenta iaci, nec falſò, cenſerent. Quam eandem cenſuram ſanè grauiſſimam ferendi, anſam cuilibet daret verus, & vſurpari ſolitus verborum ſenſus, quibus ab Authore

conceptæ

conceptæ ſunt; niſi obſtaret mentis ſuæ tum Authoris declaratio in ſcholiis propoſitionum ſextæ & octauæ facta, tum eius Interpretum Alphonſi de Saraza, & Franciſci Aynſcom ſuis in elucidationibus expoſitio. Ea tamen illorum cura, etſi non leuis, haud ita omnem ab his abſterſit caliginem (adeò ea denſa eſt) vt nulla reliqua videatur ſupereſſe: quam locus hic vt executiam omnino poſtulat. Quod non aliâ ratione faciliùs præſtari poteſt, quàm ſi vtramque illam propoſitionem, eiúſque probationem ex ipſomet Authore proferam primùm, ac deinceps perpendam. En itaque priorem Authoris verbis, meo autem ſchemate expreſſam.

Sit ratio A C ad quamuis quantitatem B F diuiſam in E. Dico quòd ratio A C ad B E excedit rationem A C ad B F ratione E F ad B E. Id probat Author demonſtratione huiuſmodi.

Ratio A C ad B E ad rationem A C ad B F, æquatur rationi B F ad B E ad rationem B E ad B E: Sed ratio B F ad B E ſuperat rationem B E ad B E, ratione E F ad B E; Igitur ratio A C ad B E ſuperat etiam rationem A C ad B F ratione E F ad B E.

Habes propoſitionem illam quintam Libri 10. oper. Geom. habes & eius probationem: vtramque, ſi verbis ſtandum eſſe cenſeas, falſitatis, vtramque obſcuritatis denſiſſimæ condemnaturus. Ad propoſitionem quidem quod attinet. Quî verū eſſe poteſt *rationem A C ad B E excedere rationem A C ad B F ratione E F ad B E?* Nunquid euidentiſſimè probatum eſt à me Prop. 5. ſuperiore, ſi antecedens A C ſimiliter in D diuidatur, vt conſequens diuiſus eſt in E; rationem A C ad B E excedere rationem A C ad B F, ratione D C ad B E? Hæc autem ratio D C ad B E haud quaquam æqualis eſſe poteſt rationi E F ad B E; eo ſolo excepto caſu, in quo quantitates A C & B F, atque adeò D C & E F, vtpote ipſis A C & B F proportionales, æquales eſſe contigerit: Tunc enim per Prop. 7. Lib. 5. Elem. æqualium D C & E F ad eandem B E ratio eadem futura eſt, adeóque ipſa etiam ratio E F ad B E, exceſſus erit rationis A C ad B E ſupra rationem A C ad B F. At, ſi inæquales fuerint D C & E F, vt inæquales eſſe neceſſe eſt poſitis A C & B F inæqualibus; dici nullo modo poteſt ratio E F ad B E, eſſe exceſſus rationis A C ad B E ſupra rationem A C ad B F. Hæc circa ipſam propoſitionem objici meritò poſſunt. Quid circa eius probationem? Accipe.

Major Propoſitio ſyllogiſmi quo ſuam Aſſertionem probat Author, ſic habet. *Ratio A C ad B E ad rationem A C ad B F æquatur rationi B F ad B E.* Siſtamus. Quis horum verborum ſit ſenſus, mihi nullo modo

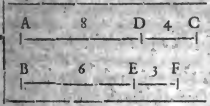
B conſtat:

conſtat:neque enim quemquam de rationibus, aut rationum Proportionibus agentem nactus ſum aliquando, qui eo loquendi modo vteretur. Et verò quid concipias, dum aſſeritur. *Ratio A C ad B E ad rationem A C ad B F comparata, eſſe æqualis rationi B F ad B E ſimplici & abſolutæ?* An non etiam hæc ipſa ratio B F ad B E ad aliam rationem comparari debuerat, vt homogeneorum lex deſiderare videtur? An eadem ratio A C ad B E, quæ eſt relationis fundamentum, per hanc relationem ad rationem A C ad B F tanquam terminum, vel augetur, vel minuitur; vt per augmentum huiuſmodi vel decrementum, æqualis fiat rationi illi B F ad B E? Non debuit Vir doctiſſimus (bonâ dicam cum eius veniâ) omiſſo vſurpari ſolito loquendi modo, tractationis difficillimæ tenebras nouis verborum tenebris, non ſine Lectorum diſpendio cumulare. Verùm demus ſummo Geometræ, quod alij eiuſdem ordinis viri ſibi olim conceſſum cenſuere; vt ſcilicet ſublimiorũ diſciplinarum myſteria, ne cuilibet obuia proponerentur, ſed idoneis tantùm earum cultoribus, methodo anguſtiori, tenuíque verborum habitâ ratione exhiberent; quo deterrerentur ineptiores, ſolertiores accenderentur ad eorum perſcrutationem. Quam ſi ſuper citatâ propoſitione inſtituere velimus, haud ægrè admodum Authoris ſenſum aſſequemur.

Age. *Ratio*, inquit, *A C ad B E ad rationem A C ad B F eſt æqualis rationi B F ad B E ad rationem B E ad B E.* Vis noſſe verum, & ad mentem Authoris accommodatum ſenſum? Ita hanc propoſitionem vnicâ additâ voce enunciato. *Ratio rationis A C ad B E ad rationem A C ad B F æquatur rationi rationis B F ad B E ad rationem B E ad B E.* Vel proprio vtens vocabulo ſic fare. *Proportio rationis A C ad B E ad rationem A C ad B F æquatur proportioni rationis B F ad B E ad rationem B E ad B E.* Vel hoc etiam modo loquere. *Rationes A C ad B E, & A C ad B F proportioonales ſunt rationibus B F ad B E, & B E ad B E.* Aut denique dic. *vt ſe habet ratio A C ad B E ad rationem A C ad B F; ita ſe habet ratio B F ad B E, ad rationem B E ad B E.* Hi ſiquidem omnes loquendi modi idem planè ſignificant, & ſenſum exprimunt verum, & ad mentem, vt reor, Authoris. Nam proportio rationis A C ad B E ad rationem A C ad B F, cùm idem ſit vtriuſque Antecedens A C, eſt ratio reciprocè huius conſequentis B F ad illius conſequentem B E, per Prop. 8. Lib. 1. Exam. Quadrat. ſed per 7. eiuſdem, Eadem ratio B F ad B E eſt etiam proportio rationis B F ad B E ad rationem B E, ad B E, cùm idem ſit vtriuſque rationis huius conſequens B E. Vera ergo, perſpicua, & euidens eſt ſic expoſita ſuperioris ſyllogiſmi maior propoſitio. Quid iam de eiuſdem minore

Propoſitio

Propoſitione ſeu Aſſumptione dicendum, Inquiramus.



Aſſumptio illa ſic habet. *Sed ratio B F ad B E ſuperat rationem B E ad B E, ratione E F ad B E.* Vera eſt, & euidens ſecundùm ſe ſpectata hæc propoſitio, cùm enim duarum rationum BF ad B E, & BE ad BE idem ſit conſequens BE: earum proportio erit ratio Antecedentis B F ad Antecedentem B E. Et conuertendo. Ratio E F (quæ quantitas eſt exceſſus, quo Antecedens B F ſuperat Antecedentem B E) ad B E erit proportio rationis E F ad B E (quæ ratio eſt exceſſus, quo ratio B F ad B E ſuperat rationem B E ad B E) ad rationem B E ad B E. Vera, inquam, eſt hæc propoſitio per ſe ſpectata. At, quis eius cum ſyllogiſmi maiore propoſitione connexionem ad eius vim neceſſariam agnoſcere queat? Maioris illius termini ſunt rationes ipſæ proportionales, atque adeò inter ſe comparatæ: at verò Aſſumptionis huius termini abſoluti ſunt, & ſecundùm ſe ſumpti, rationes ſcilicet ſimplices abſque omni ad alias rationes relatione: quæ verò abſoluti cum relatiuo conuenientia intercedere poteſt?

Hæc, quæ probationem Propoſitionis illius Quintæ Lib. 10. oper. Geom. condemnare videntur, illis coniuncta, quibus initio propoſitionem ipſam impugnaui, ponderis ſatis grauis ad eam planè rejiciendam cuipiam videri poſſint. Verùm non eò ſpectat hæc à me inita diſputatio: abſit vt tanto Geometræ quidpiam excidiſſe cenſeam hac in materiâ non omnino obſcuriſſimâ, quod falſitatis argui poſſit; ſi tamen non ex verborum, quibus vtitur, vſurpari ſolitâ ſignificatione, ſed ex eius mente perpendatur: vt vel hinc conſtet, cum cæteris non loqui, quàm cum cæteris non ſentire, interdum eſſe periculoſius. Sed eò ſpectat in primis, vt harum propoſitionum veritas tenebris non carens, ſic excuſſa fulgeat ſplendidiùs. Iam ergo ſenſum propoſitionis huius tum ex ipſo Authore, tum ex eius interpretibus traditum excipiamus.

Sit ratio A C (habet propoſitio quinta, de quâ agitur) *ad quantitatem B F diuiſam in E. Dico*, inquit Author, *quòd ratio A C ad B E, excedit rationem A C ad B F, ratione E F ad B E.*

Iam ſuprà oſtendi, ſi huius aſſertionis verba provt ſonant, accipiantur, falſam eſſe. Neque enim ratio E F ad B E, eſt exceſſus rationis A C ad B E ſupra rationem A C ad B F, ſed ratio D C ad B E. Quo

B 2 ergo

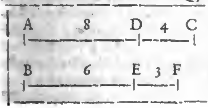
Digitized by Google

ergo ſenſu ratio E F ad B E, exceſſus dici poteſt rationis A C ad B E ſupra rationem A C ad B F? Accipe ab ipſomet Authore, qui in ſcholio propoſitionis ſextæ mentem ſuam aperit in hæc verba. *Aſſerit itaque*, inquit, *quinta propoſitio, quòd ratio A C ad B E excedat rationem A C ad B F ratione E F ad B E, non qualicunque; ſed ratione E F ad B E relatâ ad rationem B F ad B E. Et ſic eſt ſenſus; ratio exceſſus, quo ratio A C ad B E, ſuperat rationem A C ad B F (qui exceſſus eſt ratio E F ad B E) debet conferri cum ſolâ ratione B F ad B E. Nam ratio B F ad B E illa eſt, qua ſuperat rationem B E ad B E ratione E F ad B E.* Hæc Author, à quibus non diſcrepant eius interpretum expoſitiones.

Vult ergo rationem E F ad B E, quam aſſerit eſſe exceſſum rationis A C ad B E ſupra rationem A C ad B F, referri debere ad aliam rationem, nempe ad rationem B F ad B E. At ratio E F ad B E relata ad rationem B F ad B E, proportionem generat: hoc eſt rationem rationis E F ad B E ad rationem B F ad B E. Vnde noua emergit difficultas: cuius Author, eiúſque interpretes ne mentionem quidem fecerunt. Quî enim concipi poteſt, vt ratio ſimplex & abſoluta A C ad B E, rationem item ſimplicem & abſolutam A C ad B F ſuperet ratione E F ad B E comparatâ cum ratione B F ad B E, ſiue proportione duarum rationum E F ad B E, & B F ad B E? Nunquid duarum quantitatum inæqualium differentia eiuſdem cum illis debet eſſe generis? relatiuum autem cum abſolutò non poſſunt genere conuenire. Ad hæc. Si ratio E F ad B E relata ad rationem B F ad B E, hoc eſt, ſi harum duarum rationum proportio, eſt exceſſus, quo ratio A C ad B E ſuperat rationem A C ad B F: neceſſe eſt proportionem illam æqualem eſſe rationi D C ad B E. Nam ratio hæc D C ad B E, illa eſt, vt Prop. 5. oſtendi, quâ ratio A C ad B E ſuperat rationem A C ad B F. At rurſus, quæ æqualitas intercedere poteſt inter relatiuum & abſolutum? His difficultatibus minimè ſanè contemnendis occurrere poterant vel Author, vel interpretes: ſi quemadmodum rationis A C ad B E exceſſum ſupra rationem A C ad B F, relatiuum eſſe dixerunt, ita etiam ipſas rationes relatiuas eſſe aſſeruiſſent. Hac enim aſſumptâ hypotheſi, nihil verius ipſâ propoſitione, nihil eius probatione clarius. Hanc ergo, vt totam diſſertationem circa propoſitionem illam Quintam Libri 10. Oper. Geom. inſtitutam optato cum euentu tandem concludamus, in huc modum enuncio.

Sit ratio A C ad quantitatem B F diuiſam in E. Dico, quòd proportio rationis, quâ ratio A C ad B E ſuperat rationem A C ad B F, ad rationem ipſam A C ad B E; ſit æqualis proportioni rationis E F ad B E ad rationem B F ad B E

BE Iam propoſitionis huius ſic conceptæ probationem inſtitue hoc eodem ferè modo, quo iam ſuprà inſtituta eſt, Proportio rationis D C ad B E, ad rationem A C ad B E, eſt ratio D C ad A C per Prop. 7. Lib. 1. Exam: Quadrat. vtriuſque enim huius rationis idem eſt conſequens B E. Sed vt D C ad A C, ita eſt E F ad B F, ſectæ ſiquidem ſunt A C, & B F ſimiliter in D & E ex ſuppoſitione. Ergo ratio E F ad B F, proportio etiam eſt rationis D C ad B E ad rationem A C ad B E. Sed ratio D C ad B E per Prop. 5. eſt exceſſus rationis, quo ratio A C ad B E ſuperat rationem A C ad B F; Ergo ratio E F ad B F eſt proportio rationis, quâ ratio A C ad B E excedit rationem A C ad B F, ad rationem ipſam A C ad B E. Sed illa eademmet ratio E F ad B F eſt etiam proportio rationis E F ad B E ad rationẽ B F ad B E per Prop. 7. Lib. 1. Exam. Quadrat. conſequens enim B E vtrique communis eſt; Ergo proportio rationis, quâ ratio A C ad B E ſuperat rationem A C ad B F, ad rationem A C ad B E æqualis eſt proportioni rationis E F ad B E ad rationem B F ad B E. Quod erat probandum.



Ex his patet quàm plana, & aperta ſit tam propoſitio, quàm eius probatio, ſi aptis ad captum verbis enuncietur. Atque hactenus de Prop. 5. ſatis, nunc ad Prop. ſextam accedo.

Non minùs hæc Sexta propoſitio Libri 10. Oper. Geom. eiúſque probatio, quàm proximè expoſita Quinta, obſcuritate verborum laborat; dum vel alieno ab ipſâ eorum inſtitutione ſenſu adhibentur, vel eorum aliquot, quæ ad expoſitionem forent omnino neceſſaria, defectu. Verùm ex iis quæ ad Propoſitionis Quintæ elucidationem allata ſunt, facilè, cùm paria ferè ſint, ſexta hæc innoteſcet. Sic ergo habet ex verbis Authoris, meóque enunciata ſchemate.

Data ſit ratio A C ad quamuis aliam quantitatem B F diuiſam in E. Dico, inquit, *rationem A C ad B F æquari rationi A C ad B E, minùs ratione E F ad A C.*

Vel clariùs, & ad præcedentis propoſitionis enunciationem magis appoſitè, *Dico rationem A C ad B E excedere rationem A C ad B F, ratione E F ad A C.*

Conſtat in primis aliter, quàm ipſa ſonet, intelligendam eſſe hanc propoſitionem; atque adeò velut falſam ex Grammaticorum placitis, iuxta quæ loqui nos decet, reijciendam. Quî enim verum eſſe poteſt

rationem E F ad A C, rationem eſſe illam, quâ ratio A C ad B E excedit rationem A C ad B F: cùm illa hanc excedat ratione D C ad B E per Prop. 5. huius. An eadem poteſt eſſe ratio D C ad B E, & E F ad A C? occurrit Author, eiúſque Interpretes, qui vnà aſſerunt rationem E F ad A C abſolutam non eſſe, ſed reſpectiuam ad rationem B F ad A C. Huc difficultates recurrunt, quæ circa Prop. Quintam occurrerunt. Verùm recurrit etiam earum ſolutio, quæ per ſe patebit, ſi apta ad mentem Authoris, verborúmque ſignificationem fiat propoſitionis enunciatio in hunc modum.

Sit ratio A C ad quamuis aliam quantitatem B F diuiſam in E. Dico, quòd proportio rationis illius, quâ ratio A C ad B E ſuperat rationem A C ad B F (quæ ratio, ſectâ A C in D, vt in E ſecta eſt B F, eſt D C ad B E) *ad rationem A C ad B E eſt eadem cum proportione rationis E F ad A C ad rationem B F ad A C.*

Euidens ac plana eſt propoſitionis huius, verbis ad mentem Authoris accommodatis expreſſæ demonſtratio. Oſtenſum ſiquidem eſt in Expoſitione Propoſitionis Quintæ nuper allatâ, proportionem rationis D C ad B E (qua ratio A C ad B E ſuperat rationem A C ad B F per Prop. 5.) ad rationem A C ad B E, eſſe rationem E F ad B F. Sed proportio rationis E F ad A C ad rationem B F ad A C, eſt etiam ratio E F ad B F. Ergo proportio rationis D C ad B E ad rationem A C ad B E eadem eſt cum proportione rationis E F ad A C ad rationem B F ad A C. Quod erat probandum.

Ex quibus manifeſtum euadit quomodo quantitas B E eadem ſit pars quantitatis B F, quæ pars eſt ratio A C ad B F, rationis A C ad B E. Quomodo item eadem pars ſit quantitas E F eiuſdem quantitatis B F; quæ pars eſt ratio D C ad B E (quæ per Prop. 5. eſt exceſſus rationis A C ad B E ſupra rationem A C ad B F) rationis A C ad B E. Eſt enim ratio E F ad B F illarum rationum ratio, quæ proportio dicitur; ita vt iuxta rationem E F ad B F, denominetur rationum D C ad B E, & A C ad B E, habitudo. Quod aliud non eſt, quàm quod aſſerere voluit Cyclometriæ Author Prop. 5. Libri 10. Oper. Geom. quibuſcumque verbis, prout libuit, vſus ſit.

Eodem porrò iure eadem ratio E F ad B F denominabit habitudinem rationis E F ad A C, ad rationem B F ad A C; quæ eſt ipſa propoſitio Authoris ſexta; qua aliud nihil intendit vel proponere, vel probare (etſi verbis id vix explicet) quàm rationes duas E F ad A C, B F ad A C, duabus D C ad B E, A C ad B E, eſſe proportionales. Atque hæc ſunt omnia) quæ ad harum duarum Propoſitionum Quintæ

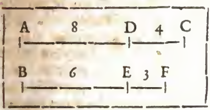
&

& Sextæ Libri 10. Oper. Geom. explanationem occurrerunt conducentia: quibus non nemini fortaſſe ſatis factum fuerit. Ad alias aliquot generis eiuſdem propoſitiones exponendas nunc pergo.

PROPOSITIO VIII. *Theorema.*

NVnquid vera eſt Propoſitio Septima Libri 10. Oper. Geometrici? Non ſanè vera, ſi verba ſpectes Authoris; ſi mentem, veriſſima. Vix tamen identitatis vitio carere videtur.

Expoſitio & Demonſtratio.



Quænam igitur eſt ea propoſitio, vt quæ de ea hîc aſſeruntur, quo iure aſſerantur conſtare poſſit? En ipſam ad verbum meo ſchemati accommodatam.

Sit rationis A C ad B F, conſequens B F, diuiſus in E. Dico rationem A C ad totam B F eandem eſſe cum ratione A C ad B E, & ratione A C ad E F. Hæc eſt propoſitio. En demonſtrationem eiuſdem Authoris.

Eſt ratio A C ad B F æqualis rationi A C ad B F mulctatæ ratione E F ad A C per 6. huius. Sed ratio A C ad B E, & A C ad E F, æqualis etiam eſt rationi A C ad B E diminutæ per rationem E F ad A C, iuxta iam dicta in ſcholio præcedente. Igitur ratio A C ad totam B F eſt eadem cum ratione A C ad B E ſimul cum ratione A C ad E F.

Ex dictis proximè circa Propoſitionem Quintam, & Sextam Libri 10. Oper. Geom. planior fiet aditus ad mentem Authoris percipiendam circa eius propoſitionem 7. huc adductam, & eiuſdem probationem, licèt à verbis longè alienam, vtramque percurro, & expono vnáque aſſertionis meæ partes ſingulas veras eſſe demonſtro. Statutâ itaque hypotheſi quòd rationis A C ad B F, conſequens B F ſecetur in E, *ratio A C ad totam B F*, inquit Cyclometra, *eadem eſt cum ratione A C ad B E, & A C ad E F*; Vel, vt aliàs loquitur, *ratio A C ad B F conſtituitur ex rationibus A C ad B F, & A C ad E F*; Vel, vt non ſemel pronunciat, *ratio A C ad B F continet rationes A C ad B E, & A C ad E F.*

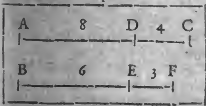
Quo loquendi modo, quis non ſtatim concipiat Authorem velle rationem

rationem A C ad B F conſtare, ſiue conſtitui ex duabus rationibus A C ad B E, & A C ad E F tanquam veris & homogeneis partibus, vel rationem A C ad B F continere rationes A C ad B E, & A C ad E F, velut totum continet partes propriè dictas, & poſitiuas? At longè alius, ne dicam planè oppoſitus, eſt Authoris ſenſus. Ratio ſiquidem A C ad B E maior eſt, quàm ratio A C ad B F; dicique verè poteſt eam continere tanquam partem, & ex eâ velut parte conſtitui. Aſſerit ergo Cyclometra, vt in ſcholio Propoſ. 6. indicat, rationem A C ad B F, dici conſtitui ex rationibus A C ad B E, & A C ad E F: ſicut (inuerſis terminis huius rationis) rectè diceretur ratio B F ad A C conſtitui ex duabus rationibus B E ad A C, & E F ad A C. At pace tanti viri dixero, longè aliter ratio hæc B F ad A C conſtituitur ex rationibus B E ad A C, & E F ad A C; quàm conſtituatur ratio A C ad B F ex rationibus A C ad B E, & A C ad E F. Ratio enim B F ad A C, rationes continet B E ad A C, & E F ad A C tanquam partes propriè dictas, & ex eis conſtituitur; quia verè ambæ in vnam rationem B F ad A C per veram additionem colliguntur; quæ abſoluitur additis Antecedentibus B E & E F, vt fiat Antecedens nouus B F, cui tribuatur idem conſequens A C. At verò, cùm duarum rationum A C ad B E, & A C ad E F, conſequentes B E, & E F adduntur, ſimúlque additi eidem Antecedenti A C aſſignantur; ratio genita A C ad B F, non conſtitui, vel coaleſcere, vel componi dici poteſt, abſque abuſu verborum Lectoríſque deceptione, ex rationibus A C ad B E, & A C ad E F; ſed potiùs alterutra, vt A C ad B E per alteram A C ad E F deſtrui, reſolui, minuique dici debet; & quidem ſecundùm rationem E F ad B E relatam ad rationem B F ad B E; vt Authoris definit propoſitio quinta ſuperiùs explicata; vel vt vult ſexta, ſecundùm rationem E F ad A C relatam ad rationem B F ad A C; aut ſecundùm earum vtrarumque proportionem, quæ eſt ratio E F ad B F. Hæc enim ratio eſt tam Antecedentis E F rationis E F ad B E, ad Antecedentem B F rationis B F ad B E; quàm rationis E F ad A C, & rationis B F ad A C, vt patet: vtrarumque enim harum rationum iidem ſunt Antecedentes E F & B F: quorum ratio, eſt proportio earum per Prop. 7. Lib. 1. Exam. Quadrat. Sicut & aliarum quarumcumque rationum, quarum idem ſtatuatur conſequens quicumque, Antecedentes verò ſint E F, & B F. Admittenda ergo non eſt vt vera, propoſitio illa ſeptima Lib. 10. Oper. Geom. ſi ſola attendatur verborum, quibus exprimitur, propria ſignificatio: Admittenda autem erit vt veriſſima, ſi, vt par eſt, habeatur ratio mentis Authoris. Qui

dum

Google

dum aſſerit rationem A C ad totam B F, eſſe rationem A C ad B E, & A C ad E F; nihil aliud ipſe, nihil aliud eius interpretes ſignificari volunt, quàm rationem A C ad B E per acceſſum, non quidem rationis A C ad E F (ſic enim intelligeretur rationum additio, quod longè longiùs iidem ſemper, quoties fert occaſio, rejiciunt) ſed per acceſſum quantitatis E F præciſè & abſoluté ad conſequentem B E, rationis A C ad B E. Quo fit, vt eadem ratio A C ad B E minuatur iuxta rationem, proximè memoratam, quam habet E F ad B F: ita vt ex ratione A C ad B E, per additionem quantitatis E F ad conſequentem B E, ſubtrahatur ratio quædam, quæ ita ſe habeat ad rationem ipſam A C ad B E, vt E F ſe habet ad B F: Quæ quidem ratio ſubtracta alia non eſt in hoc meo ſchemate, quàm ratio D C ad B E, ex ſuppoſitione quòd A C ſimiliter ſecetur in D, vt ſecatur B F in E. Hæc enim ratio D C ad B E ita ſe habet ad rationem A C ad B E, vt D C eſt ad A C per Prop. 7. Lib. 1. Exam. Quadrat. hoc eſt, vt E F ad B F, ſiue vt ratio E F ad B E, eſt ad rationem B F ad B E; aut etiam vt ratio E F ad A C ad rationem B F ad A C, vt aſſeritur Prop. 5. & 6. operis Geom. nuper Prop. 6. explicatâ: &, ſi eadem ratio ſubducatur à ratione A C ad B E, reliqua fit ratio A D ad B E; quæ æqualis eſt rationi A C ad B F genitæ per additionem quantitatis E F (quæ materialiter tantùm eſt conſequens rationis A C ad ad E F, vt ipſemet Author ſupponit) ad B E conſequentem rationis A C ad B E. Ex iis patet quàm longè abſit à naturali, vſurpatíque ſolito ſenſu Aſſertionis huius ſeptimæ Libri 10. Oper. Geom. quâ dicitur *ratio A C ad totam B F eſſe ratio A C ad B E, & A C ad E F, vel, ex his ambabus conſtitui, vel eas continere*; Senſus Authoris: dum hic ſenſus ſubtractionem, & diminutionem innuit; ille verò Additionem, & augmentum propriè & apertè ſignificat. Clara ergo eſt prior Propoſitionis huius pars.



Nec minùs aperta eſt pars eiuſdem poſterior, quâ aſſerui Propoſitionem illam ſeptimam Lib. 10. Oper. Geom. iuxta ſenſum Authoris proximè expoſitum acceptam, identitatis vitium, atque adeò inutilitatis notam effugere vix poſſe. Cùm enim citato loco aſſeritur ab Authore, rationem A C ad totam B F, eſſe rationem A C ad B E, & A C ad E F; alterum è duobus admittat neceſſe eſt. Aut enim vult harum duarum rationum A C ad

B E, A C ad E F conſequentes B E & E F, vt diſtinctos, nulláque quantitatis vnione coniunctos conſiderari;aut certè coniunctos ſimul concipi debere. Non primum; ſic enim, quod ipſe reijcit, aſſereret, nempe rationem A C ad B F, æquiualere duabus rationibus partialibus A C ad B E, & A C ad E F, rationem totalem A C ad B F per additionem integrantibus, & verò id falſum oſtenſum eſt. Aut certè vult (quod idem aſſerit, & non ſemel inculcat, ſæpiúſque repetunt eius aliàs citati interpretes) duos illos conſequentes B E & E F vt vnitos ſumi debere, & quantitatem E F tanquam abſolutam apponi ad conſequentem B E rationis A C ad B E, per quam appoſitionem fiat ratio A C ad B F. At quæro, quid diſcriminis inter ſubiectum, & prædicatum huius enunciationis obſeruari poteſt? Ratio A C ad totam B F eſt ratio A C ad B E auctam quantitate E F? Nunquid tota B F eadem planè eſt cum quantitate B E & ſimul E F? Quam conceptionem animo ingerit prædicatum hoc, *ratio A C ad B E cum E F*, à ſubiecti huius, *ratio A C ad totam B F*, conceptione diuerſam? Ergo idem per idem enunciatur in dictâ propoſitione; quod aſſerui.

Confirmatur identicus ille propoſitionis eiuſdem ſenſus euidentiſſimè ex probatione ipsâ Authoris, quæ planè identica eſt; ſic enim habet.

Ratio A C ad B F æqualis eſt rationi A C ad B E mulctatæ ratione E F ad A C per 6. huius, hoc eſt, provt ipſe Author intelligit, vt Prop. 7. ex ipſomet declaraui, mulctatæ ratione E F ad A C relatâ ad rationem B F ad A C; Neque enim ratio E F ad A C ſubtrahitur à ratione A C ad B E, vt ratio A C ad B F, aut ei æqualis A D ad B E relinquatur; ſed ſubtrahitur ratio D C ad B E, vt citato loco oſtendi, quæ ita ſe habet ad rationem A C ad B E; vt ratio E F ad A C ſe habet ad rationem B F ad A C. Hæc eſt maior ſyllogiſmi Propoſitio, hæc eius expoſitio. Minor autem ſic habet.

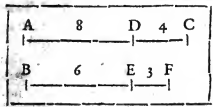
Sed ratio A C ad B E, & A C ad E F, etiam æqualis eſt rationi A C ad B E diminutæ per rationem E F ad A C iuxta iam dicta in ſcholio præcedente. At ſcholium illud aliud nihil eſt quàm ipſamet Prop. 6. quæ in eo fuſiùs ab ipſo Authore explicatur, vt ex eius mente retuli Prop. 7. ſuperiore. Vult ſcilicet rationem A C ad B E, cuius conſequens B E augeatur per appoſitionem quantitatis E F, quæ eſt materialiter conſequens rationis A C ad E F (neque enim formaliter habetur vlla ratio rationis illius A C ad E F, cum eius conſequens E F additur ad conſequentem B E) vult, inquam, rationem A C ad B E per additionem quantitatis E F ad conſequentem B E, vt fiat noua ratio A C ad

B F;

Digitized by Google

BF; æqualem eſſe rationi AC ad BE, mulctatæ ratione EF ad AC, relatâ ad rationem BF ad AC: vel mulctatæ iuxta rationem EF ad BF; quæ eſt proportio, vt ſuprà expoſui, rationis EF ad AC ad rationem BF ad AC. Nihil ergo aliud hæc Aſſumptio continet, quàm eiuſdem ſyllogiſmi Propoſitio Maior: eadémque præterea eſt vtriuſque huius Propoſitionis probatio, ipſa ſcilicet Propoſitio 6. Lib. 10. Oper. Geom. ad Maioris probationem citata; & eiuſdem Propoſitionis 6. ſcholium Aſſumptionem probans: quod aliud non eſt quàm ipſa Propoſitio 6. clariùs explicata. Cùm igitur & Propoſitionis ipſius ſubiectum idem eſſe cum prædicato oſtenſum ſit, & eadem Propoſitio 6. Libri 10. Oper. Geometrici tam ad maiorem ſyllogiſmi propoſitionem probandam aſſumatur, quàm ad Aſſumptionem; quodnam propoſitionis illius ſeptimæ Libri 10. Oper. Geom. identitatis Argumentum apertius haberi poteſt? Certum itaque, ac fixum eſto; propoſitionem illam veram quidem non eſſe; ſi, quibus exprimitur verbis, concipiatur; veriſſimam autem, ſi ſenſus attendatur Authoris: ſed ita veriſſimam dici debere; vt continuò identica, adeóque inutilis dici debeat. Quod hac propoſitione declarandum erat.

Corollarium non leue.



Imò tam graue, quàm quod in hac materia grauiſſimum reperire eſt. Colligitur enim ex hac meâ propoſitione octauâ, quâ Propoſitionem 7. Lib. 10. Oper. Geom. Identitatis vitio laborare mihi videor euidenter oſtendiſſe; ab eâ labe immunem minimè futuram Propoſitionem octauam eiuſdem Libri 10. Oper. Geom. vtpotè quæ ex illâ probetur, aut etiam (quod amplius eſt) ad eandem reducatur, vt mox aperiam. Cùm autem ea Propoſitio octaua, ſit velut primum, cui tota harum Quadraturarum moles incumbit, fundamentum; næ illæ omnes in periculo iam inde verſantur non leui. Quod ne temerè aſſeri videatur, en illam Propoſitionem, eiuſque probationem Authoris ipſius verbis meo ſchemati accommodatis expreſſam.

Sint rationis AC ad BF termini tam antecedens, quàm conſequens diuiſi, ille in D, hic in E. Dico rationem AC ad BF eandem eſſe cum ratione AD ad BE, DC ad BE; & AD ad EF, DC ad EF. Quod ſic per Propoſitionem ſuam 7. demonſtrat. *Ratio AD ad BE addita rationi DC ad BE, æqualis eſt rationi AC ad BE per Prop.* 114. *de Proport. Item ratio*

A D ad E F, & D C ad E F per eandem Prop. æqualis eſt rationi A C ad E F. Itaque, cùm ratio A C ad B E vnà cum ratione A C ad E F æqualis ſit rationi totius A C ad totam B F per Prop. 7. patet rationem A C ad B F æquari quatuor rationibus A D ad B E, D C ad B E, & A D ad E F, D C ad E F.

Admittendum ſanè eſt duas rationes A D ad B E, D C ad B E æquales eſſe per citatam Prop. 114. de Proport. vel per Prop. 7. Examinis mei Quadrat. rationi A C ad B E: ſicut & duas A D ad E F, & D C ad E F, æquales rationi A C ad E F. Fit enim vtrobique duarum rationum eundem conſequentem habentium vera additio additis Antecedentibus. At verò, cùm iuxta 7. Prop. Lib. 10. Oper. Geom. aſſeritur haſce duas rationes A C ad B E, & A C ad E F æquales eſſe rationi A C ad B F; eatenus id verum eſſe admitti debet, quatenus identica eſt illa Propoſitio, ſi ex ſenſu Authoris intelligatur, vt intelligi par eſt: hic enim merus eſt caſus illius citatæ Propoſitionis ſeptimæ Authoris, quam hac Propoſitione 8. expoſui. Vnum tamen hîc adhuc monendum duco, poſſe ſcilicet quempiam, niſi aduertat, hallucinari: eo quòd eodem modo, iiſdémque verbis vtatur Author, dum ait rationes partiales A D ad B E, C D ad B E; aut A D ad E F, C D ad E F, eandem eſſe rationem cum ratione totali A C ad E B, aut totali A C ad E F, ſiue ex illis conſtitui, quod iuxta propriam, & vſurpari ſolitam vocum ſignificationem eſt veriſſimum: ac, cùm ait partiales rationes A C ad B E, & A C ad E F eandem eſſe rationem cum totali ratione A C ad B F; quod verũ eſſe nequit iuxta verba ſed tantùm iuxta mentem, ſenſumque eiuſdem Authoris, eiúſque Interpretum iuxta quos, & quidem verè, per acceſſum rationis A C ad E F, ad rationem A C ad B E, additis conſequentibus B E, & E F, vt fiat ratio eiuſdem Antecedentis A C ad conflatum conſequentem B F, minuitur ratio A C ad B E; &, quemadmodum expoſui, & euidenter demonſtraui, identica ſtatuitur Propoſitio, dum aſſeritur totius Antecedentis A C ad totum conſequentem B F eſſe rationes A C ad B E, & A C ad E F.

Cùm ergo ea ſit Propoſitionis octauæ Libri 10. Oper. Geom. cauſa, vt eam identitatis vitio, non ſecus quàm ſeptimam condemnari neceſſe ſit: quid de Prop. 12. eiuſdem Lib. 10. cuius robur ex illâ 8. totum hauritur, cenſendum ſit, facilè poteſt quilibet æſtimare. Quanta verò ſit huius totius Quadraturarum methodi ab hac Propoſitione 12. dependentia neminem latere poteſt præter eum, qui ne primo quidem intuitu hanc Geometræ doctiſſimi tractationem delibarit. Huius ſiquidem Propoſitionis mentio paſſim ita occurrit, vix vt vlla Propo-

ſitio

ſitio eâ careat, aut carere poſſit: vt illa hîc omitti non debeat, tum vt labes, quam in eam ex Prop. 7. & 8. deriuari aſſerui, agnoſcatur: tum vt faciliùs, cùm opus fuerit (opus autem erit ſæpius) conſulatur. En itaque eam ex Authore aſſumptam, & in ſeriem Propoſitionum mearum adſcitam.

PROPOSITIO IX. *Theorema.*

SInt quatuor ordines quinque continuè proportionalium quantitatum ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV; quarum vltimæ E K, P V, ſint æquales.

Dico rationem duarum primarum quantitatum A, F, duorum priorum ordinum, ad duas duorum poſteriorum ordinum quantitates L, Q, toties continere rationem duarum tertiarum C, H, ad duas tertias N, S; quoties hæc ipſa ratio duarum tertiarum C, H, ad duas tertias N, S, continet rationem duarum quartarum D, I, ad duas quartas O, T.

Demonſtratio.

A 16.	B 8.	C 4.	D 2.	E 1.
F 81.	G 27.	H 9.	I 3.	K 1.
L 256.	M 64.	N 16.	O 4.	P 1.
Q 625.	R 125.	S 25.	T 5.	V 1.
AF 97.	BG 35.	CH 13.	D 15.	EK 2.
LQ 881.	MR 189.	NS 41.	OT 9.	PV 2.

Ratio A cum F ad L, Q, æquatur rationi A ad L, A ad Q; & F ad L, F ad Q per Prop. 8. Similiter. Ratio quantitatum C, H ad N, S æquatur rationi C ad N, C ad S; & H ad N, H ad S. Similiter rurſus, ratio D cum I, ad O cum T æquatur rationi D ad O, D ad T, & I ad O, I ad T. Ergo, quoties rationes A L, A Q; F L, F Q continent rationes C N, C S; H N, H S: & quoties hæ continent rationes D O, D T; I O, I T: Toties continet etiam ratio totalis A F ad L Q, rationem C H ad N S: & hæc ipſa rationem D I, ad O T. Sed per Prop. 27. Progreſſ. ratio A L continet per multiplicationem bis rationem C N; hoc eſt, illa eſt huius duplicata: & ratio C N continet bis per multiplicationem rationem C O: ratio quoque A Q continet bis per multiplicationem rationem C S: & hæc bis rationem D T, atque ita de reliquis

Ergo quoties ratio quantitatum A F ad L Q, continet rationem quantitatum C H ad N S: toties hæc ipſa ratio quantitatum C H ad N S, continet rationem quantitatum D I ad O T. Quod fuit demonſtrandum.

Scholium.

Cùm Propoſitio hæc eiúſque demonſtratio ea ſit, vt nuper monui, ex quâ præ cæteris harum omnium Quadraturarum conſtructio æſtimari debet; quædam circa eam obſeruare neceſſe eſt, quæ non parum lucis toti huic tractationi ſunt allatura.

Primò quidem occurrit attendendum. Cùm totum eius robur ac momentum ex Prop.8. hauriatur, vt ex eius demonſtratione patet, in quâ octaua illa Propoſitio adducitur; eáque non dubio, vt oſtenſum eſt, identitatis vitio laboret: patet quanti faciendum illud ſit. Identitas certè Propoſitionis alicuius, vt nemo non nouit, inutilitatis argumentum eſt manifeſtiſſimum.

Secundò. Non mediocriter iuuerit hîc obiter obſeruaſſe, quâ ratione doctiſſimus Geometra quadruplicem illam Tetragoniſmi methodum, de quâ Libro 10. diſſerit, huius ope Propoſitionis ſuæ 12. hac Prop. à me recitatæ inſtituerit, promouerit, perfeciſſéque ſe ſenſerit. Hac ergo viâ inſtitit. Propoſitionem hanc, vniuerſalem velut theſim ad hypotheſim rationum, quas ſolida quædam partialia vnum quoddam ſolidum ſimul vnita conflant, reuocauit. Obſeruauit ſcilicet, & quidem acutiſſimè, partialia ſolida quinque continuè proportionalia omni multitudine numeroſiora, (quæ exhauſtionibus inſeruirent) eorúmque primam quantitatem in omnibus ordinibus eſſe æqualem: tum ex ipſis ſimul additis ſolida totalia conflari, quæ ad alia item totalia ſolida ex aliis partialibus ſolidis genita referri poſſent. Aſſumamus quatuor illos ordines quinque quantitatum proportionalium ſchematis ſuperioris, quatuor eſſe ordines ſolidorum partialium; quorum duo priores ſimul, ſimul item duo poſteriores addantur additis ſolidis homologis, ſibíque correſpondentibus iuxta Propoſitionis hypotheſim. Ad hæc inueſtigauit ac determinauit Author ſolertiſſimus, quantitatem duorum priorum ſolidorum totalium vtriuſque ordinis: nempe ſolidi totalis A F, & totalis L Q: Quorum illud ex partialibus A & F; iſtud ex partialibus L, & Q, vnitis conflatur: quantitatem item duorum totalium ſolidorum C H, N S. Hac autem ſolidorum quantitate cognitâ, nota continuò euaſit eorumdem ſolidorum ratio A F ad L Q, & C H & N S.

His eouſque ab eximio Cyclometrâ accuratiſſimè promotis, ſupererat

pererat tertia ratio ſolidi D I ad O T inueſtiganda : quæ ſi obtineretur, ipſe primus Quadraturæ abſolutæ modus (ad reliquas enim quidpiam præterea haud admodum difficile deſideratur) conſtaret euidenter. Hanc porrò rationem tertiam D I ad O T aſſecutus ſibi viſus eſt Author (atque vtinam , vt præſeferebat argumentum , ita comprobaſſet rei veritas) vbi demonſtrauit primas omnes rationes partiales A ad L, A ad L; F ad L, F ad Q, toties per multiplicationem continere ſecundas partiales C ad N, C ad S, & H ad N, H ad S; quoties hæ ipſæ ſecundæ continent tertias D ad O, D ad T, & I ad O, I ad T : ſiue, vt in ſpecie loquar, vbi demonſtrauit primas ſecundarum, ſecundas autem tertiarum eſſe duplicatas; ac deinde notas eſſe totales quantitates, quæ tùm ex primarum, tum ex ſecundarum partialium terminis additis generantur, atque adeò rationes tum primarum ad primas, tum ſecundarum ad ſecundas totalium ad totales; ac demum harum duarum rationum habitudinem, ſiue proportionem. Hæc, inquam, omnia poſtquam demonſtrauit circa primas & ſecundas rationes, tum partiales, tùm totales: nihil veroſimilius videbatur, quàm ſecundas totales ad totales tertias ita ſe habere, vt primæ ſe habent ad ſecundas : cùm partiales ſecundas ad tertias partiales eodem modo ſe habere certum ſit, vt primæ ſe habent ad ſecundas ; ſint nimirum ſecundæ tertiarum duplicatæ, vt duplicatæ ſunt primæ ſecundarum. Atque hac vſum ratiocinatione Cyclometram ſubtiliſſimum ad definiendam tertiam illam rationem totalem D I ad O T, quæ deſiderabatur ad primam ſuam Quadraturam abſoluendam, conſtat ex demonſtratione Propoſitionis 44. Libri 10. Oper. Geom. quam concludit in hæc verba, *Cùm notæ ſint prima & ſecunda ratio*, totales ſcilicet ſchematis mei, A F ad L Q, & C H ad N S. *Notum quoque eſt quoties prima ſecundam contineat; ac propterea notum quoque eſt quoties ſecunda contineat tertiam. Itaque, cùm ſecunda ratio C H ad N S; nota ſit; etiam nota erit ratio tertia D I ad O T. Quod erat*, inquit, *demonſtrandum*. Demonſtrandum ſiquidem erat, quod citatâ Prop. illâ 44. aſſerebatur ; nimirum, *notam eſſe rationem tertiam D I ad O T.* Quòd euidenter probatum eſſe ſenſit ex eo, quòd notum foret rationem primam toties continere ſecundam, quoties ſecunda contineret tertiam; notæque præterea forent prima & ſecunda ratio. His enim poſitis tertiam rationem ignorari non poſſe ratus eſt; vtpote quæ foret tertia duabus primæ & ſecundæ notis proportionalis, cuius determinandæ modo nihil notius eſſe ſciret: ſiue voluerit (ſuam enim mentem ſuper hac re non aperuit, quod

optandum erat) primam rationem toties continere ſecundam per multiplicitatem, quoties ſecunda per multiplicitatem continet tertiam, quo in ſenſu duabus primæ & ſecundæ notis tertia ratio proportionalis eſſet adiungenda: ſiue intenderit primam continere ſecundam toties per multiplicationem, quoties ſecunda continet tertiam; hoc enim in ſenſu non deeſt etiam ars ex duabus notis rationibus tertiam ignotam inueniendi, vt à me in Examine Quadrat. inuenta eſt. Vt mirari ſatis non poſſim P. Aynſcom aſſeruiſſe, non modo non lædi Quadraturam primam Authoris; ſed ne peti quidem, dum quæſita definitáque eſt ratio tertia, cuius ſecunda foret ſiue æquemultiplex, ſiue æquemultiplicata, ac prima ſecundæ, vt à me præſtitum eſt Lib. 2. Exam. Quadrat. Aſſeruiſſe item, tertiam illam rationem ignotam, notam euadere non poſſe niſi per ſpatia hyperbolica, hoc eſt, per totius Geometriæ occultiſſima myſteria: adeóque aſſeruiſſe, quod magis mirêre, Authorem ſuum, quem interpretatur, ſuâ illâ Prop. 44. Libri 10. pronunciaſſe quidpiam, ſuáque argumentatione demonſtratum affirmaſſe, quod minimè demonſtratum eſſe conſtaret; cùm nuſquam ſpatiorum hyperbolicorum mentio vlla in eâ demonſtratione ab eo facta ſit, ſine quibus id præſtari non poſſet: quod vitio non leui ſummo Geometræ non immeritò verteretur. Sed hæc obiter ex datâ occaſione hîc velitandi tantùm gratiâ dicta ſint, quibus plura in hanc rem ſuo loco acceſſura ſunt. Ex his tamen non leuiter quod hîc agitur, confirmatur; Propoſitionem ſcilicet 12. Libri 10. Oper. Geom. hac meâ Prop. 9. repetitam haud quaquam vtilem eſſe ad Quadraturas tum omnes, tum maximè ad primam; cùm per eam ſine ſpatiorum hyperbolicorum ope innoteſcere non poſſit iuxta doctiſſimi interpretis ſententiam, tertia ratio ad eam omnino neceſſaria. Sed præ cæteris grauem Propoſitionis illius defectum arguit, quòd inueſtigata tertia illa ratio, cuius ſecunda ſit aut æquemultiplex, aut æquemultiplicata; vt ſecundæ multiplex eſt, aut multiplicata ratio prima; Quadraturam exhibeat à verâ longiſſimè alienam, vt Libro 2. Exam. Quadr. oſtenſum eſt, rurſúſque deinceps confirmandum veniet.

A 16.	B 8.	C 4	D 2.	E 1.
F 81.	G 27.	H 9.	I 3.	K 1.
L 256.	M 64.	N 16.	O 4.	P 1.
Q 625.	R 125.	S 25.	T 5.	V 5.
AF 97.	BG 35.	CH 13.	DI 5.	EK 2.
LQ 881.	MR 189.	NS 41.	OT 9.	PV 2.

Monitum.

Monitum.

Memini paulò antè; necdum fortaſſe tibi exciderit, ſpatiorum quorundam hyperbolicorum; quorum ope aſſerit doctiſſimus interpres, ac propugnator harum Quadraturarum P. Franc. Aynſcom reperiri tertiam rationem ad Quadraturam primam, & neceſſariam, & ſufficientem. Quod, An, & quomodo verum, falſumve ſit, cùm hoc opuſculo expendendum, & declarandum ſuſceperim; non poſſum, nec debeo, non aliquid de ſpatiis huiuſmodi priùs delibare; vt abſolutior, tibique (mi Lector beneuole, cui impensè ſtudeo) & vtilior, & gratior, faciliórque tota hæc tractatio exhibeatur. Quanquam enim omnia, quæ ad Hyperbolam pertinent, eáque in primis ſpatia accuratè proſecutus ſit Apollonius alter R. P. Gregorius à S. Vincentio: Quia tamen breuior ob tantam materiæ ſyluam obſcuriórque non raro coactus eſt eſſe; aut quia eius operis tibi non ſuppetet facultas, aut illud conſulendi voluntas: ea huc adducam omnia, ex ipſo tamen hauſta, quæ ad totam hanc diſſertationem non leuis apud Geometras momenti planè & perſpicuè exponendam & intelligendam conferre videbuntur. Age itaque.

PROPOSITIO X. *Definitio.*

Spatia hyperbolica dicuntur mixtæ quædam ſuperficies planæ quadrilateræ: quæ Hyperbolâ, eiúſque alterâ Aſymptoto, & duabus lineis alteri Aſymptoto parallellis comprehenduntur.

Expoſitio.

Sit Hyperbola E F G, cuius Aſymptoti ſint duæ rectæ lineæ A B, A H. Vni verò Aſymptoto, vt Aſymptoto A H, parallelæ ducantur rectæ duæ quæuis lineæ E C, F D. Figura mixta quadrilatera E C D F, duabus hiſce lineis parallelis lineáque hyperbolicâ E F, & rectâ C D (quæ pars eſt alterius Aſymptoti) intercepta; dicitur ſpatium Hyperbolicum. Etſi enim aliæ innumeræ ſuperficies dari poſſint, quæ eodem iure ſpatia dici queant hyperbolica, quæ hyperbolâ, aliiſque rectis lineis circumſcribuntur; iis tamen ſolis ſuperficiebus quas deſignaui, hoc nomen ab eorum primo inuentore ſagaciſſimo attributum eſt, & ab eius interpretibus duobus P. Alphonſo de Saraza, & P. Aynſcom obſeruatum, obſeruarique à nobis par eſt.

Digitized by Google

PROPOSITIO XI. *Theorema.*

SInt Hyperbolæ cuiuſuis Aſymptoti duæ AB, AH: quarum alteri; vt AH, ponantur parallelæ CE, DF: & NO, BG: quæ ſpatia hyperbolica intercipiant CEFD, NOGB.

Dico, quàm multiplex eſt ſpatium CEFD, ſpatij NOGB; tam eſſe multiplicatam rationem lineæ CE ad lineam DF, rationis lineæ NO ad lineam BG.

Expoſitio.

Hæc eſt propoſitio omnium fortaſſe, quæ hactenus vel ab antiquis, vel à recentioribus Geometris de hyperbolâ demonſtratæ ſunt, celeberrima: quam Author operis Geometrici mirâ ſagacitate, vt pleraque alia, obſeruauit, demonſtrauitque Lib. 7. Prop. 125. eiúſque varia accidentia ſequentibus aliquot Propoſitionibus proſecutus eſt, iiſdémque exponendis egregia nauata eſt opera tùm à R. P. Alphonſo de Saraſa in Confirmationibus Quadrat. tum à R. P. Aynſcom in ſuâ Quadraturarum Geometricâ deductione: quos maioris fuſioríſque doctrinæ gratiâ conſulere iuuerit. Hîc ego ea non omittam quæ ad inſtitutum neceſſaria videbuntur. Itaque iuxta allatam Propoſitionem; Si ſpatium CF (ita ſpatium CEFD deſigno, ita reliqua deſignaturus ſum) duplex fuerit ſpatij alterius NG: pro certo habeto rationem lineæ CE ad lineam alteram parallelam DF, cum quâ ſpatium CF intercludit, eſſe duplicatam rationis, quam habet linea NO ad lineam oppoſitam BG parallelam: quibus lineis alterum ſpatium NG clauditur. Quod adeò vniuerſaliter aſſeritur, & probatur loco citato ab eximio Geometrâ, vt nulla ſit rationis NO ad BG quoad ſpeciem (quod mirum eſt) determinatio. Poterit ſcilicet hæc ratio NO ad BG eſſe dupla, tripla, quadrupla, &c. Ratio autem CE ad DF cuiuſcunque rationis NO ad BG erit duplicata, vt duplæ, triplæ, quadruplæ, &c. Quod tamen ita verum eſſe intellige, vt alia & alia duo ſpatia, quorum vnum ſit alterius duplum, alióque & alio loco, ſitúve ſumi debeant; dum rationis duplæ, triplæ, quadruplæ, &c. duplicata ratio ſtatuitur in lineis parallelis ſpatia abſcindentibus. Quod autem de duplicatâ ratione, quam ſpatium ſpatij duplum exhibet, declaratum eſt: idem de triplicatâ, quadruplicatâ, quintuplicatâ, &c. aſſeri debet; quam ſpatium ſpatij alterius triplum, quadruplum, quintuplum, &c. determinare natum eſt.

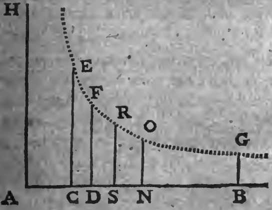
Porrò

Porrò obſeruatione hîc maximè dignum eſt ſpatia illa duo, quorum vnum alterius eſt duplum, triplum, &c. rationémque alterius duplicatam, triplicatam, &c. continent: ita aſſumi poſſe, vt & non communicantia ſint (cuiuſmodi aſſumpta ſunt ſpatia duo CO, & NG) & communicantia, qualia forent ſpatia duo DG & NG) quorum illud ſi huius duplum ſupponatur; ratio DF ad BG, duplicata erit rationis NO ad eandem BG; ſi triplum, erit triplicata, &c. Vniuerſalis enim eſt apud Authorem citato loco demonſtratio: quam, quia ex variis concluſionibus colligitur, quas præter inſtitutum foret explicare, prætermitto. Satis enim eſt ad ea quæ inferiùs diſputaturus ſum, ſi ipſa tantùm Propoſitio allata concipiatur, eiúſque veritas ſupponatur.

PROPOSITIO XII. *Theorema.*

SI ſpatia aliquot Hyperbolica fuerint deinceps æqualia: lineæ parallelæ ea intercipientes, deinceps etiam futuræ ſunt continuè proportionales.

Expoſitio & Demonſtratio.



Sint ſpatia CF, DO, NG, deinceps æqualia: aſſeritur lineas parallelas ea ſpatia intercludentes, eſſe continuè proportionales, lineas nimirum CE, DF, NO, BG. Quod ex præcedentis Propoſitionis veritate ſuppoſitâ ſequitur euidenter. Nam ſi ſpatia duo DO, NG ſunt æqualia: erit ſpatium DG duplum ſpatij NG. Ergo ratio rectæ DF ad rectam BG, duplicata eſt rationis NO ad eandem BG. Quo fit, vt tres lineæ DF, NO, BG, ſint continuè proportionales. Ratio ſcilicet DF ad BG, duas rationes æquales DF ad NO, & NO ad BG continet. Eodem modo quia ſpatium CF ſupponitur æquale duobus ſigillatim ſpatiis DO, NG: erit ſpatium CG triplum

ſpatij N G. Ergo ratio lineæ C E ad lineam B G triplicata eſt rationis N O ad B G: Sed rationis eiuſdem N O ad B G, oſtenſa iam eſt ratio D F ad B G, duplicata. Ergo per Elem. lineæ C E, D F, N O, B G, ſunt continuè proportionales. Quod idem de pluribus rationibus oſtendi facilè poteſt, quotquot fuerint adiuncta deinceps, & continuè ſpatia æqualia.

Scholium.

Quòd ſi duo ſpatia, quorum vnum duplum foret alterius, minimè forent communicantia, nec eâdem lineâ, quæ conſequens communis foret ambarum rationum, clauderentur; cuiuſmodi eſt in hoc Paradigmate linea B G: Tunc ratio quidem vna foret alterius duplicata, ſed lineæ continuè proportionales nequaquam eſſe poſſent: nullâ enim lineâ communi connecterentur, quæ prioris rationis conſequens eſſet, eadémque poſterioris rationis antecedens, vt ad rationum continuitatem requiritur. Idem eſto de pluribus ſpatiis non communicantibus, linearúmque ea intercipientium rationibus iudicium.

PROPOSITIO XIII. *Theorema.*

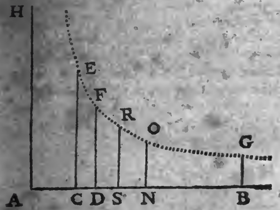
SI ſpatiorum æqualium continuè ſibi adhæreſcentium aliquod in ſpatia duo per lineam parallelam reliquis eâ conditione ſecetur, vt ſpatia facta ſint commenſurabilia: noua poterit ſeries continuè proportionalium linearum ſpatia hyperbolica intercipientium conſtitui, cuius nouæ ſeriei partes quædam ſint priores lineæ continuè proportionales. Hoc eſt, noua ſeries continuè proportionalium generabitur, in quâ omnes lineæ priorem ſeriem conſtituentes locum quendam obtinebunt.

Expoſitio & Demonſtratio.

In eodem ſchemate, eiúſque hypotheſi æqualium trium ſpatiorum C F, D O, N G, ſecetur, vel ſectum ſupponatur ſpatium D O per lineam S R reliquis, ſiue Aſymptoto A H parallelam, ita vt commenſurabiles ſint factæ partes D R, S O. Sit verbi gratia ſectum in duas partes æquales. Quo poſito, reliqua duo ſpatia C F, N G poterunt in duo æqualia ſpatia perinde ſecari; ita vt habeantur ſex ſpatia æqualia. Ac proinde lineæ ea ſpatia intercipientes, erunt continuè proportionales; in earúmque ſerie reperientur priores lineæ C E, D F, N O, B G

B G conſtitutæ. Eadem futura eſt ratio quomodocumque ſecetur ſpatium D O, vel aliud ex illis aliquod, modò ſint factæ partes tum inter ſe, tum toti ſpatio, quod diuiditur, commenſurabiles. Hoc enim caſu poſito ſpatia omnia & ſingula in partes æquales ſecare licebit per lineas Aſymptoto parallelas ope menſuræ communis; ſeriémque continuè proportionalium linearum conſtituere, in quâ omnes lineæ illæ, quibus ſpatia prima diuiſa continebantur, locum ſibi vindicabunt: illarúmque ſeries pars erit ſeriei de nouo conſtitutæ, vt aſſerit hæc Propoſitio.

Scholium.



Hîc duo obſeruatione maximè digna ſunt, vnum ad inſtitutum apprimè facit: alterum iucundum magis Lectori, quàm mihi neceſſarium ex occaſione attingam. Primum eſt. Duas hîc cõcurrere Progreſſiones quantitatum, genere quidem diuerſas, officium tamen inſigne ſibi mutuò præſtare ſolitas. Altera eſt Progreſſio Geometrica, Arithmetica altera. Geometrica, vt declaratum eſt, conſtituitur per lineas illas Aſymptoto alteri parallelas, quæ ſpatia hyperbolica æqualia intercludunt, vt ſunt lineæ C E, D F, N O, B G continuè proportionales. Arithmetica verò progreſſio fit per ſpatia ipſa hyperbolica, dum ſe æquali ſemper exceſſu ſuperant. Spatium enim D G, duplum eſt ſpatij N G; eiuſdem verò triplum eſt ſpatium C G: atque ita deinceps alia ſpatia ſequentia forent illius quadruplum, quintuplum, &c. prout lineæ ſpatia cum lineâ B G claudentes, ad ipſam B G rationem haberent quadruplicatam, quintuplicatam, &c. rationis lineæ N O ad B G, vt explicatum eſt.

Secundum, cuius memini, caput eſt. Si aliquod ſpatium, vt D O, per lineam S R reliquis parallelam diuidatur in partes commenſurabiles, vt D R, S O; progreſſio poterit inſtitui aliqua, in cuius ſerie repe-

rietur linea S R. Inuentâ enim duorum partialium ſpatiorum commenſurabilium D R, S O, menſurâ communi maximâ, vel etiam non maximâ iuxta methodum à R. P. Alphonſo de Saraſa traditam in Confirmationibus Quadrat. diuidi poterit per menſuram illam communem tam ſpatium D R, quàm ſpatium S O in partes tum inter ſe, tum partibus alterius ſpatij æquales; atque adeò ſpatium totum D O ita ſectum erit in partes æquales, vt recta S R, ſit vna aliqua linea earum per quas diuiditur. Sed factâ huiuſmodi diuiſione ſpatij D O; rectæ omnes lineæ diuidentes, quarum extremæ ſunt D F, N O, quædam autem intermedia eſt ipſa linea S R; ſunt omnes continuè proportionales: atque adeò Geometricam Progreſſionem conſtituunt per Prop. 12. huius. At verò, ſi recta S R, diuidat ſpatium D O in duo ſpatia D R, S O, incommenſurabilia; nullâ vnquam diuiſione diuidi poterit ſpatium D O in partes æquales, ita vt aliqua diuiſio præcisè cadat in rectam illam S R. Nec mirum; cùm alioqui ſequeretur contra ſuppoſitionem, ſpatia D R, S O eſſe commenſurabilia. Vnde præterea ſequitur eandem lineam S R; vel quamcunque aliam, quâ ſpatium D O in partes incommenſurabiles diuidatur, excludi ab omni prorſus Progreſſione Geometricâ: cuius termini primus & vltimus ſint duæ lineæ D F, N O ſpatium D O intercludentes.

Monitum.

Hæ ſunt ſpatiorum Hyperbolicorum præ cæteris inſignes facultates accuratè omnino à Summo Geometrâ earum primo obſeruatore expoſitæ Libro 7. Prop. 125. & aliquot aliis. Etſi enim alia quædam ad ea ſpatia pertinentia tum ab ipſo Authore, citato loco, tum à P. Alphonſo in Confirmationibus Quadrat. tum à P. Aynſcom in deductione Quadraturarum afferri videantur: ea tamen omnia ex eâ ſolâ conuenientiâ ſanè mirabili deducuntur; quæ inter ſpatia Hyperbolica, & lineas quibus ipſa abſcinduntur, intercedit: vt ſcilicet tam multiplex ſit ſpatium ſpatij alterius; quàm multiplicata eſt ratio linearum ſpatium illud claudentium, rationis linearum quibus hoc abſcinditur. Vnde præterea ſequatur duarum ſeſe comitantium Progreſſionum origo, Geometricæ & Arithmeticæ. Quæ cùm numerorum terminis aptiſſimè ſoleant explicari: non parum lucis ad obſcuriora illa Hyperbolæ arcana ex his ſpero acceſſurum, ſi apta fiat horum ad illa applicatio. Quod in ſequentibus præſtare conabor.

PROPO

PROPOSITIO XIV. *Problema.*

PRogreſſionem Geometricam vnà cum Arithmeticâ Progreſſione illius exponente componere.

Conſtructio.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	2.	4.	8.	16.	32.
0.	1.	2.	3.	4.	5.
G.	H.	K.	L.	M.	N.

Inſtituatur ſeries numerorum deinceps continuè ſecundùm quamcunque rationem, vt hîc duplam, proportionalium A, B, C, &c. huic ſubſcribatur ſeries numerorum communis 1, 2, 3, &c. ita tamen, vt termino primo A Progreſſionis Geometricæ reſpondeat nihili nota 0, ſiue zero; ſecundo verò termino B reſpondeat vnitas H; tertio binarius K, &c. Hæc ſeries G, H, K, &c. eſt Arithmetica Progreſſio vulgaris ſiue communis: cuius termini eodem exceſſu, qui eſt vnitas, ſeſe ſuperant. Quæ præ cæteris Progreſſionibus Arithmeticis (aliæ enim per alias differentias vnitate maiores, aut etiam minores, ſiue fractas inſtitui poſſent) Exponens Geometricæ Progreſſionis dici meritò conſueuit ob multiplex, quod erga illam munus exercet, vt mox expono. Hîc ambas illas Progreſſiones compoſuiſſe, earúmque terminos ſibi reſpondentes ſuo quemque loco aſſignaſſe ſufficiat. Quod faciendum proponebatur.

PROPOSITIO XV. *Problema.*

MVltiplex Arithmeticæ Progreſſionis vulgaris Progreſſioni Geometricæ, appoſitæ munus exponendum ſit.

Conſtructio & Demonſtratio.

Primum, quo numerorum vulgaris Progreſſio erga Geometricam Progreſſionem fungitur, munus eſt. Vt quilibet illius terminus cuilibet huius termino reſpondens definiat quot rationes à primo ad hunc vſque terminum conſtitutæ ſint. Vt, terminus K 3. demonſtrat à primo termino A vſque ad terminum D 8, reſpondentem termino K, reperiri tres rationes æquales: nempe A ad B, B ad C, & C ad D. Vel inuertendo, tres, D ad C, C ad B, & B ad A. Eodem modo terminus H, termino

H, termino B, appoſitus oſtendit vnicam eſſe rationem, ſcilicet B ad A, inter primum terminum A, & terminum ipſum AB. Primus verò terminus G (qui eſt o) reſpondens termino A, indicat nullam conſtitutam adhuc eſſe rationem.

A	B	C	D	E	F
1.	2.	4.	8.	16.	32.
0.	1.	2.	3.	4.	5.
G	H	L	K	M	N

Secundum munus ex præcedente naſcitur, eſt autem huiuſmodi. Terminus quilibet Arithmeticæ Progreſſionis declarat quoties ratio termini reſpondentis ad primum terminum, multiplicata ſit rationis illius, quam obſeruat Progreſſio Geometrica. Vt terminus K 3 adhærens termino D, demonſtrat rationem eiuſdem termini D, ad primum terminum A, (8 ad 1) triplicatam eſſe rationis B ad A, vel C ad B, &c. per quam extenditur Progreſſio Geometrica, quæ in hoc Paradigmate eſt ratio dupla. Eodem modo terminus H termino B affixus indicat rationem B ad A ſimplicem eſſe, nullóque modo multiplicatam; eò quòd nullus intercipiatur terminus inter B, & A, in Progreſſione Geometricâ. Nec verò termini Progreſſionis Arithmeticæ in eo tantùm caſu, cùm termini Progreſſionis Geometricæ ad primum eius terminum A referuntur, oſtendunt quoties ratio termini cuiuſcunque aſſumpti ad primum terminum A, multiplicata eſt rationis progreſſiuæ, per quam ſcilicet Progreſſio propagatur: ſed etiam, cùm terminus aſſumptus ad alium quemlibet à primo diuerſum comparatur. Ecce enim, ratio termini F ad terminum C, triplicata eſt rationis D ad C progreſſiuæ, per quam Progreſſio continuatur: quod ex eo innoteſcit, quòd terminus N 5 Progreſſionis Arithmeticæ, termino F 32 reſpondens, excedit terminum K 2, termino C 4 reſpondentem tribus vnitatibus, ſiue tribus differentiis, per quas Progreſſio extenditur; quibus differentiis tribus declaratur tres rationes progreſſiuas intercedere inter terminos rationis F ad C. Atque adeò rationem F ad C, componi ex tribus rationibus interpoſitis: quæ cùm ſint æquales inter ſe; ratio ex illis compoſita F ad C, erit vnius alicuius illarum triplicata, vt in Examine Quadraturæ Lib. 1. Prop. 24. & in Inſtitutionibus Arithmeticis Lib. 4. Prop. 19. vbi rationum compoſitio explicatur, oſtendi. Nec huius eſt obſcura ratio: quot enim differentiæ coaceruantur ad Progreſſionem Arithmeticam conſtruendam; tot termini ſtatuuntur in Progreſſione Geometricâ illis reſpondentes quorum ſinguli ad proximè poſitos referuntur; totidémque

rationes

rationes æquales conſtituunt. Vnde obiter obſerues quamcunque Arithmeticam Progreſſionem per aliam differentiam, quàm vnitatem, propagatam, eodem munere erga terminos Geometricæ Progreſſionis fungi poſſe: quot enim differentiæ coaceruabuntur ad terminos Arithmeticæ Progreſſionis conſtituendos; tot etiam coaceruabuntur rationes æquales in Progreſſione Geometricâ vſque ad terminum reſpondentem termino Progreſſionis Arithmeticæ ex differentiarum collectione genito. Quod etſi verum ſit, nec ad dicenda inutile futurum; nulla tamen ad hoc munus aptior eſt Arithmetica Progreſſio, quàm vulgaris; quæ per vnitatem extenditur. Ipſæ enim vnitates, quibus conſtant eius termini, produnt ſtatim per ſe quotus ſit in tali Progreſſione quilibet terminus: atque adeò in Geometricâ, quoties ratio termini reſpondentis ad primum terminum, multiplicatâ ſit rationis progreſſiuæ. Idémque compendium habetur, quando non primus terminus, ſed alius (vt obſeruatum eſt) ſtatuitur rationis multiplicatæ conſequens in Progreſſione Geometricâ. Vt in allato ſuperiùs exemplo, ratio termini F 32, ad terminum C 4, oſtenſa eſt triplicata rationis progreſſiuæ: quæ triplicatio ſtatim innoteſcit ope numeri 3, qui habetur ſubducto termino K 2, à termino N 5 Progreſſionis Arithmeticæ. Oſtendit enim tres rationes æquales inter terminos C & F intercedere, ſicut tres differentiæ (quæ ſunt tres vnitates) intercedunt in vulgari Arithmeticâ Progreſſione inter K 2 & N 5; qui reſpondent terminis C & F, eorúmque ſunt exponentes.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	2.	4.	8.	16.	32.
0.	1.	2.	3.	4.	5.
G.	H.	K.	L.	M.	N.

Tertium munus Arithmeticæ Progreſſionis erga eam ſolam Progreſſionem Geometricam exercetur, quæ ab vnitate initium ducit. Qualis eſt ſuperiùs allata, & hîc repetita. Eſt autem huiuſmodi. Si duo termini Progreſſionis dictæ Geometricæ in ſe ducantur, producent terminum quendam eiuſdem Progreſſionis, vt colligitur ex Prop. 11. Lib. 9. Eucl. cuius quotus ſit in eâ Progreſſione locus, innoteſcet, ſi duo termini Progreſſionis Arithmeticæ terminis illis in ſe ductis reſpondentes, ſimul addantur: factus enim numerus indicabit locum geniti ex multiplicatione termini, adeóque ipſius erit exponens in Arithmeticâ Progreſſione. Ecce. Ducis terminum C 4, in D 8; generas F 32; qui per citatam Prop. Elem. eſt quiſpiam terminus eiuſdem Progreſſionis Geometricæ. Quotus tandem? Adde ſimul terminos

E K 2

K 2 & L 3 Progreſſionis Arithmeticæ, qui reſpondent terminis C & D multiplicatis; fiet numerus N 5; qui oſtendit factum ex multiplicatione terminum F 32, quintum locum à primo A ſibi vendicare in Geometricâ Progreſſione; & (quod obſeruatione dignum eſt) tantùm diſtabit ab alterutro ſeſe multiplicantium terminorum) quantùm alter diſtat à primo termino A Progreſſionis. Diſtat enim terminus F 32 à termino D 8 multiplicato, vno gradu E intermedio: ſicut vno intermedio gradu B terminus multiplicans C diſtat à primo termino A. Vel F 32 diſtat duobus gradibus à termino C, ſicut alter terminus D diſtat duobus gradibus à primo termino A. Nec aliud continget ſi terminus quiſpiam in ſe ducatur. Ducatur enim terminus C 4 in ſe: fiet terminus E 16 in eadem ſerie; cuius locum demonſtrabit terminus M 4 progreſſionis Arithmeticæ, qui generatur per additionem termini K 2, termino C 4 in ſe ducto reſpondentis, ad ſeipſum. Huius porrò conuenientiæ inter terminos Geometricæ Progreſſionis multiplicatos, & additos Progreſſionis Arithmeticæ terminos, aperta eſt cauſa. Cùm in allato exemplo terminus C 4 multiplicauit D 8, & produxit F 32: Multiplicans C eandem habet rationem ad vnitatem (quæ ex ſuppoſitione eſt ipſe primus terminus A progreſſionis) quam terminus productus F habet ad terminum D 8 multiplicatum per Prop. 28. Lib. 1. Inſtitut. Arithm. Sed ratio C ad A componitur ex duabus rationibus æqualibus C ad B, & B ad A. Ergo etiam ratio F ad D componetur ex iiſdem rationibus: atque adeò, cùm terminus F per citatam Prop. 11. Lib. 9. Elem. reperiatur in ſerie Progreſſionis, duæ erunt rationes æquales, & inter ſe, & duabus rationibus C B, B A nter terminos F & D. Quod cùm ita ſit; cùm terminus K 2 Progreſſionis Arithmeticæ numeret rationes, quæ inter C & A intercedunt, vt ex dictis paulò antè conſtat; idem etiam terminus K numerabit rationes inter F & D intercedentes. Ergo ſi K 2 addatur ad terminum L 3, qui numerat rationes inter D, cui apponitur, & primum terminum A, fiet N 5; qui numerabit rationes, quæ intercedunt inter terminum F 32, & primum terminum A: atque ita terminus N 5, ex additione K 2 & L 3 conflatus, oſtendet quotus ſit terminus F 32 in ſerie terminorum Progreſſionem Geometricam ab vnitate inchoatam conſtituentium.

Cæterùm, vt proximè oſtenſum eſt additionem terminorum Progreſſionis Arithmeticæ comitari multiplicationem terminorum Geometricæ Progreſſionis: eodem modo oſtendi poteſt ſubtractionem illorum comitari horum diuiſionem. Diuide terminum F 32 per D 8; fiet;

fiet C 4, qui in ſerie Progreſſionis reperitur: eiúſque locus deſignabitur, ſi à termino N 5 dematur L 3, vt reliquus fiat K 2, qui debetur termino C 4 ex diuiſione genito. Quod patet per definitionem diuiſionis, quam Lib. 1. Prop. 40. Inſtitut. Arithm. expoſui. Ita enim eſt terminus diuiſus F ad diuidentem D, ſicut terminus C per diuiſionem genitus ad vnitatem A (quæ ex ſuppoſitione eſt primus Progreſſionis terminus.) Ratio ergo C ad A tot rationibus componitur; quot componitur ratio F ad D. Cùm ergo terminus N 5 numeret rationes inter F & A interceptas; numeret autem L interceptas inter D, & eandem vnitatem A: Si L 3 dematur à termino N 5; neceſſariò relinquetur numerus rationum inter F & D interceptarum; qui idem eſt, vt proximè dictum eſt, cum numero rationum, quæ inter C ex diuiſione genitum, & eandem vnitatem A reperiuntur. Rectè igitur terminus K, qui ſubducto L à termino N reliquus fit, determinat locum quem in Progreſſione Geometricâ occupare debet terminus C, qui ex diuiſione termini F per terminum D producitur.

A	B	C	D	E	F
1.	2.	4.	8.	16.	32.
0.	1.	2.	3.	4.	5.
G	H	K	L	M	N

Ex his, quæ proximè declarata ſunt ad mutuum illud officium tertium Progreſſionum Geometricæ & Arithmeticæ pertinentia, ſequitur euidenter terminum quemlibet Progreſſionis Arithmeticæ, alterius termini eiuſdem Progreſſionis tam eſſe multiplicem (ſi maior ad minorem comparetur) quàm eſt multiplicata ratio inter terminos Progreſſionis Geometricæ, terminis Arithmeticæ progreſſionis reſpondentes intercepta, ad rationem progreſſiuam, per quam progreſſio extenditur, vt terminus M duplex eſt termini K. Ratio ergo termini E ad C, duplicata eſt rationis progreſſiuæ, & ita de cæteris. Quod ipſum planiùs fortaſſe proponetur, ſi dicatur differentia, quâ duo quilibet termini Progreſſionis Arithmeticæ inter ſe diſcrepant, eſſe tam multiplex numeri progreſſiui; quàm rationis progreſſiuæ multiplicata eſt ratio terminorum Progreſſionis Geometricæ terminis Arithmeticæ reſpondentium. Sic vides rationem termini F 32 ad terminum C 4, triplicatam eſſe rationis progreſſiuæ; ſicut differentia 3, quæ inter terminos N 5 & K 2 reſpondentes terminis F & C intercedit, triplex eſt numeri per quem Arithmetica progreſſio extenditur, qui hîc eſt Vnitas. Sic etiam tam multiplicata eſt ratio termini F ad immediatum terminum E, rationis progreſſiuæ; quàm multiplex eſt differentia

Digitized by Google

inter reſpondentes terminos N & M, numeri progreſſiui: illa enim differentia eſt vnitas, ſicut & vnitas eſt numerus progreſſiuus: quo fit vt ratio F ad E ſit ſimplex, & non niſi impropriè multiplicata dicatur rationis progreſſiuæ; cùm ratio F ad E ei ſit æqualis.

Eſt & aliud quoddam officium, quod Arithmetica Progreſſio præſtat Geometricæ, cùm huius termini ſinguli denominatione quadam afficiuntur, à loco, quem in progreſſione occupant, petitâ: vt cùm eius quiſpiam terminus dicitur radix; alius, Quadratus; Cubus, alius; Quadrato-quadratus, Superſolidus, &c. quos exponunt termini Progreſſionis Arithmeticæ communium numerorum. Verùm hac noſtrâ in re locum non habet munus huiuſmodi; vt de eo nulla amplior facienda ſit mentio. Declarandum verò nunc demum eſt quàm aptè ſpatiis hyperbolicis conueniant tria illa Progreſſionis Arithmeticæ munera, quibus erga rationes Progreſſionis Geometricæ funguntur illius termini; vt tandem duplicis huius ope progreſſionis planior fiat, ac familiarior recondita illa hyperbolicorum tractatio ad Cyclometriæ huius diſcuſſionem neceſſaria. Sit itaque.

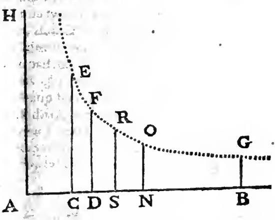
PROPOSITIO XVI. *Theorema.*

OMnimoda eſt ſpatiorum hyperbolicorum cum Progreſſione Geometricâ, & eius Exponente Arithmeticâ Symbolizatio.

Expoſitio & Demonſtratio.

Non aliâ meliùs probatione conſtare poteſt propoſitionis huius veritas, quàm eorum, quæ ſpatiis hyperbolicis, & vtrique dictæ progreſſioni conuenire ſuperiùs declaratum eſt, collatione. Ob oculos igitur repone Schema Propoſitione 10. delineatum ad ſpatia hyperbolica pertinens. Sed præter ea, quæ dictâ Prop. & ſequentibus declarata ſunt; qualia ſunt in primis, lineas C E, D F, N O, B G eſſe continuè proportionales, dum ſpatia C F, D O, N G ſupponuntur æqualia: moneo etiam lineas A B, A N, A D, A C eſſe proportionales continuè, quod eximius Geometra noſter citatis ſuprà propoſitionibus demonſtrat. Nec tantùm haſce lineas continuè eſſe proportionales oſtenditur; verùm etiam in eâdem ratione proportionales eſſe cum lineis C E, D F, N O, B G parallelis alteri Aſymptoto A H; Aſymptotum autem A B ſecantibus. Eſt enim rectangulum A B G, vt acutiſſimè ab eodem demonſtratur, æquale rectangulo A N O; aut etiam ſingulis

ſingulis ADF, ACE, cæteriſque quibuſcumque huiuſmodi. Ergo per Prop. 16. Lib. 6. Elem. ita eſt AB prima ad AN ſecundam; vt NO tertia ad BG quartam. His hîc annotatis, quæ ſuperiùs, cùm locus non exigeret, omiſſa fuerant; Congruentia illa & affinitas Spatiorum hyperbolicorum cum duplici progreſſione facilè declarabitur. Nam



A	B	C	D	E	F
1.	2.	4.	8.	16.	32.
0.	1.	2.	3.	4.	5.
G	H	L	K	M	N

Primò oſtenſũ eſt Prop. 12. poſitis ſpatiis CF, DO, NG æqualibus, lineas CE, DF, NO, BG, eſſe proportionales continuè; ſicut etiã proximè oſtenſum eſt continuè proportionales eſſe lineas AB, AN, AD AC, in eâdem ratione. Similiter in Progreſſione Arithmeticâ ex eo quòd differẽtia terminorũ N, M, L, K, H, G, (quæ eſt vnitas) æqualis ſemper eſt; ſequitur rationes F ad E, E ad D, &c. inter terminos Geometricæ Progreſſionis, eſſe æquales; atque adeò terminos illos, F, E, D &c. eſſe continuè proportionales.

Secundò. Quàm multiplex eſt ſpatium CG, ſpatij NG; tam multiplicata eſt ratio lineæ CE ad BG, rationis NO ad eandem BG, vt Prop. 11. declaratum eſt: ſicut enim triplex ponitur ſpatium CG ſpatij NG; ita etiam ratio lineæ CE ad lineam BG, triplicata eſt rationis lineæ NO ad eandem BG. Vel, ex paulò antè annotatis, ratio lineæ AB ad AC triplicata eſt rationis lineæ AN ad eandem AC: ſunt enim ambæ illæ linearum Progreſſiones Geometricæ, æqualis, vt dixi, rationis progreſſiuæ. At ſimiliter in Progreſſione Arithmeticâ; quia verbi gratiâ, terminus L 3 tres continet differentias terminorum, ſiue tres numeros progreſſiuos (qui in hoc Paradigmate ſunt tres vnitates) demonſtrat rationem D 8 ad A 1 eſſe tripli-

Digitized by Google

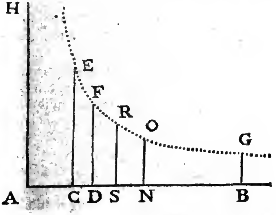
catam rationis progreſſiuæ, per quam extenditur progreſſio, qualis eſt ratio B 2 ad A 1, vel C ad B, aut alia quælibet, cùm ſint omnes æquales. Atque hoc eſt munus illud Arithmeticæ Progreſſionis erga Progreſſionem Geometricam, quod Propoſitione 15. ſecundo loco explicatum eſt. Vnde etiam conſtat rationem F 32 ad C 4 eſſe eodem modo triplicatam rationis D ad C, eò quòd terminus N 5 tribus differentiis (quæ hîc ſunt vnitates) excedat terminum K 2 reſpondentem termino C Progreſſionis Geometricæ. Idem de duplicata ratione, quadruplicata, &c. dicendum eſt.

Tertiò declaratum eſt Prop. 15. tertium, illudque ſingulare munus, quod Arithmetica progreſſio erga Geometricam ab vnitate inchoatam exercet, in eo ſitum eſſe: vt multiplicatis duobus quibuſlibet Geometricæ Progreſſionis terminis (ex quâ multiplicatione terminus gignitur in eadem ſerie reponendus per Prop. 11. Lib. 9. Elem.) locus deſignetur geniti termini in eâdem Progreſſione Geometricâ: dum duo termini Arithmeticæ Progreſſionis duobus terminis Geometricæ multiplicatis reſpondentes, ſimul addantur. Vel contrà. Si terminus Geometricæ Progreſſionis per alium diuidatur (quâ diuiſione naſcitur terminus quiſpiam eiuſdem progreſſionis) locus innoteſcat ei debitus, ſi terminus Progreſſionis Arithmeticæ termino diuidenti Progreſſionis Geometricæ reſpondens, ſubducatur à termino, qui multiplicato reſpondet. Ita vt verum ſemper ſit, quod vulgò aſſeritur; Additio Progreſſionis Arithmeticæ reſpondet multiplicationi Progreſſionis Geometricæ, & ſubtractio diuiſioni. Vt ſi C 2 multiplicet D 8 fit F 32; cuius locus N 5 habetur additis terminis K 2 & L 3. Similiter, diuiſo termino F 32 per D 8 naſcitur C 4; cuius locus in eâdem ſerie determinatur ſubducto L 3 à termino N 5, vt fiat K 2. At in hoc ipſo mira eſt harum duarum progreſſionum continuæ quantitatis, cum iiſdem ad diſcretam pertinentibus conſenſio; ſi modò rectè concipiatur methodus, quâ hæc multiplicatio & diuiſio fieri debet. Quæ vt fiat euidentior, præter hactenus obſeruata hæc inſuper attende.

Cùm terminus quiſpiam Geometricæ Progreſſionis alterum multiplicat; vt cùm B 2 multiplicat C 4, & producitur D 8: cenſenda eſt ratio B ad A vnitatem, multiplicare rationem C ad A, gignéreque rationem D ad A, vt ex Prop. 24. Lib. 1. Exam. conſtat: atque ita terminus L 3 progreſſionis Arithmeticæ, qui coaleſcit ex additione terminorum H & K demonſtrat non tantùm quem locum in ſerie occupet terminus D; ſed etiam quoties ratio D ad A multiplicet rationem progreſſiuam B ad A, vel C ad B &c. vt hîc eam triplicare declarat.

Pari

Pari omnino modo, cùm in Progreſſione Geometricâ quam conſtituunt lineæ C E, D F, N O, B G terminus N O multiplicat alterum terminum, verbi gratia D F; cenſenda eſt ratio N O ad B G multiplicare rationem D F ad B G. Quæ multiplicatio, vt ſtatim aperiam, abſoluitur; ſi fiat vt rationis N O ad B G multiplicantis conſequens B G, ad Antecedētem N O; Ita rationis D F, ad B G multiplicatæ Antecedens D F ad alium terminum, vt C E: qui ſtatuatur Antecedens rationis per multiplicationem productæ; cuius conſequens ſit rationum multiplicatarũ conſequens B G. Quod ſi ita ſe habet (vt ſe verè habet) harum duarum rationum N O ad B G,



A	B	C	D	E	F
1.	2.	4.	8.	16.	32.
0.	1.	2.	3.	4.	5.
G	H	L	K	M	N

& D F ad B G multiplicatio: nunquid manifeſtiſsimum eſt, addito ſpatio N G (quod termini N O, & B G rationis multiplicantis intercipiunt) ad ſpatium D G terminis D F, B G rationis multiplicatæ interceptum, conſtitui ſpatium C G ad rationem C E ad B G per multiplicationem productam pertinens; eóque ſpatio C G, quod triplex eſt ſpatij N G, determinari locum, quem occupat in ſerie progreſſionis terminus C E, nempe tertium à termino N O; & ſimul definiri quoties ratio C G multiplicata ſit rationis progreſſiuæ N O ad B G, eſſe nimirum triplicatam. Quòd ſi ratio D F ad B G ſupponeretur eſſe multiplicans, ratio verò N O ad B G multiplicata: eadem ratio E C ad B G iuxta traditam multiplicationis methodum produceretur; idémque ſpatium C G ex ſpatiis ad rationes ſeſe multiplicantes pertinentibus ſimul additis conflaretur. Fieret enim vt B G conſequens rationis D F ad B G multiplicantis ad ipſius Antecedentem

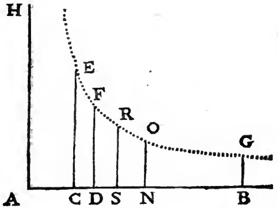
dem DF; ita NO Antecedens rationis NO ad BG multiplicatæ ad CE, qui ſtatuatur Antecedens rationis CE ad BG per multiplicationem productæ: addito autem ſpatio DG ad ſpatium NG, conflatur ſpatium CG (duo ſiquidem ſpatia DG, & CO non poſſunt non eſſe æqualia per Prop.12. cùm, ita ſit ex conſtructione CE ad NO, vt DF eſt ad BG) quo, vt prius, definitur tam locus termini CE in ſerie Progreſſionis, quàm quoties ratio CE ad BG multiplicet rationem NO ad BG progreſsiuam, aut DF ad NO, aut aliam quamlibet terminis immediatis conſtitutam. Quæ omnia, vt perſpicis, apprimè conueniunt cum omnibus, quæ progreſsioni numerorum duplici, Geometricæ videlicet, & Arithmeticæ conuenire declarata ſunt.

Reſtat, vt demonſtretur rationem CE ad BG eo, quo traditum eſt, modo determinatam, eam eſſe, quæ per multiplicationem duarum rationum DF ad BG, & NO ad BG producitur: vt paulò antè, me demonſtraturum ſpopondi. Itaque, cùm ex conſtructione, vt eſt conſequens BG rationis multiplicantis NO ad BG, ad ſuum Antecedentem NO; ita ſit rationis DF ad BG multiplicatæ Antecedens DF ad terminum CE: erit ratio CE ad DF, æqualis rationi NO ad BG. Ergo ratio CE ad BG componitur ex duabus rationibus ſeſe multiplicantibus CE ad DF (ſiue NO ad BG) & DF ad BG: quæ eſt vera rationum multiplicatio, vt conſtat ex iis quæ Lib.1. Exam. Quadrat. Prop.13. & Lib.4. Prop. 17. Inſtitut. Arithm. docui. Nec alia foret demonſtratio, ſi ratio DF ad BG, ſtatueretur multiplicans, ratio verò NO ad BG, multiplicata, & fieret, vt BG conſequens rationis DF ad BG multiplicantis ad ſuum Antecedentem DF; ita NO Antecedens rationis NO ad BG multiplicatæ ad CE. Rurſus enim foret ratio CE ad BG compoſita ex rationibus CE ad NO (ſiue DF ad BG) & NO ad BG; quæ erant mutuò multiplicandæ.

Atque eadem hæc demonſtratio rationum multiplicationi diſcretæ quantitatis perbellè conuenit: vt videas nec hanc ſymbolizationem deſiderari inter ſpatia hyperbolica, & Progreſsiones numerorum Geometricas cum ſuis Exponentibus Progreſsionibus Arithmeticis coniunctas. Si enim in ſchemate ſuperiori duæ rationes B ad A & C ad A multiplicandæ ſint; ſi fiat, vt multiplicantis B ad A, conſequens A ad Antecedentem B; ita multiplicatæ C ad A Antecedens C, ad terminum D: fiet ratio D ad A, quæ producitur per multiplicationem datarum rationum. Ratio enim D ad A componitur ex rationibus D ad C (ſiue B ad A) & C ad A: quæ compoſitio rationum duarum B ad A, & C ad A, vera eſt multiplicatio, vt ex citatis paulò antè

locis

locis conſtat. Idem verò terminus D obtineretur etiam, ſi fieret vt rationis C A conſequens A ad ſuum Antecedentem C; ita alterius rationis B A, Antecedens B ad terminum D. Rurſus enim ratio D ad A componeretur ex rationibus multiplicatis D ad B (ſiue C ad A) & B ad A. Quem autem locum in ſerie progreſsionis Geometricæ obtineat terminus D, demonſtrat additio duorum terminorum H & K, reſpondentium terminis B & C Progreſsionis Geometricæ. Fit enim ex illa additione terminus L 3; quo ſignificatur & terminum D tertium eſſe à primo A, & rationem D ad A eſſe triplicatam rationis progreſſiuæ B ad A.



A	B	C	D	E	F
1.	2.	4.	8.	16.	32.
0.	1.	2.	3.	4.	5.
G	H	L	K	M	N

Porrò iuuerit obſeruaſſe doctiſſimũ Cyclometriæ Authorem Prop. 125. & aliis aliquot, rationẽ C E ad B G aſſerere multiplicatã eſſe rationis D F ad B G; quod multiplicationi propriè dictę minimè cõuenit: hęc enim requirit, vt ratio, quæ alterius dicitur multiplicata, alterã aliquoties prȩcisè per multiplicationem contineat, vt dici poſſit illius duplicata, triplicata, &c. At ratio C E ad B G rationis D F ad B G non poteſt eſſe duplicata, multóque minùs triplicata: foret enim ſpatium C G duplex ſpatij D G, quod eſt cõtra ſuppoſitionem; cùm ſit eius tantùm ſeſqui-alterum. Vult ergo citatus Author rationem C E ad B G, rationis D F ad B G tantùm eſſe compoſitam. Eodem modo, cùm ait ſpatium C G multiplex eſſe ſpatij D G; haud quaquam de multiplicitate propriè dictâ, quæ ſpatium in altero aliquoties præcisè contineri deſiderat, intelligi poteſt: ſed de alia multiplicate impropriâ, quæ impropriæ rationum multiplicationi reſpondet.

Digitized by Google

Declaratum eſt hactenus, quomodo in ſpatiis hyperbolicis additio ſpatiorum hyperbolicorum reſpondeat multiplicationi rationum, quas obſeruant lineæ parallelæ ſpatia illa abſcindentes: quemadmodum in quantitatis diſcretæ Progreſſione Geometricâ multiplicationi eius terminorum, vel rationum reſpondet Additio terminorum Progreſſionis Arithmeticæ Geometricam exponentis. Nunc vt omnimoda illa ſymbolizatio ſpatiorum hyperbolicorum cum dictis Progreſſionibus oſtendatur: declarandum reſtat quomodo in ſpatiis hyperbolicis, rationum diuiſioni reſpondeat ſubtractio ſpatiorum; non ſecùs quàm in Progreſſionibus contingit. Quod paucis abſolui poteſt ex dictis de multiplicatione & additione; cùm diuiſio & ſubtractio, operationes tantùm ſint earum inuerſæ. In eodem itaque ſchemate diuidenda ſit ratio lineæ C E ad B G per rationem lineæ N O ad eandem B G fiat vt antecedens N O rationis diuidentis ad eiuſdem rationis conſequentem B G: ita antecedens C E rationis diuidendæ C E ad B G ad lineam D F. Erit ratio D F ad B G, ea quæ ex diuiſione naſcitur: illiúſque tam multiplicata erit ratio diuidenda C E ad B G; quàm eſt multiplex ſpatium C G ſpatij D G: atque adeò dempto ſpatio C F ex toto ſpatio C G, reliquum fit ſpatium D G lineis D F, B G, quarum ratio per diuiſionem genita eſt, interceptum: eóque determinatur locus lineæ D F in ſerie linearum continuè proportionalium C E, D F, N O, B G. Similiter, ſi eadem ratio C E ad B G diuideretur per rationem D F ad B G: fieret vt D F ad B G; ita C E ad N O; ratióque N O ad B G per diuiſionem produceretur; & ſpatio D G dempto ex ſpatio toto C G, remaneret ſpatium N G (ſunt enim ſpatia D G, & C O, ſicut etiam N G, & C F æqualia ex ſuppoſitâ conſtructione). Quòd autem ratio D F ad B G naſcatur ex diuiſione rationis C E ad B G per rationem N O ad B G; vel ratio N O ad B G, ex diuiſione eiuſdem rationis C E ad B G per rationem D F ad B G: vel ex eo patet, quòd oppoſita & inuerſa operatio multiplicationis adhibeatur: ſoluit enim diuiſio, quod multiplicatio componit: idémque probari poteſt ex prop. 14. lib. 1. Exam. quadrat. vel Prop. 29. lib. 4. Inſt. Arithm. Quàm verò hæc conſona ſint diuiſioni & ſubtractioni terminorum progreſſionis geometricæ, eiúſque Exponentis Arithmeticæ, conſtat: ſi enim in ſæpius rèpetito paradigmate diuidatur terminus D per terminum C, vel potiùs ratio D A per rationem C A; gignetur ratio B A: Quòd ſi à termino L progreſſionis Arithmeticæ, qui reſpondet termino D progreſſionis geometricæ diuiſo, dematur terminus K reſpondens termino C diuidenti; relinquetur terminus

H,

H, qui reſpondet termino B per diuiſionem genito. An non igitur apparet euidentiſſimè quoad hoc etiam caput omnimoda ſymbolizatio inter progreſſionem numerorum geometricam, eiúſque exponentem progreſſionem Arithmeticam; & rationes linearum Aſymptoto parallelarum, ſpatiáque hyperbolica ab eiſdem lineis intercepta? Sed de hac ſymbolizatione ſatis; quæ eo nomine facienda eſt plurimi, quòd eius ope ad numeros per ſe apertos & euidentes transferri poſſint quæcunque de hyperbolicis ſpatiis abſtruſiſſimis, in quibus latet. Quadraturæ huius fundamentum, traduntur tum ab ipſo cyclometriæ Authore, tum ab eius interpretibus & fautoribus.

PROPOSITIO XVII. *Theorema.*

SI duarum, vel plurium progreſſionum Arithmeticarum homologi termini addantur, dico ex ea Additione naſci Arithmeticam progreſſionem.

Expoſitio & Demonſtratio.

A	B	C	D	P
1.	2.	3.	4.	1
5.	7.	9.	11.	2
E	F	G	H	R
K	L	M	N	S
6.	9.	12.	15.	3

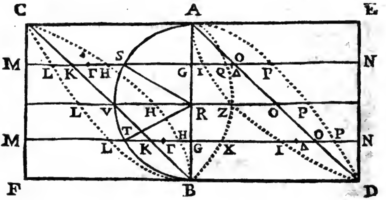
Sint progreſſiones duæ Arithmeticæ A,B, C,D: E,F,G,H; ſiue idem ſit exceſſus: quo vtriuſque termini differũt; ſiue diuerſus Homologíque termini ſimul addãtur; vt fiat ſeries numerorum K,L,M,N; oſtendẽdum eſt hanc ſeriem eſſe Arithmeticam progreſſionem. Id demonſtrauit R.P.Greg.lib.de Progreſſ.Prop.19.in Quantitate continuâ, quod eodem ferè modo in diſcretâ declarabitur. Sit P 1, differentia terminorum primæ progreſſionis: at R 2, differentia terminorum progreſſionis ſecundæ E, F, &c. Quæ ambæ differentiæ ſimul additæ producant S 3. oſtendo hanc eſſe differentiam vnicam, quâ numeri K, L, &c. inter ſe diſcrepant; adeóque hoſce numeros conſtituere Arithmeticam progreſſionem. Quod patet: Nam partes B, F, ſimul ſumptæ eodem exceſſu differunt à partibus A, E, ſimul ſumptis, hoc eſt L à K; quo ſigillatim ſumptæ: partes enim omnes ſimul ſumptæ toti ſunt æquales. Ergo L ſuperat K exceſſu P 1, & exceſſu R 2, hoc eſt exceſſu S 3. Similiter, oſtẽdetur M 12 excedere terminum L 9. eodem exceſſu S 3. & ſic de cæteris terminis. Quare ſeries numerorũ K,L &c. eſt progreſſio Arithmetica. Quod erat oſtendendũ.

Digitized by Google

PROPOSITIO XVIII. *Problema.*

FIguram deſignemus omnia primæ Quadraturæ ab eius Authore expoſitæ fundamenta continentem.

Expoſitio.



Quemadmodum cenſeres alienum, mi Lector; ſi omnia, quæ ad huius Quadraturæ declarationem, vel ab eius Authore pererudito, vel etiam à me in eiuſdem Quadraturæ Examine allata ſunt, hîc repeterem: ita, opinor, moleſtè ferres; ſi ea omitterem, quæ ad percipienda, quæ agitantur, neceſſaria ſunt. Quid enim vtilitatis, quid voluptatis ex illius diſputationis contemplatione hauriatur: cuius fundamenta, capitáque præcipua minimè præſtò ſint; aliíſque ex operibus vel careas, vel quæ ægrè conſulas, ſint repetenda? Quod ne incurratur incommodum; meáque hæc exercitatio ab omnibus ſit parata, quibus ipſa ſibi conſtet: ſequentibus aliquot propoſitionibus, vel ex libro 10. Oper. Geom. vel ex Examine meo Quadraturæ deſumptis, viam parabo ad totius controuerſiæ tum ſtatum tum compoſitionem percipiendum: breuitatis tamen memor à prolixioribus demonſtrationibus, quæ locis proximè citatis habentur, abſtinebo. Hic igitur primùm ſchema deſigno, vnicum ferè deinceps vſurpandum. Quod ita habet.

Duobus deſcriptis Quadratis æqualibus A F, A D latere communi A B commiſſis; quatuor ſemi-parabolæ intra ipſa deſcribantur: quarum

quarum binæ ſibi obuerſæ verticem habeant ad A; ſeſéque in D interſecent: binæ item ſibi obuerſæ verticem ad B conſtituant, rurſúſque ad punctum C puncto B è diametro oppoſitum concurrant. Duæ priores ſunt A P D, A I D: duæ poſteriores ſunt B L C, B H C. Parabolæ A P D axis eſt ipſum Quadratorum commune latus A B; idémque axis eſt alterius Parabolæ B L C priori A P D ſubcontrariè poſitæ. Axis verò Parabolæ A I D eſt A E: at axis Parabolæ B H C, quæ Parabolæ A I D ſubcontrariè ponitur, eſt B F. Ex eo demum quòd binæ Parabolæ in A & D, binæ item in B & C concurrant; & duarum ſubcontrariè poſitarum axis ſit A B; aliarum autem axes ſint duo Quadratorum latera A E, B F: ſequitur eas omnes Parabolas æquales eſſe, earúmque latera recta, eſſe æqualia inter ſe; æqualia verò Quadratorum lateri A B, vel alij cuilibet laterum. Quod oſtendo.

Ductis Quadratorum diametris A O D, B K C; cum Angulus B A D ad Axem A B, verticémque A, Parabolæ A P D conſtitutus, ſit ſemi-rectus: recta A D Parabolam A P D ſecans in D, vnde ducitur ad Axem ordinatim applicata D B; latus rectum deſignat æquale tam applicatæ B D, quàm abſciſſæ axis parti B A, vt Lib. 3. Prop. 3. Exam. Quadrat; docui. Eodem modo oſtendam Latus rectum Parabolæ B L C eſſe æquale Axi B A: eodem etiam Latus rectum Parabolæ A I D eius Axi A E abſciſſo ab Applicatâ D E; & Parabolæ B H C, abſciſſo Axi B F ab Applicatâ C F; eſſe æquale. Eſt enim Angulus E A D, ſicut & Angulus F B C, ſemi-rectus ad verticem, & ad Axem A F, B F conſtitutus: & ad Axem à punctis D & C, in quibus ſecantur Parabolæ à lineis A D, B C; ductæ applicatæ D E, C F. Poſito demum recto Latere Parabolarum A B; earúmque Axibus conſtitutis: Parabolæ ipſæ eo ſitu, qui aſſignatus eſt, intra Quadrata illa duo facilè deſcribi poterunt aliquo eorum modo qui plurimi habentur Libro de Parabolâ in Opere Geom. vel quos tradidi in Iſagoge ad Conica Prop. 41. Atque hæc eſt partium Schematis ſæpius deinceps memorandi præcipuarum deſignatio reliquæ, quæ in eo cernuntur, lineæ, ſuo quæque loco & tempore adhibebuntur.

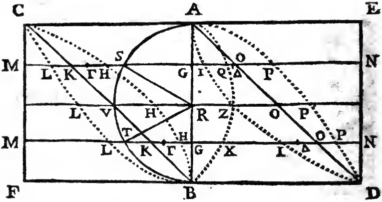
Digitized by Google

PROPOSITIO XIX. *Theorema.*

IN Schemate proximè conſtituto ducatur recta quælibet M G N ad Axem A B perpendicularis in G : quæ Parabolas quarum vertex eſt B, ſecet in L & H ; Parabolas vero, quarum vertex eſt A, ſecet in I & P : Latera demum Quadratorum in M & N, eorúmque diametros in K & O.

Dico tam tres lineas G M, G K, G H; quàm tres G M, G L, G K eſſe continuè proportionales. Item in altero Quadrato tam tres G N, G O, G I ; quàm tres G N, G P, G O continuè etiam proportionales eſſe.

Demonſtratio.



Quòd tres G M, G K, G H ; & tres G N, G O, G I ; (quando ſecantur Parabolæ A I D, B H C, quarum Axes ſunt A E & B F) ſint continuè proportionales, aſſerit Cyclometra Prop. 26. Lib. 10. Oper. Geom. Propoſitione verò ſequenti 27. idem aſſerit de lineis G M, G L, G K ; & G N, G P, G O, dum ſecantur Parabolæ A P D, B L C ; quarum Axis eſt A B. Vtriuſque porrò Aſſertionis probationem ex Libro de Parabolâ repetendam ait, illius quidem Prop. 67. huius autem Prop. 42. quam tu conſule ibidem ; ne hinc, ſi eam adduxero, longiùs abire cogar. Ad Inſtitutum ſatis eſt hanc inter ternas & ternas illas lineas continuam Analogiam rectè concepiſſe.

Corollarium.

Corollarium.

In eodem Schemate. Si inter G K, G H media proportionalis ſtatuatur G Γ; & inter G O, G I media G Δ.

Dico tam quinque lineas G M, G L, G K, G Γ, G H; quàm quinque G N, G P, G O, G Δ, G I eſſe continuè proportionales.

Demonſtratio.

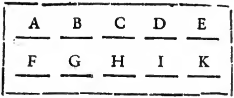
Linea G K per Propoſitionem Antecedentem eſt media proportionalis inter G M & G H: Eſt autem per eandem Prop. G L media proportionalis inter G M & G K. Ergo ratio G M ad G K in duas rationes æquales diuiditur per lineam G L, Sed ratio G K ad G H, quæ æqualis eſt rationi G M ad G K, diuiditur etiam in duas æquales rationes per lineam G Γ mediam proportionalem inter G K, G H conſtitutam. Ergo æquales ſunt rationes G K ad & G Γ & G Γ ad G H, rationibus G M ad G L, & G L ad G K. Ergo continuè proportionales ſunt dictæ lineæ, G M, G L, G K, G Γ, G H. Eodem modo probabuntur quinque lineæ G N, G P, G O, G Δ, G I in continuâ eſſe Analogiâ. Si igitur inter G K, G H &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX. *Theorema.*

Sint duæ ſeries quotcunque linearum continuè proportionalium; licèt vtriuſque ſeriei ratio ſit ſpecie diuerſa.

Dico rectangula homologis duabus lineis comprehenſa, eſſe etiam continuè proportionalia.

Demonſtratio.



Sint duæ ſeries quinque linearum, verbi gratiâ, continuè proportionalium A, B, C, D, E; & F, G, H, I, K, licèt hæ rationem obſeruent ab illarum ratione diuerſam. Probanda ſunt rectangula lineis homologis A & F, B & G, &c. comprehenſa, eſſe etiam continuè proportionalia. Hanc proponit & demõſtrat Geometra Libro de Progreſſ. Prop. 58. de duplici ſerie trium linearum proportionalium: ſed eius demonſtratio ad quotcunque lineas extendi poteſt. Eſt autem eiuſmodi. Ratio rectanguli A, F ad rectangulum

B, G

Digitized by Google

B, G per Prop. 23. Lib. 6. Elem. componitur ex ratione A ad B, & ratione F ad G: ratio autem rectanguli B G ad rectangulum C H componitur ex ratione B ad C, & G ad H; quæ æquales ſunt rationibus A ad B, & F ad G. Ergo ratio rectanguli B, G ad rectangulum C, H, æqualis eſt rationi rectanguli A, F, ad rectangulum B, G, rationes ſiquidem ex eiſdem rationibus compoſitæ, ſunt æquales. Eodem modo oſtendetur ratio rectanguli C, H, ad rectangulum D, I, componi ex iiſdem rationibus, ex quibus componitur ratio rectanguli B, G ad rectangulum C, H; atque æqualis eſſe rationi ipſius rectanguli B G ad rectangulum C H: & ita deinceps quotquot extiterint termini, oſtendetur ratio rectangulorum terminis homologis contentorum, eſſe ſemper æqualis, hoc eſt, rectangula huiuſmodi erunt continuè proportionalia. Quod erat probandum.

Corollarium.

Cùm ergo in ſchemate ſuperiori tam quinque lineæ G M, G L, G K, G Γ, G H; quàm quinque G N, G P, G O, G Δ, G I ſint continuè proportionales, vt dictum eſt: erunt etiam quinque rectangula lineis homologis comprehenſa continuè proportionalia per hanc Propoſitionem; rectangula ſcilicet M G N, L G P, K G O, Γ G Δ, H G I. Quod cùm ita ſit, quæcunque ducatur linea M G N, & quouis in puncto G, Axem ſecet: hinc vlteriùs ſtabilitur ſequens Propoſitio.

PROPOSITIO XXI. *Thorema.*

IN eodem ſchemate, alterâ quacunque lineâ M G N à priore diuerſá ad axem perpendiculariter ductâ: quæ vt prior, diuidatur tam ad læuam axis verſùs M; quàm ad dextram verſùs N, in quinque lineas proportionales continuè ab eiſdem tam curuis quàm rectis lineis: fient etiam in eâ, vt in priore, rectangula quinque proportionalia continuè M G N, L G P, &c. Id ſtabilium eſt. Verùm hoc poſito.

Dico rectangulum K G O ad alterum rectangulum K G O, rationem habere duplicatam rationis; quam habet rectangulum L G P ad alterum rectangulum L G P: eiuſdem verò rationis L G P ad L G P, triplicata erit ratio rectanguli Γ G Δ ad alterum rectangulum Γ G Δ. Ac denique, eiuſdem rationis

rationis L G P ad L G P, Quadruplicata erit ratio rectanguli H G I ad alterum rectangulum H G I.

Demonſtratio.

Cùm quinque ſint continuè proportionalia rectangula tam priora M G N, L G P, K G O, r G Δ, H G I; quàm poſteriora quinque eiuſdem nominis & ordinis; ſint verò etiam duo prima rectangula M G N, vnde ſumit initium vtraque ſeries rectangulorum, æqualia: hinc ſequitur per Prop. 27. Libri de Progreſſ. veram eſſe hanc Propoſitionem. Duo ſcilicet rectangula K G O, tertiaà duobus primis M G N; habent rationem duplicatam rationis duorum rectangulorum L G P ſecundorum ab iiſdem primis M G N tum proximè ſequentia duo r G Δ, triplicatam. Ac denique duo H G I, eiuſdem L G P ad L G P, quadruplicatam. Conſtat ergo veritas Propoſitionis.

Corollarium.

Ex eodem fundamento, cui Theorema proximum nititur, quod eſt citata Propoſitio 27. de Progreſſionibus; ſequitur etiam rectangulum H G I ad alterum rectangulum H G I, habere rationem duplicatam rationis, quam habet rectangulum K G O ad alterum rectangulum K G O. Sunt enim in vtrâque linea M G N, tam tres lineæ M G, K G, H G; quàm tres N G, O G, I G, proportionales continuè. Ergo etiam per Propoſ. 20. proportionalia ſunt continuè tria rectangula M G N, K G O, H G I. Cùm ergò duo prima rectangula vtriuſque lineæ M G N (nempe rectangula M G N) ſint æqualia; duo rectangula H G I habebunt per citatam Propoſitionem 27. Progreſſ. rationem duplicatam rationis, quam habent duo rectangula K G O ſecunda, ſiue primis proxima. Quod etiam ex eo manifeſtum eſt, quòd ratio rectangulorum duorum H G I oſtenſa ſit quadruplicata rationi duorum rectangulorum L G P: quorum rationis duplicata eſt ratio rectangulorum duorum K G O.

PROPOSITIO XXII. *Theorema.*

SI lineæ omnes M G N, per omnia Axeos A B puncta G duci concipiantur: rectangula illa quinque continuè proportionalia per Prop. 20. quæ in ſingulis lineis M G N, conſtituuntur; ſolida quinque efformant: quæ ex quinque ſu-

perficiebus ad Axem A B terminatis in alias quinque ſuperficies ad eundem Axem terminatas ductis generantur.

Expoſitio & Demonſtratio.

Hæc Propoſitio ſolâ eget expoſitione, vt eius veritas pateat euidenter ſuppoſitâ igitur ductûs plani in planum naturâ & definitione; quam egregiè ſuo more expoſuit, & ad varias Geometricas ſpeculationes ſubtiliſſimas adhibuit Quadraturæ Author: & ipſe, quantum ſatis erat, declaraui in Examine Quadrat. Lib. 2. Prop. 12. Suppoſito, inquam, quòd planum in alterum planum eidem communi termino adhærens duci dicatur: cùm omnes illius lineæ per omnia termini communis puncta ductæ per totidem lineas alterius plani fluere concipiuntur quoquo modo ſublimes eodem per motum ſemper ſeruato ſitu: Theorema hoc oculis ipſis intuendum propono.

Primò itaque, ſi concipiatur linea vna aliqua G M erigi perpendiculariter in G, eóque ſeruato ſitu per lineam G N in plano Quadrato A D iacentem fluere donec ad vltimum eius punctum N peruenerit, haud dubiè rectangulum M G N, & quidem quadratum deſcripſerit. Quod ſi eodem modo lineæ omnes G M per omnia puncta Axis A B ductæ (quibus duæ lineæ extremæ, A C, B F per extrema puncta A & B tranſeuntes debent annumerari) per omnes lineas G N fluant: omnia Quadrata plana deſcribent; quibus ſolidum ex ductu plani Quadrati A F in planum quadratum A D genitum conſtat; ſolidúmque ipſum (quod Cubus eſt) conſtituere concipientur: non quòd quadratis illis planis indiuiſibilibus ſolis ſolidum conſtari poſſit, vt aliqui contra ſaniorem Philoſophiam ſibi perſuadent: ſed ita dicitur ex illis confici, quemadmodum dici ſolet planum, verbi gratiâ, A F conſtare lineis rectis parallelis G M per omnia puncta rectæ lineæ A B ductis; & recta ipſa A B conſtare punctis omnibus ſuis; non quòd ſola Indiuiſibilia ſine partibus quantitatis interpolatis illam componant; ſed quia nihil niſi punctum Indiuiſibile in eâ poſſit ſigillatim aſſignari & determinari, non autem pars aliqua certa, quæ alias plures infinitas non contineat, & ex quibus non componatur. Ita igitur Solidum ex Quadrato A F in Quadratum A D ducto genitum, dicitur conſtare Quadratis infinitis, qua ſingulæ lineæ G M in G N ductæ efformant, vt partes etiam quantitatis licèt indeterminatè mediæ inter Quadrata ſingula intercipiantur. Sed de

his

his fuſiùs differendi non eſt locus cùm hîc ſufficiat Solidorum, de quibus agitur, generationem per ductum linearum, omiſſis partibus, rectè concipere. Atque hoc Solidum eſt primum illorum quinque, quæ hîc veniunt attendenda.

Secundum Solidum eſt, quod conſtat rectangulis L G P, ductis enim lineis omnibus G L in lineas omnes G P ſingulis in ſingulas, fiunt rectangula: quibus conſtare dici debet Solidum ex ſuperficie Parabolicâ A B L C in Parabolicam alteram ſuperficiem B A P D ſub-alternè poſitam ductâ conſtitutum. Quod non aliâ eget expoſitione, quàm eâ, quæ proximè allata eſt ad Solidi primi generationem concipiendam.

Tertium Solidum fit ex rectangulis K G O: quæ, ſi omnia ſumantur, efformant Solidum, quod ex Triangulo B A C in Triangulum A B D ſub-alternum ducto conſtituitur. Patet ex dictis, Corporis illius procreatio.

Quartum Solidum conflatur ex rectangulis r G Δ: quorum latus vnum r G eſt media proportionalis inter duas G K & G H: alterum G Δ eſt media item proportionalis inter duas G O, G I. Cæterùm Solidum huiuſmodi, irregulari quadam ſuperficie circunſcriptâ lineis rectis A B, A C; reliquæ, quæ ducuntur; & curuâ, quæ per puncta r in ſingulis lineis G M inuenta agitur ducta; in alterã item irregularem ſuperficiem ſub-alternam; quam cum lineis rectis B A, B D; curua per Δ tranſiens continet, generatur. Quod quidem Solidum ad Quadraturam hanc, de quâ agitur, nihil ferè confert: confert tamen aliquid ad ordinem quinque illorum Solidorum rectè ſtatuendum: quo ſtatuto nulla vlteriùs eius mentio facienda venit.

Quintum & vltimum Solidum conſtat rectangulis H G I; & oritur ex ductu irregularis ſuperficiei (quam duæ rectæ lineæ A B, A C, & curua Parabolica C H B circumſcribunt (in ſub-alternam item irregularem ſuperficiem rectis B A, B D; & Parabolâ A I D comprehenſam. Cuius Solidi generatio ex omnibus rectangulis H G I eodem modo ſe habet, quo productio vel Solidi primi ex Quadrato A F in Quadratum A D ducto geniti; vel reliquorum ex aſſignatis ſuperficiebus in ſub-alternas ductis procreatorum.

Ex quibus ita declaratis, conſtat quomodo ex quinque rectangulis illis M G N, L G P, K G O, r G Δ, H G I continuè proportionalibus efformentur quinque ſolida; & ex quibus ſuperficiebus in ſubalternas ductis enaſcantur. Quod erat propoſitum.

Corollarium.

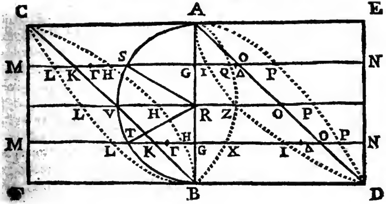
Conſtat, hæc quinque ſolida, quorum ſingula proximè determinaui, totidem rectangulis conſtari. Nam lineæ omnes M G N, quæ ad omnia Axis A B puncta ducuntur, continent latera rectangulorum quinque; quorum vnumquodque pertinet ad vnumquodque Solidorum quinque. Quot ergo rectangulis conſtabit vnum aliquod eorum Solidorum; tot rectangulis reliqua conſtare neceſſe eſt. Quod ſi ea Solida plano ſecentur aliquo, ad quod axis A B ſit perpendicularis; quale foret planum ſuper lineâ M G perpendiculariter erectum ad planum ſubiectum A F, ſiue baſim: communem Solidorum: partes omnium Solidorum ab eo plano abſciſſæ, pari numero rectangulorum propter eandem rationem conſtabunt. Nam lineæ omnes, quæ ad axis partis A G, vel G B abſciſſæ puncta duci poſſunt, rectangula quinque ſingulæ continent: quorum vnumquodque ſibi vendicant ſingula illa quinque Solida. Ad hæc conſtat Solidum primum quantitates continere, rectangula ſcilicet, vel quantitatibus conſtare: quarum ſingulæ eandem rationem habeant ad ſingulas quantitates, quas continet, vel quibus conſtat Solidum ſecundum; quam habent hæ quantitates Solidum ſecundum conſtituentes ad quantitates, quibus conſtituitur Solidum tertium; & ſic deinceps de quarto, & quinto Solido dicendum eſt. Cùm enim rectangulorum quinque latera contineat linea quælibet M G N ad axem perpendicularis; eâque rectangula ſint continuè proportionalia: rectè dicetur Solidum primum continere rectangula, quæ ad rectangula quibus conſtat Solidum ſecundum, eandem rationem habent; quam hæc rectangula obſeruant, ad rectangula Solidum tertium conſtituentia. Etſi alioqui vnius rectangulorum quinque ſeriei ratio, ſpecie differat à ratione, quam alia quælibet ſeries quinque rectangulorum obſeruat. Quod non tantùm Solidis integris conuenit; ſed etiam eorum partibus, quæ planis abſcinduntur ad axem A B rectis, vt propter eandem rationem manifeſtum eſt.

PROPOSITIO XXIII. *Problema.*

PArabolam deſcribere per puncta A & B eiuſdem ſchematis tranſeuntem: cuius latus rectum ſit A B; Axis verò ſit recta R V biſecans in R perpendiculariter ipſam A B.

Con

Digitized by Google



Conſtructio.

In recta R V, quæ Axis Parabolæ deſcribendæ ſupponitur; ſumatur R Z æqualis ſemiſſi rectæ R A, ſiue quartæ parti totius lateris recti A B. Tum poſito puncto Z vertice Parabolæ, deſcribatur ipſa Parabola per tria puncta A, Z, B: quod abſoluetur aliquo ex traditis modis vel ab Authore Cyclometriæ Libro de Parab. vel à Mydorgio, vel ab aliis paſſim. Dico Parabolæ ſic deſcriptæ Latus rectum eſſe A B.

Demonſtratio.

Cùm in deſcriptâ Parabolâ, poſita ſit ſagitta R Z æquali ſemiſſi ordinatim Applicatæ A R: erunt tres lineæ A B, A R, R Z continuè proportionales. Eſt ſiquidem A B dupla Applicatæ A R; hæc verò ex conſtructione eſt dupla ſagittæ R Z. Ergo Quadratum Applicatæ A R eſt æquale rectangulo, ſagittâ R Z & linea A B comprehenſo Sed idem Quadratum applicatæ A R eſt æquale rectangulo, quod ſagitta R Z & Latus rectum Parabolæ A Z B comprehendunt, per Prop. 11. Lib. 1. Apollonij ergo eiuſdem Parabolæ Latus rectum eſt A B. Parabolam igitur deſcripſimus per A & B tranſeuntem, cuius Latus rectum ſit A B. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXIV. *Thorema.*

SOlidum, quod generatur ex ductu trianguli mixti rectis A B, A C & lineâ Parabolicâ C H B comprehenſi, in triangulum mixtum priori ſub alternum rectis B A, B D, & lineâ Parabolicâ A I D comprehenſum: æquale eſt Soli-

do, quod generatur ex ſegmento Parabolico A Z, B comprehenſo lineâ Parabolicâ A Z B, & rectâ A B, in ſeipſum ducto.

Demonſtratio.

Huius Theorematis ſubtiliſſimi veritas demonſtratur ab eius primo inuentore Cyclometra noſtro Lib. 10. Oper. Geom. Prop. 42. Ad cuius probationem, cùm plura requirantur, quàm hoc noſtrum inſtitutum ferat: Ipſum conſule, cum libuerit: hîc ſatis eſt, vt Propoſitum conceperis, memoriæque commendes: nec omittas quæ in ſcholio Propoſitionis ſequentis 25. obſeruo.

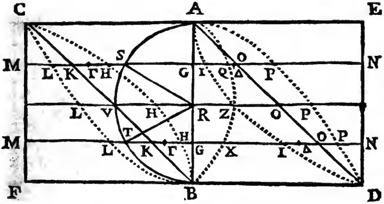
Corollarium.

Ex eâ, quam nunquam ſatis laudatus Author, affert Propoſitionis huius demonſtratione colligitur, ductas duas quaſlibet lineas ad Axem A B perpendiculares (cuiuſmodi ſunt M G N, V R Z) abſcindere ex ſegmento Parabolico A Z B, portionem quandam G Q Z R: quæ in ſe ducta Solidum generat æquale Solido, quod portio mixti trianguli A C H H B, ab eiſdem lineis parallelis M G N, V R Z intercepta, ſi ducatur in portionem alterius mixti trianguli A D I I A, ab eiſdem parallelis interceptam (quæ eſt G I Z R) generat. Eadem enim demonſtratio partibus quibuſlibet à quibuſlibet duabus paralleli, interceptis, æquè ac toti ſegmento A Z B conuenit.

PROPOSITIO XXV. *Theorema.*

SI in eodem ſchemate centro R per A & B ſemi-circulus deſcribatur A V B: ſemi-cylindrus ſuper hac ſemi-circulari baſe A V B erectus ad altitudinem Lateris recti A B Parabolarum, æqualis erit Solido: quod ex ſuperficie Parabolicâ lineis rectis A C, A B, & lineâ Parabolicâ C L L B comprehenſâ in ſubalternam Parabolicam ſuperficiem lineis rectis B A, B D, & lineâ Parabolicâ A P P D comprehenſam ductâ generatur.

Demonſtra



Demonſtratio.

Hæc mira Propoſitio, vt pote quâ aliquid circulare in aliam non circularem figuram transformatum eſt, quod hactenus Geometria non præſtiterat: Demonſtratur ab eodem per-inſigni Geometra Lib. 10. Oper. Geom. Prop. 45. & 51. quam prolixâ ratiocinationum ſerie ab eo collectam hîc omittere cogimur; ſolâ contenti, quod ſufficit, Propoſitione allata: vide tamen ſcholium.

Corollarium.

Hîc aliquid ei non abſimile, quod præcedentis Propoſitionis corollario obſeruaui, notandum venit. Nimirum ſi in Diagrammate duæ quæcunque lineæ parallelæ ad Axem A B ducantur perpendiculares (cuiuſmodi ſunt M G N, L V R P) quibus intercipiatur quædam ſuperficies tam circularis, vt G S V R; quam Parabolica G L L R, & G P P R ſubalternè poſita. Erit Cylindraceum ſolidum ſuper baſe mixtâ G S V R ad altitudinem Lateris recti A B erectum, æquale Solido; quod fit, ſi ducatur mixta ſuperficies G L L R in mixtam ſubalternam ſuperficiem G P P R. Eadem enim eſt partium quarumcunque hoc modo interceptarum probatio; quæ eſt totius ſemi-cylindri, totiúſque Solidi ex ſemi-parabolis ſubalternis in ſe ductis generati.

Scholium.

Oſtendi Lib. 3. Prop. 4. Exam. Quadrat. poſitis quibuſcunque æqualibus Parabolis ſitu ſubalterno adiacentibus axi, etſi Axis pars A B inter Parabolarum vertices A & B intercepta, non ſit latus rectum; vt hic latus rectum eſſe ſupponitur: Si circa Axis partem illam inter vertices interceptam ſemi-circulus A V B deſcribatur; & ad eius diametrum

diametrum A B perpendicularis quæuis linea vt G M, ducatur ſemicirculum ſecans in S; Parabolas verò in L & P. His inquam, poſitis offendi ita eſſe G S ad G L, vt eſt G P ad latus rectum, quod eſt hic A B. Ergo rectangulum, quod rectâ G S, & Latere recto A B continetur, eſt æquale rectangulo duabus lineis ordinatim applicatis G L, G P contento. Cùm ergo, vt ſuperiùs expoſui, omnia rectangula L G P conſtituam Solidum; quod ex Parabola A C L B in Parabolam B D P A ſubalternam ductâ generatur: etiam rectangula omnia lineis rectis G S & Latere recto A B contenta, Solidum conflabunt priori ſolido æquale: conflant autem ſemi cylindrum, cuius baſis eſt ſemi-circulus A V B, & altitudo Latus rectum A B.

In hunc omnino modum, ſi oſtenſa fuerit recta quælibet G Q à Parabola A Z B abſciſſa, eſſe media proportionalis inter lineas G H, G I à Parabolis B H C, A I D obuerſis abſciſſas, vt mediam eſſe demonſtrat Cyclometra loco citato Prop. 24. conſtat ſegmentum Parabolicum in ſe ductum, Solidum generare æquale Solido, quod fit ex Parabolis illis in ſe mutuò ductis, eò quòd Quadrata omnium linearum G Q conflent Solidum ex ſegmento Parabolico A Z B in ſe ducto genitum: rectangula verò omnia H G I ſingula ſingulis illis Quadratis æqualia conſtituant Solidum ex dictis obuerſis Parabolis in ſe mutuò ductis procreatum.

PROPOSITIO XXVI. *Theorema.*

IN eodem Diagrammate, diuiſo Axe A B in quatuor partes æquales in punctis G, R, G: per quæ lineæ ducantur ad Axem perpendiculares G M, R V, G M, Parabolam quidem A Z B ſecantes in Q, Z, X; rectas verò A D, B C, in O, & K, K.

Dico Solidum ex portione Parabolica A R Z in ſe ducta genitum, notæ eſſe quantitatis tam continuæ, quàm diſcretæ. Solidum item, quod fit ex mixta figura lineis rectis G Q, G X, & G G, lineáque Parabolica Q Z X comprehenſa, in ſeipſam ducta, in iiſdem notum eſt quantitatibus: necnon Solidum natum ex trapezio A C V R ducto in triangulum A R O. Ac denique Solidum ex trapezio G K K G in trapezium G O O G ducto procreatum.

Demon

Demonſtratio.

Perperam hîc repetatur methodus, quam in Examine Quadraturæ Lib. 2. adhibui ad horum quatuor corporum quantitatem tam continuam quàm diſcretam inueſtigandam, cum præſtò habeatur opuſculum illud. Quare hîc ſolùm Epilogiſmos referam, quibus eorum quantitas definita eſt; vt paratior habeatur; cùm in ſequentibus eâ fuerit opus.

Primum ergo Solidum ex portione Parabolicâ A R Z in in ſe ductâ genitum, ſi circuli radius ponatur 1, erit iuxta Propoſitionem 36. Lib. 2. Examinis $\frac{2}{15}$

Secundum Solidum ex figura mixta quadrilatera G Q Z X G in ſe ducta genitum iuxta Scholium Propoſitionis 50. Examinis eſt $\frac{203}{960}$

Tertium autem Solidum, quod ex trapezio A C V R in triangulum A R O ducto generatur, eſt $\frac{2}{3}$ vt habetur eodem Lib. 2. Examinis Prop. 46.

Quartum denique ſolidum ex trapezio G K K G in trapezium G O O G per eandem Prop. 46. eſt $\frac{11}{12}$. Atque his numeris ita determinatis, non tantùm horum corporum ad inuicem collatorum ratio; ſed etiam rationum proportio facilè innoteſcet ad eundem conſequentem reuocatis rationibus.

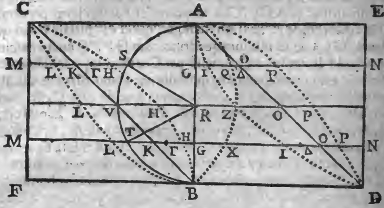
Et verò, Solidi primi $\frac{2}{15}$ ad Solidum ſecundum $\frac{203}{960}$ ratio eadem eſt in Integris, quæ eſt numeri 128 ad 203; ſi fracti reducantur primùm ad eandem denominationem, tum reductorum termini ad minimos reuocentur: ſolique Numeratores 128 & 203, expunctis denominatoribus tanquam inutilibus (cùm ipſi Numeratores ſoli rationem exprimant factorum eiuſdem denominationis) retineantur. Quâ eâdem methodo Tertii Solidi ad Quartum ratio hiſce terminis 24 & 33 determinatur.

PROPOSITIO XXVII. *Problema.*

Viam aperiamus, quâ eximius Geometra ad ſuam circuli Quadraturam primam peruenire conatur.

Digitized by Google

Conſtructio & Demonſtratio.



A. *ex* C A R H *in* A I Z R.	*vel, ex* A R Z *in* A R Z	
B. *ex* H G G H *in* I G G I.	*vel, ex* Q G G X *in* Q G G X	
C. *ex* A C V R *in* A R O		
D. *ex* G K K G *in* G O O G		
E. *ex* A C L R *in* A P P R.	*vel Cylin. ſuper* A R V	
F. *ex* G L L G *in* G P P G.	*vel Cylin. ſuper* G S T G	

Hæc Propoſitio omninò neceſſaria eſt: vt planiùs deinde pateat quid in eâ Quadraturâ probandum, quid reijciendum videatur. Quod porrò præſtandum hîc eſt; operâ ac haud adeò magnâ ex dictis hactenùs abſoluetur. Ac in primis ſupponatur, quod proximâ Propoſitione in ſolito Diagrammate noſtro imperatum eſt. Nimirum, cenſeatur Axis A B in quatuor partes æquales diuidi in punctis G, R, G; per quæ puncta agantur lineæ G M, R V, G L ad axem perpendiculares, & ſecantes in hoc ſchemate ſparſas lineas, tam rectas, quàm curuas Parabolicas, in punctis ſuo charactere inuſtis, vt ſchema refert. Sed priùs ad vitandam tot characterum moleſtam repetitionem; expedit Solidorum, de quibus agendum eſt vnumquodque vnico charactere inſigniri: quo deinde appelletur. Itaque.

Primum Solidum ex portione Parabolicâ A R Z in ſe ductâ genitum, vocetur A. Solidum ſecundum ex mixtâ quadrilaterâ figurâ G Q X G in ſe item ductâ procreatum, dicatur B. At tertium, quod ex Trapezio A C V R ducto in Triangulum A R O naſcitur, deſignabitur

nabitur charactere C. Quartum autem ex Trapezio G K K G in Trapezium G O O G, charactere D. Solidum quintum fit ex mixtâ figurâ quadrilaterâ A C L R in adiacentem Parabolicam portionem A P R; dicetúrque E. Sextum denique, quod ex mixto plano quadrilatero G L L G in mixtum quadrilaterum G P P G ducto naſcitur, charactere F inſignietur. Quia verò per Corollarium & ſcholium Propoſitionis 25. conſtat Solidum quintum ex plano mixto A C L R in planum parabolicum A P R ducto natum æquale eſſe Cylindraceo: cuius baſis eſt circuli Quadrans A R V, altitudo verò Latus rectum A B. Hoc etiam poterit, E, vocitari: ſicut dici poterit, F, Cylindraceum, cuius altitudo eſt eadem A B; baſis verò eſt mixta figura quadrilatera G S V T G: eſt enim Cylindraceum hoc per citatum Coroll. æquale Solido ſexto proximè deſignato. Vt autem hæ deſignationes horum ſex Solidorum, de quibus crebrior futura eſt mentio, oculis faciliùs, cum opus fuerit, occurrant: en tibi cum ſchemate ſynopſim; in qua, quæ fuſiùs determinata ſunt, vnico intuitu cernere poſſis.

His ita paratis ecce ratiocinationem doctiſſimi Geometræ. Si noſci poſſunt duo corpora quintum E & ſextum F, quemadmodum nota ſint (vt oſtendi præcedente Prop. 26) quatuor reliqua corpora A, B, C, D. Latere non poterit ratio, quam Solidum E habet ad Solidum F. Cùm autem Solidum E æquale ſit Cylindraceo; cuius baſis eſt circuli Quadrans A R V altitudo vero A B Latus rectum Parabolarum: & Solidum F æquale Cylindraceo, cuius eadem eſt altitudo A B, baſis autem figura quadrilatera G S V T (quod expoſui in ſcholio Propoſitionis 25.) nota perinde erit ratio Cylindracei ſuper Quadrante A R V erecti ad Cylindraceum eiuſdem altitudinis ſuper plano mixto G S T G erectum. Sed, quæ ratio eſt Cylindracei illius ad iſtud, eadem eſt ratio baſeos A R V ad baſim G S T G per Prop. 11. Lib. 12. Eucl. Ergo etiam nota erit ratio circuli Quadrantis A R V ad mixtum planum quadrilaterum G S T G. Quo poſito ſequitur circuli Quadratura. Nam ductis rectis R S, R T: Sector R S T æquale erit ſectori R S A; vterque enim ſextans eſt circuli; eo quòd recta R G poſita ſit ſemiſſis ſemidiametri R A: ac propterea ſit ſinus arcûs S V Graduum 30; cuiuſduplus eſt arcus S T. Dempto igitur ſectore R S T ex figurâ Quadrilaterâ mixtâ G S T G; vt ex ea relinquantur duo æqualia triangula R G S, R G T: dempto autem ex Quadrante R A V ſectore R A S; vt reliquus fiat ſector R S V. Tunc comparabitur hic ſector R S V cum duobus triangulis R G S, R G T; hoc eſt,

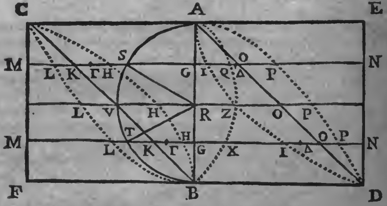
 curuilineum

curuilineum quidpiam cum rectilineo; notáque erit ratio eorum; præter quod ad Quadraturam nihil deſideratur. Atque hæc eſt ſeries totius ratiocinationis, quâ Cyclometra intentum colligit; ſi quomodo poſſit rationem exhibere Solidi E ad Solidum F, Perpendendum igitur reſtat An, & quomodo ab eo id abſoluatur: quod ſequenti Prop. exequor.

PROPOSITIO XXVIII. *Problema.*

EAdem repetitâ hypotheſi expendamus An nota ſit ratio Solidi E ad Solidum F: ſiue ratio circuli Quadrantis A R V ad mixtum Quadrilaterum G S T G ad Quadraturam neceſſaria.

Expoſitio.



A. *ex* C A R H *in* A I Z R. *vel, ex* A R Z *in* A R Z
B. *ex* H G G H *in* I G G I. *vel, ex* Q G G X *in* Q G G X
C. *ex* A C V R *in* A R O
D. *ex* G K K G *in* G O O G
E. *ex* A C L R *in* A P P R. *vel Cylin. ſuper* A R V
F. *ex* G L L G *in* G P P G. *vel Cylin. ſuper* G S T G

Antequàm fundamenta, ex quibus rationis illius E ad F cognitio colligitur

colligitur, in Examen vocentur: vt quoad fas fuerit, res non parum obſcura clariſſimè explicetur; proponenda eſt, & attendenda Authoris Propoſitio 44. Libro 10. Oper. Geom. in eâ ſiquidem totum latet Retragoniſmi huius myſterium. Sic igitur ad verbum ſonat ſi modò characteres indices, quibus ex tabella ſuperiore deſumptis, vtor; exceperis) citata Propoſitio appoſitè ad hypotheſim mei ſchematis.

Dico (inquit) *Solidum E ad Solidum F, notam habere rationem.* Id ita probat. *Oſtenſum eſt Prop.* 43. *oporis Geom. notam eſſe rationem Solidi A ad Solidum B. ſimiliter Demonſtratum eſt Prop. eâdem notam eſſe rationem Solidi C ad Solidum D.*

Hanc vtramque rationem notam exhibui in numeris Lib. 2. Examinis Quadrat. vnde eos ad Propoſitionem 26. ſuperiorem retuli tum pergit Cyclometra.

Demonſtratum autem eſt Prop. 40. *rationem Solidi A ad Solidum B toties continere rationem Solidi C ad Solidum D; quoties hæc ratio Solidi C ad Solidum D continet rationem Solidi E ad Solidum F.*

Grauior æquè ac obſcurior, quàm primâ fronte appareat, in hac oratione latet difficultas, accuratiùs in ſequentibus diſcutienda. Interim obſeruaſſe nunc ſatis eſto, eo tantùm nomine dici poſſe *rationem Solidi A ad Solidum B toties continere rationem Solidi C ad Solidum D; quoties hæc ratio continet rationem Solidi E ad Solidum F* (quæ eſt illa, quæ inquiritur ignota ratio) quòd rationes partiales terminorum, quibus Solidum A conflatur; ad terminos, quibus Solidum B conflatur: ſint toties multiplicatæ rationum partialium, quas habent termini Solidum C conſtituentes, ad terminos, quibus conſtituitur Solidum D, ſinguli ad ſingulos: quoties hæ rationes partiales terminorum ſingulorum ad ſingulos; multiplicatæ ſunt rationum partialium, quas termini Solidum E conſtituentes habent ad terminos, quibus Solidum F conſtituitur hoc enim ſolum ex Prop. 34 & 40. Oper. Geom. quæ citantur, colligi poteſt; non autem rationem totalem A ad B toties continere per multiplicationem rationem totalem C ad D; quoties hæc totalem rationem E ad F. hoc enim falſum eſt ipſo etiam iudice, huius Quadraturæ fautore R.P. Aynſcon, oſtendiq; ſuperiùs Prop. 9. ſed hæc nunc obiter ex occaſione verborum, quibus Author vſus eſt, vt ad plura in hanc rem inferiùs dicenda viam parem redeo ad Cyclometram.

Igitur, cùm nota ſint rationes, prima Solidi A ad Solidum B, & ſecunda Solidi C ad Solidum D: notum quoque eſt quoties prima contineat ſecundam. Ac propterea notum quoque eſt quoties ſecunda C ad D contineat tertiam E ad F. Itaque, cùm ſecunda ratio C ad D nota ſit; etiam nota erit ratio tertia

E ad F. Quod erat Demonſtrandum. Hæc etiam nunc leuiter perſtringo. *Nota ſunt rationes prima A ad B, & ſecunda C ad D.* Nihil verius: eas enim numeris expreſſas ex Libro 2. Examinis nuper retuli ad Propoſitionem 26. *Notum quoque eſt quoties prima contineat ſecundam.* Hoc etiam veriſſimum eſt: poteſt enim Proportio earum facilè reperiri, ſi de ſimplici continentiâ hæc verba intelligi velit Author: vel ſi de continentiâ per multiplicationem quæſtio ſit; haud ita latet eam continentiam inueſtigandi methodus, vt obtineri non poſſit. Neque verò hîc nulla continentiæ illius ratio, aut mentio habenda eſt: de quâ intelligitur Propoſitio 8. Lib. 10. Oper. Geom. quam expoſui Prop. 8. cùm ratio ſecunda Solidi C ad Solidum D terminis ſuis totalibus conſtituatur; qui nullo modo partes ſunt, velut Propoſitio illa exigit, terminorum rationis primæ Solidi A ad Solidum B. Quæ demum ſequuntur verba, in quibus totius ratiocinationis huius concluſio, imò Quadraturæ totius vel veritas vel falſitas condita latet; haud ita obuiam & planam admittunt expoſitionem. Sic enim habent. *Ac propterea notum quoque eſt quoties ſecunda ratio C ad D contineat tertiam E ad F.* Cùm ergo prima ratio A ad B ſecundam C ad D contineat vel ſimpliciter, vel per multiplicationem, nec alio vllo modo, vt attigi, illa poſſit hanc continere: etiam cùm ſecunda ratio C ad D toties continere tertiam E ad F dicitur, quoties prima continet ſecundam; intelligi debet ſecundam toties continere tertiam vel ſimpliciter, vel per multiplicationem. At neutro modo ſecunda continet tertiam: non ſimpliciter; quia ſic ratio E ad F foret duabus A ad B, & C ad E tertia proportionalis: non per multiplicationem; quia ſequeretur ſecundam tàm eſſe multiplicatam tertiæ, quàm multiplicata eſt prima ſecundæ. Quod vtrumque, ipſis etiam non conſentientibus modò, ſed etiam confirmantibus Quadraturæ fautoribus, falſum eſt. Sed hæc obiter ad Authoris verborum Paraphraſim tantùm, etſi momento non careant, adducta ſunto fuſior enim de eâdem Propoſitione, eiúſque ſenſu habenda eſt Diſputatio: quæ ex dictis hactenus (huc enim collimant omnia) planiſſima, vt ſpero, nec iniucunda futura eſt quam hinc ordior.

PROPOSITIO XXIX. *Theorema.*

Ratio illa tertia, de qua actum eſt Prop. proximâ, Solidi E, ad Solidum F: quæ eadem oſtenſa eſt Prop. 27. cum ratione circuli Quadrantis A R V ad mixtum Quadrilaterum

Digitized by Google

rum G S T G: ab Authore Cyclometriæ non eſt definita, nec eam inueſtigandi ars eſt tradita: atque adeò nec circuli Quadratura ad exitum perducta.

Monitum.

Cum hac Propoſitio vnica ferè ſit ad Examen reuocanda: vt ex eius perſpectâ veritate, vel falſitate lis tandem tota de hac celeberimâ circuli Quadraturâ ex æquo maturóque conſilio componatur cum aliquo (quod vnum nobis tam Aſſertoribus quàm Aggreſſoribus in hac controuerſiâ propoſitum eſt) rei Geometricæ Emolumento: quæcunque ad eam ſtabiliendam vel confirmandam occurrerint Argumenta, ſiue ea iam aliàs in Examine adduxerim, cum ſolutione hactenus carere mihi videantur; ſiue ex eo menti obórta fuerint; cuncta minore fortaſſe numero quàm pondere proponam, vnóque intuitu contemplanda oculis ſubijciam. Quorum hoc eſto primum.

Demonſtratio Prima

Ea eſt apud Geometras conſtituta & hactenus obſeruata lex, nec aliàs ab inſigni Cyclometrâ noſtro violata; nihil vt tanquam Geometricum agnoſcatur: quod aut per ſe velut Principium notum non ſit; aut euidenti Demonſtratione non fuerit ſtabilitum. *Abſurdum enim eſt*, Serenus inquit, *Geometras de Problemate Geometrico*, quale iſtud eſt, *ſine Demonſtratione quidquam affirmare.* Hoc ergo cùm ita ſit, iam quæro, quando, quóve loco operis ampliſſimi Geometrici ab eius Authore mentio facta ſit methodi; quâ ratio tertia E ad F ex datis A ad B, & C ad D colligi poſſit; quàm eò maior erat exponendi neceſſitas, quòd ea ratio E ad F nec tertia eſſe poſſit duabus datis A ad B, & C ad D proportionalis; nec eius concedatur toties multiplicata ſecunda C ad D; quoties prima A ad B ſecundæ C ad D multiplicata eſt: præter quem duplicem modum rationem ignotam ex duabus notis inueſtigandi, alius apud Geometras eſt inauditus: Ille igitur, ſi quis eſt, ab eo debet exponi priuſquàm circuli à ſe abſolutam Quadraturam pronunciet. Quod Argumentum vnicum ſimpliciſſimum, vt patet, & maximè obuium abunde ſufficit, vt conſtet euidenter quanto cum fundamento aſſeruerim rationem illam tertiam E ad F, ſine quâ ad exitum perduci Quadratura hac methodo nulllatenus poteſt, non eſſe definitam, ac proinde nec inuentam Quadraturam. Quod erat Demonſtrandum.

Quanquam verò hac ſimplici obiectione proximè declaratâ; quòd ſcilicet nuſquam reperiatur expoſita methodus tertiam rationem determinandi;

terminandi; lis tota planè confecta ſit: eâ tamen, quæ tanto Geometræ meritò debetur, obſeruantiâ factum eſt, vt eius verbis (quod Archimedi vix concedatur) non omnis ſit fides abrogata: ſed variæ ſint tentatæ viæ; quibus, ſi quo modo poſſet, eorum eluceſceret veritas; pateretque, quo ſenſu tantus Author rationem illam tertiam notam ex ſecundæ cognitione effici aſſeruerit verùm incaſsùm hactenus, vt hoc etiam ex capite confirmetur concepta de eâ Aſſertione vel dubitatio, vel lata condemnationis ſententia.

Demonſtratio ſecunda.

Secundum hoc Argumentum priori futurum eſt perſimile, & ex eodem loco petitum. Dum enim egregius huius Quadraturæ fautor R.P. Aynſcom meritò quæri cerneret à pererudito eius Authore Præceptore ſuo, quâ tandem methodo tertiam illam rationem E ad F ex duabus rationibus notis A ad B & C ad D, colligeret: non potuit, cùm eius partes, quas ſuſceperat hunc tetragoniſmum exponendi, tuendique, id præ cæteris exigerent; huic quæſtioni non reſpondere. Quam reſponſionem vt faciliùs, & accuratiùs deinceps perpendamus, præſtat hanc eius verbis prius referre. Hæc igitur habet (meis tamen ſeruatis characteribus indicibus) dum Propoſitionem 44. Lib. 10. Oper. Geometrici pag. 104. quam expendimus, interpretatur.

Per Scholium præcedens, inquit, *ratio ſecunda C ad D, tam multiplicata eſt rationis tertiæ E ad F quàm ratio plani hyperbolici X.* (plana hæc hyperbolica ſuis characteribus appellat iuxta ſuum Diagramma, quo hic non egeo) *ad planum T multiplex eſt rationis plani hyperbolici T ad planum Z. Sed notum eſt* (horum præ cæteris verborum memor eſto) *cùm facilè deduci poſſit ex proprietatibus ſpatiorum hyperbolicorum, quas Author Lib. 6. accuratè Demonſtrauit; quàm multiplex ſit ratio plani hyperbolici X ad planum hyperbolicum T, rationis plani hyperbolici T ad planum hyperbolicum Z. Igitur & notum eſt quàm multiplicata ſit ratio Solidi C ad Solidum D, rationis Solidi E ad Solidum F. Nota eſt autem ratio Solidi C ad Solidum D: igitur & nota eſt ratio Solidi E ad Solidum F. Quod erat Demonſtrandum vlteriùs*, concludit, *in hac Quadraturâ primâ non procedo, quod ſtabilita hac propoſitione, omninò ſibi illa conſtet.*

Verius dici nihil poteſt quàm ſtabilitâ hac Propoſitione 44. Lib. 10. Oper. Geom. Quadraturam primam, de quâ ſolâ nunc ſermo habetur, ſibi conſtare, abſolutámque exhiberi, vt Prop. 27. declaraui. At non minùs verum, vt ex eadem Propoſitione conſtat, cenſeri debet, eandem quadraturam labefactari; ſi quo modo citatam Propoſitionem illam 44. in diſcrimen vocari contingat: vt vocari reuerà videtur

multis

multis nominibus; quæ in oratione Patris Aynſcom proximè relatâ continentur: quibus omnibus in alium locum rejectis vnicum interim propono ex verbis illis, quæ iam tum, cùm à me recitarentur, præ cæteris obſeruanda monui, quæ ita ſonant.

Sed notum eſt (cùm facilè deduci poſſit ex proprietatibus ſpatiorum hyperbolicorum, quas Author Lib.6. accuratè demonſtrauit) quàm multiplex ſit ratio, &c. Non egeo pluribus.

Accuratiſſimè; fateor, teſtórque, de ſpatiis hyperbolicis nunquam ſatis laudatus huius Quadraturæ Author in maximum Geometriæ emolumentum quàm plurima, eáque inaudita demonſtrauit. Nihilominùs an faciliùs deductum iri à quopiam cenſere debuit Quadraturæ Interpres illud, ſine quo ſtare Quadratura non poteſt, quàm à ſeipſo deductum fuiſſet, aut ſaltem locus & propoſitio, cùm tam multis de hyperbolicis huiuſmodi ſpatiis agatur in Opere Geom. fuiſſet deſignata? Deinde, Quid in Conicis tam planum ac facile reperiri, cuipiam fuit aliquando perſuaſum; vt expoſitione non egere cenſeretur? ea ſanè ſemper fuit Geometrarum ſententia ratione crebrâque experientiâ comprobata in Conicis nihil vulgare, nihil niſi maximè abſtruſum, *nihil tam facile*, quod expoſitione non egeat, contineri.

Quod cùm in hac materiâ ſemper verum ſit; tum maximè in his ſpatiorum hyperbolicorum proprietatibus veriſſimum licet experiri: cùm earum mentio nulla apud quemquam alium quàm apud eximium hunc Geometram reperiatur ſolitâ ſuâ breuitate, nec ſine obſcuritate breuitatem comitante hæc vt cætera proponentem. Ad hæc. Cùm de Quadraturæ Authore non leuiter queſti fuiſſent Geometræ (ſubqueſtum me ſanè in Examine non poſſum diffiteri, nec potuit Cyclometriæ huius Interpretem latere) quòd Prop.44. recitatâ ſuperiùs, abſolutè & abſque omni aliâ citatione, & conſecutionis notitiâ præuiâ tertiam illam rationem E ad F notam aſſeruiſſet: mirum iure videatur interpretem hac in eâdem ipsâ causâ parium, aut etiam grauiorum (priorum ſcilicet aduerſus Authorem querelarum non ignarum) expoſtulationũ diſcrimen minimè declinaſſe: dum generali quadam ad ſpatia illa hyperbolica appellatione vſus, rem de quâ agebatur, quæque difficultatis caput erat; pronunciauit *tam facilem, vt à quouis è proprietatibus ſpatiorum illorum nullo negotio deduci poſſet.* Debuiſſet ipſe, vt interpretis munere cumulatè fungeretur, concluſionem ad minimum vſque apicem deducere, & explicare. Quod præſtitum cùm non ſit: Quadratura non ab Authore, non ab interprete abſoluta, ſed à Lectore Geometrâ abſoluenda dici debet. Quod erat demonſtrandum.

Confirmatur euidenter proxima ratiocinatio mea. Vix quiſquam ſibi perſuadebit aliquando eximium Cyclometriæ Authorem, cùm in illâ ſæpiùs memoratâ Propoſitione 44. Lib. 10. Oper. Geom. concludit. *Ergo nota eſt tertia ratio* (quæ eſt ratio ſolidi E ad ſolidum F) voluiſſe tertiam illam rationem per ſpatia hyperbolica notam fieri. Si enim eius ea mens fuiſſet: quid, quæſo, obſtabat quo minùs eam duabus tantùm additis voculis in hunc modum expreſſiſſet. *Ergo nota eſt tertia ratio per ſpatia hyperbolica?* Nec tantùm obſtabat nihil verùm, ne alioqui Lectorem ludere videretur (quod de viro doctiſſimo iuxtà ac optimo alienum eſt ſuſpicari) vt animi ſui ſenſum ita aperiret; ſuadebat, imò cogebat rei grauitas. Quid enim toto tam amplo in opere Geometrico grauius quàm ea concluſio, ex quâ proximè & immediatè colligi debeat, quæ vna propoſita eſt, circuli Quadratura? Atque hanc ſententiam meam confirmat non leuiter; quòd eximius Cyclometra ſpatiorum hyperbolicorum mentionem nullam faciat aut Libro 10. Operis ſui Geometrici, vbi Quadraturas exponit ex Inſtituto; aut Libro 6. vbi ſpatia illa, eorúmque mirabiles facultates accuratiſſimè proſequitur; non vtique præcipuam & ad ſcopum ſibi propoſitum apprimè vtilem ac maximè neceſſariam prætermiſſurus, ſi quæ fuiſſet ab eo obſeruata huiuſmodi. Sed neque deinceps alter tanti Auditor Præceptoris R.P. Alphonſus de Saraſa eorum ſpatiorum vſquam meminit in ſolidiſſimâ illâ reſponſione, quam aduerſus Merſenni cenſuram conſcripſit: in quâ de ſpatiis hyperbolicis egit tam copioſè; vt nihil præterea deſiderari poſſe videatur. Quî ergo facultas hæc præ cæteris inſignis, & ad tuendam, quod agebat, Circuli Quadraturam tanti ponderis ac momenti ipſum effugerit? Atque ex his euidenter conſtare cenſeo præter Authoris Quadraturæ mentem ſpatiorum hyperbolicorum mentionem hîc fieri; nouámque potiùs Tetragoniſmi abſoluendi methodum fabricare, quàm ab eo fabricatam tueri velle; dum *ex illis facilè deduci* aſſeritur cognitio tertiæ illius rationis ad Quadraturam omnino neceſſaria. Ac proinde, niſi deducatur, aut deduci poſſe ſaltem demonſtretur eadem illa ratio; immeritò dicatur ad exitum perductam eſſe Quadraturam.

Demonſtratio tertia.

Etſi duplici proximâ argumentatione conſtet euidentiſſimè (quid enim conſtet euidentiùs, quàm, cùm de facto agitur, non factum iure cenſeri & pronunciari: ſi nuſquam factum comperiatur; nec factum, *ſed fieri facilè poſſe* oratio factum Aſſerentium affirmet?) abſolutam Quadraturam neque ab Authore ipſius exhibitam; neque ab Authoris interprete promotam niſi accedat tertiæ illius tam ſæpe memoratæ rationis

Digitized by Google

rationis E ad F firma, ſuiſque terminis expreſſa conſtitutio. Quia tamen quod *facile fieri poſſe* aſſeritur, tanquam factum admitti fortaſſe poſſit: iuuat expendere quàm facilè ex ſpatiis hyperbolicis tertiam illam rationem deducere potuerit R. P. Aynſcom: quod equidem præſtare adeò difficile mihi viſum eſt; vt inter impoſſibilia reponi cenſeam. Quod ſi oſtendero (vt me ſpero euidenter oſtenſurum) non leui probatione patebit iam tertiò veritas allatæ propoſitionis.

Primò igitur in memoriam reuocanda eſt mira illa ſymboliſatio ſuperiùs Prop. 16. explicata; quæ inter ſpatia hyperbolica, & rationes linearum ſpatia illa abſcindentium; & inter Progreſſiones Arithmeticas Progreſſionéſque Geometricas aptè debitóque ordine compoſitas intercedit: & ſi quid deſit huic loco neceſſarium, de nouo ſuperaddendum. Cùm ergo tanta ſit, vt citatâ Prop. oſtenſum èſt inter ſpatia hyperbolica & duplicem numerorum dictam Progreſſionem affinitas: omiſſis tantiſper ſpatiis illis minùs tritis numeros aſſumamus nobis magis familiares ac notos. Sint itaque quatuor Progreſſiones per rationes ſpecie diuerſas extenſæ: quarum primi termini ſint æquales, quinque autem ſint earumdem termini, vt hoc in ſchemate cernitur; ac ſingulis earum terminis apponantur debiti termini Arithmeticæ communis Progreſſionis. Iam, ſi conferamus terminos primæ Progreſſionis Geometricæ A, B, C &c. cum terminis Progreſſionis tertiæ L, M, N &c. homologos cum homologis: conſtat per Prop. 10. Lib. 8. Elem. rationem C ad N eſſe duplicatam rationis D ad O: & eiuſdem rationis D ad O rationem B ad M eſſe triplicatam; Quadruplicatam autem eiuſdem eſſe rationem A ad L hanc autem rationum, quas termini Progreſſionis A, B, C &c. habent ad terminos homologos Progreſſionis L, M, N &c. multiplicationem deſignant aptiſſimè termini Arithmeticæ Progreſſionis ſingulis appoſiti. Ecce enim ratio C ad N eſt duplicata rationis D ad O; quo charactere id deſignetur aptiore quàm vtrique termino tam C quàm N adhærente termino 2. Arithmeticæ Progreſſionis. Idem in triplicatâ, quadruplicatâ &c. obſeruare, & intueri licet. Adeò vt idem terminus 2. Arithmeticæ Progreſſionis termino C Progreſſionis Geometricæ appoſitus, non ſolùm ſit Exponens multiplicationis, quâ ratio C ad E multiplicat rationem D ad E terminis eiuſdem Progreſſionis conſtitutam, vt Prop. 15. docui: ſed etiam multiplicationis; quâ ratio C ad N multiplicat rationem D ad O expreſſam terminis homologis Progreſſionum diuerſarum. Idem dicito de rationibus, quas habent termini homologi duarum quarumcunque Progreſſionum Geometricarum ab eodem primo termino inchoatarum.

A 16.	B 8.	C 4.	D 2.	E 1.
4.	3.	2.	1.	0.
F 81.	G 27.	H 9.	I 3.	K 1.
4.	3.	2.	1.	0.
L 256.	M 64.	N 16.	O 4.	P 1.
4.	3.	2.	1.	0.
Q 625.	R 125.	S 25.	T 5.	V 1.
4.	3.	2.	1.	0.
AF 97.	BG 35.	CH 13.	DI 5.	EK 2.
8.	6.	4.	2.	0.
LE 881.	MR 189.	NS 41.	OT 9.	PV 2.
8.	6.	4.	2.	0.

Quibus ita declaratis. Si plurium Progreſſionum ab eodem primo termino inchoatarum homologi termini ſimul addantur; ſicque additi ad terminos homologos totidem aliarum Progreſſionum ab eodem priorum primo termino cœptarum conferantur. Vt in ſchemate termini duarum Progreſſionum A, B, C &c. & F, G, H &c. homologi additi conferri poſſunt cum terminis homologis duarum Progreſſionum L M N &c. Q. R, S &c. ſimul additis. Tunc, ſi ſimul etiam addantur Exponentes termini Progreſſionis Arithmeticæ, ſingulis terminis Geometricarum Progreſſionum affixi, vt additos in ſchemate licet intueri: haud quaquam indicabunt huiuſmodi termini multiplicationem rationum terminis Progreſſionum Geometricarum additis conſtitutarum; velut indicabant cùm ſimplices rationes terminis Progreſsionis vnius ſimplicis ad terminos alterius ſimplicis Progreſsionis relatis conſtituebantur. Quod quidem in hoc Paradigmate per ſe patet. Ratio autem aperta eſt. Termini ſiquidem Progreſsionum diuerſarum per rationes ſpecie diuerſas propagatarum ſimul additi, priores quas obſeruabant, rationes confundunt, & in alias longè diuerſas commutant: At termini Exponentes, ſiue termini Arithmeticæ Progreſsionis homologi ad diuerſas Progreſsiones Geometricas pertinentes, ſi ſimul addantur; ſemper Progreſsionem Arithmeticam, cuius termini æquali ſemper exceſſu creſcunt, conſtituunt, vt Prop. 17. demonſtraui poſt Ipſum Quadraturæ Authorem Prop. 19. Libro Progreſſ. Quæ Arithmetica Progreſsio per additionem de nouo genita, non minùs apta eſt ad exponendam multiplicationem rationum, quas termini Geometricæ Progreſsionis obſeruant; quàm ipſa ſimplex vulgaris Progreſsio Arithmetica. Etenim in ſchemate, Progreſſionis Arithmeticæ 8, 6, 4, 2, 0, ex Additione duarum Progreſsionum vulgarium genitæ, terminus 4 non minùs conſtat duabus differentiis,

per

per quarum alteram, quæ eſt 2, Progreſsio extenditur; quàm terminus 2 vulgaris Progreſsionis numerorum 4,3,2,1,0 : nec minùs aptus ille fuerit ad indicandam rationem duplicatam inter terminos Progreſſionis Geometricæ, quàm iſte; eſto expreſsiùs duplicationem illam rationum indicet hic terminus 2, quàm ille 4. Vt ſuperius Prop. 15. declaraui, quam ad maiorem horum euidentiam conſule.

Hic demum obſeruari debet, rationes, quas inter ſe habent termini homologi duarum Progreſsionum Geometricarum, quales ſunt Progreſsiones A, B, C &c. & L, M, N, &c. quæ continuæ non ſunt; continuari poſſe, & Progreſsionem vnicam Geometricam conſtituere aliis quidem terminis, tamen æquiualentibus expreſſam. Vt, in proximè appellatis duabus Progreſſionibus, ratio termini C ad N duplicata eſt, vt ex Elementis oſtendi ſuperiùs, rationis D ad O; & ratio B ad M eſt eiuſdem D ad O triplicata: & ſic deinceps diſparatis, nec communi termino connexis rationibus. Verùm, ſi fiat Vt O 4 ad D 2, ita D 2 ad 1; & rurſus, vt D 2 ad 1, ita 1 ad $\frac{1}{2}$ & vt 1 ad $\frac{1}{2}$ ita $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{4}$ &c. habebitur Progreſsio Geometrica $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4; eritque ratio 1 ad 4, duplicata rationis D 2 ad O 4: cuius rationis duplicata eſt C 4 ad N 16. Ratio verò $\frac{1}{2}$ ad 4 eſt triplicata eiuſdem rationis D 2 ad O 4, vt eiuſdem triplicata eſt B 8 ad M 64. & ita de cæteris ſequentium terminorum rationibus, earúmque multiplicatione dicendum eſt. Ex his firmiter, & quantum fert rationum natura, apertè conſtitutis, hanc colligo ratiocinationem.

Reſumatur ſchema ſuperiùs allatum; in quo quatuor Progreſsiones quinque numerorum proportionalium habentur, primique ſingularum termini ſunt æquales: ſingulis autem Progreſsionibus illis Geometricis totidem appoſitæ ſunt Progreſsiones Arithmeticæ, eo qui Prop. 14. explicatus eſt, ordine: quarum termini exponunt multiplicationem rationum; quæ inter terminos tam eiuſdem Progreſsionis, quàm diuerſæ, reperiuntur: vt in ſuperioribus declaratum eſt; quæ hic præ mentis oculis à ſtudioſo Lectore haberi peruelim tunc planè certior illum his, quæ ſubiungo, aſſenſum vltro præbiturum. Addantur termini homologi tam duarum Progreſsionum A, B, C &c. F, G, H, &c. quàm duarum L, M, N &c. Q, R, S &c. Addantur etiam termini homologi duarum Progreſsionum Arithmeticarum terminis ſingulis Progreſsionum Geometricarum appoſiti, vt ad calcem ſchematis cernitur. In primis, certum eſt rationem totalem A F 97, ad E K 2, conſtare duabus rationibus partialibus A 16 ad E 1; & F 81 ad K 1: quarum illa eſt duplicata rationis C 4 ad E 1; hæc verò duplicata eſt rationis H 9. ad K 1. nec minùs certum eſt rationem totalem C H

13 ad E K 2 conſtare duabus partialibus rationibus C 4 ad E 1 & I 3 ad K 1 iuxta Prop. 8. Lib. 10. operis Geom. quam Prop. 8. expoſui quarum illa rurſus duplicata eſt rationis D 2 ad E 1; hæc verò duplicata rationis I 3 ad K 1. Idem dictum puta de poſterioribus Geometricis duabus Progreſſ. L, M, N &c. Q, R, S &c. certum verò eſt neque rationem totalem A F ad E K, duplicatam eſſe rationis totalis G H ad E K: neque rationem totalem C H ad E K, duplicatam totalis rationis D 1 ad E K. Vnde porrò habetur hæc certitudo ? attigi ſuperiùs: ſed hoc ipſum ex P. franc. Aynſcom nunc præſtat audire *eo quòd*, inquit in ſcholio Propoſitionis 40. Lib. 10. Oper. Geom. quam interpretatur, *omnes rationes partiales diuerſæ ſint ſiue diſſimiles.* Neque alia ratio afferri debet, cur in ſecundo caſu (in quo termini rationum ad diuerſas ſpectant Progreſsiones) ratio totalis A F 97. ad L Q 881 duplicata non ſit rationis totalis C H 13 ad N S 41: vel ratio totalis C H 13 ad N S 41 non ſit duplicata totalis rationis D I 5 ad O T 9: quamuis rationes partiales A ad L & F ad Q, duplicatæ ſint rationum partialium C ad N & H ad S, ſingulæ ſingularum: & partiales hæ C ad N & H ad S ſingulæ ſingularum D ad O & I ad T ſint etiam duplicatæ. Imò de hoc ſolo caſu loquitur citatus Author. Sunt ſcilicet rationes partiales diſsimiles: quarum proinde termini ſimul additi priorem, quam habebant habitudinem, mutuant contrà quàm contingeret, ſi rationes ſimiles inter ſe forent, vt deducitur ex Prop. 15. Lib. 5. Elem.

A 16.	B 8.	C 4.	D 2.	E 1.
4.	3.	2.	1.	0.
F 81.	G 27.	H 9.	I 3.	K 1.
4.	3.	2.	1.	0.
L 256.	M 64.	N 16.	O 4.	P 1.
4.	3.	2.	1.	0.
Q 625.	R 125.	S 25.	T 5.	V 1.
4.	3.	2.	1.	0.
AF 97.	BG 35.	CH 13.	DI 5.	EK 2.
8.	6.	4.	2.	0.
LE 881.	MR 189.	NS 41.	OT 9.	PV 2.
8.	6.	4.	2.	0.

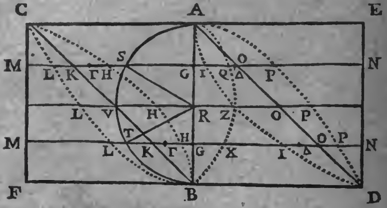
At verò, ſi de Progreſsionibus Arith. Geometricas Exponentibus ſermo ſit habendus, longè aliter & ſentiendum, & loquendum eſt. Nam, vt paulò antè iam oſtendi: etſi termini homologi diuerſarum Progreſsionũ Arithmeticarum per Additionem materialiter quidem mutentur; at non mutantur formaliter. Mutantur

ſcilicet

ſcilicet quoad quantitatem numeri, quoad habitudinem exceſsûs non mutantur. Ita vides terminum 8 conflatum ex Additione duorum terminorum 4 & 4 terminis A & F adhærentium; ſi ad terminum 4 referatur, qui ex Additis duobus terminis 2 & 2 ad terminos C & H Progreſſionum Geometricarum pertinentibus genitus eſt; non minùs aptè indicare duplicationem rationum, quàm indicarent duo ſimplices termini 4 & 2 ſimplicibus terminis A & C, aut F & H adhærentes: tam enim 8 excedit 4 duabus differentiis ſuæ Progreſſionis 8, 4, 0 quàm 4 excedit 2, differentiis duabus Progreſſionis ſuæ 4, 2, 0 Illa ſiquidem progreſſio creſcit differentiâ ſiue exceſſu perpetuo 4; hæc autem exceſſu 2. Quo eodem iure terminus 4 ex terminis duobus 2 & 2, qui adhærent terminis C & H Geometricarum Progreſſionum, genitus relatus ad 2 ex 1 & 1 genitum non minùs bene declarat rationem, verbi gratiâ, C ad E duplicatam eſſe rationis D ad E; quàm terminus 2 termino Geometrico C affixus, ſi ad 1 termino Geometrico D affixum referatur: fit enim etiam hic duplex Progreſſio Arithmetica nempe 4, 2, 0: & 2, 1, 0. Illa creſcit per numerum progreſſiuum 2; hæc verò per 1: terminus autem 4, non ſecùs quàm 2, duobus conſtat numeris progreſſiuis; ac proinde æquè aptè ac 2, duplicationem rationum declarat eo modo, quo dictum eſt.

Quæ cùm ita ſint. Si tam multiplicata eſt totalis prima ratio AF ad LQ rationis ſecundæ CH ad NS: quàm multiplex eſt terminus 8 terminis rationis AF ad LQ affixus, termini 4 ad rationem CH ad NS pertinentis: & deinceps, ſi tam multiplicata eſt totalis ratio ſecunda CH ad NS, rationis tertiæ DI ad OT: quàm multiplex eſt terminus 4 Exponens ſecundæ rationis, rationis tertiæ exponentis termini 2. Cùm terminus 8 duplex ſit termini 4. hic verò duplex termini 2: aſſerendum foret rationem primam AF ad LQ duplicatam eſſe rationis ſecundæ CH ad NS: hanc autem CH ad NS duplicatam rationis tertiæ DI ad OT. Vel etiam (vt eandem ratiocinationem ad alterum caſum, in quo rationes eiuſdem Progreſſionis comparantur) ratio totalis prima AF ad EK, duplicata foret rationis ſecundæ CH ad EK: hæc verò CH ad EK, duplicata tertiæ rationis DI ad EK. Quod in primis tanquam à veritate alieniſſimum, & Quadraturæ Authoris ſententiæ contrarium, tum paſſim in ſuâ Quadraturarum deductione; tum præſertim cùm ad meum primæ huius Quadraturæ Examen, & ad Hugeni Eretaſim reſpondet; longè longiùs reiicit P. Aynſcom: idémque ante ipſum reiecerat P. Alphonſus de Saraſa. Nec mirum ſi à iam perſpicacibus Geometris reiiciatur: cùm non tantùm id per ſe falſum eſſe; verùm etiam hanc Quadraturam, quam tuebantur,

tuebantur, penitus labefactari, ſi id admitteretur, Ipſos non latuerit. At falſum hoc, & abſurdum ex quo alio Principio profectum eſt niſi ex eo, quòd ad ſpatia hyperbolica prouocarit Quadraturæ Interpres P Aynſcom? Quæcunque enim de duplici numerorum Progreſsione, Geometricâ ſcilicet, & eius Exponente Arithmeticâ hîc declarata, probatáque ſunt: eadem, vt Prop. 16. oſtendi, de duplici Progreſsione, quam ſpatia hyperbolica obſeruant, dici debent.



A. *ex* CARH *in* AIZR.	*vel, ex* ARZ *in* ARZ	
B. *ex* HGGH *in* IGGI.	*vel, ex* QGGX *in* QGGX	
C. *ex* ACVR *in* ARO		
D. *ex* GKKG *in* GOOG		
E. *ex* ACLR *in* APPR.	*vel Cylin. ſuper* ARV	
F. *ex* GLLG *in* GPPG.	*vel Cylin. ſuper* GSTG	

En igitur *vt facilè per proprietates ſpatiorum hyperbolicorum quas Author Quadraturæ accuratè Lib. 6. demonſtrauit notum nobis fiat; quàm multiplex ſit ſpatium hyperbolicum ſecundum ſpatij tertij, atque adeò* (quod hinc deducit citatus Quadraturæ Interpres) *quàm ſit ratio ſecunda C ad D nota* (tabellam Propoſitionis 27. conſule) *multiplicata tertiæ, quæ inquiritur, rationis E ad F?* tale ſcilicet per has proprietates ſpatiorum hyperbolicorum nobis innoteſcit ſpatium tertium hyperbolicum, vt eius duplex neceſſariò ſit ſpatium ſecundum; quemadmodum euidenter demonſtraui ope Progreſsionis Arithmeticæ, quam obſeruant ſpatia ipſa hyperbolica: quo fit ex mente eiuſdem Interpre-

tis

tis in ſcholio Propoſitionis 40. Libri 10. Oper. Geom. apertè declaratâ, vt contra eiuſdem mentem citatis nuper locis non minùs apertè declaratam, & contra apertam veritatem, ratio ſecunda C ad D nota, duplicata ſit rationis tertiæ E ad F: vnde & hæc ipſa tam facilè, quàm falsò innoteſcat; & falſam, quæ ex eâ ratione tertiâ ſequitur, Quadraturam præbeat. Perperam igitur, nec ſine quadam, vt ſuprà attigi, excellentiſſimi Authoris ſui notâ ad ſpatia illa hyperbolica, & ad multiplicitatem quæ multiplicationis rationum verus eſt character, nos ablegauit Quadraturæ Interpres; vt exponeret quo ſenſu Author aſſeruerit Prop. 44 *notam eſſe rationem tertiam E ad F ex eo quòd nota ſit ſecunda C ad D.* Quare conſtat Propoſitionis allatæ veritas hac etiam tertiâ demonſtratione.

Confirmatio tertiæ huius demonſtrationis.

Totum huius tertiæ demonſtrationis momentum ex eo pendet: quòd omnes termini homologi omnium Progreſſionum partialium Arithmeticarum Progreſſiones Geometricas partiales Exponentium ſimul additi, Progreſſionem totalem Arithmeticam conſtituant, vt Prop. 17. oſtendi, eiuſdem rationis cum partiali qualibet Progreſſione, & æquè aptam, ac ipſam, ad Exponendum Progreſſionem quamlibet Geometricam. At verò, termini homologi partialium Progreſſionum Geometricarum, ſi ſimul addantur, nequaquam Progreſſionem totalem Geometricam conſtituant, eò quòd omnes partiales Progreſſiones illæ Geometricæ diſſimili ratione progreſſiuâ conſtent. Vnde ſequitur, quod concluſi abſurdum contra Quadraturæ Interpretem aſſerentem rationem ſecundam C ad D notam, tam eſſe multiplicatam rationis tertiæ E ad F ignotæ; quàm multiplex eſt terminus Arithmeticæ Progreſſionis totalis exponens rationem ſecundam C ad D, termini eiuſdem Progreſſionis; qui exponit rationem totalem tertiam E ad F. hinc enim collegi (quod abſurdum eſt) rationem ſecundam C ad D duplicatam eſſe rationis tertiæ E ad F, eò quòd terminus Progreſſionis Arithmeticæ totalis Exponens ſecundam rationem C ad D, ſit duplex termini Exponentis rationem tertiam E ad F. hæc eſt tota ſuperior ratiocinatio mea: contrà quàm non-nemo fortaſſe obiiciat R. P. Aynſcom Authoris Quadraturæ ex eius mente & ore Interpretem in ſcholio Propoſitionis 40. Libri 10. Oper. Geom. diſertiſſimè aſſerere terminos partiales homologos Arithmeticæ Progreſsionis (quam ſpatia hyperbolica obſeruant) ſimul additos non eandem, aut aliam eiuſdem naturæ Progreſsionem Arithmeticam continuare (de hac enim ſolâ eius verba poſſunt intelligi, cùm de ſpatiis hyperbolicis loquatur, quæ eam conſtituunt; non autem de Geometricâ; quæ

inter lineas ſpatia intercipientes reperitur) *quia*, inquit, *omnes rationes partiales ſunt diuerſæ*. Quod ſi ita eſt; vt aliter eſſe, ſentire vetat tantorum Geometrarum Authoritas: dici non poteſt terminus ſecundus Progreſsionibus Arithmeticæ eſſe duplex termini tertij Progreſſionis eiuſdem; atque adeò neque ratio ſecunda C ad D dici duplicata rationis tertiæ E ad F; ac proinde ex Aſſertione Interpretis abſurdum illud, quod ex eâ deducebant, non colligi. Obiiciat etiam fortaſſe quiſpiam non ſatis apertam eſſe conuenientiam illam, quæ inter numeros progreſsionis Arithmeticæ, & Geometricæ; & ſpatia hyperbolica lineáſque proportionales, quibus clauduntur, intercedit: vt propterea omni dubitatione non vacet ea, quam per numeros inſtitui, demonſtratio.

Huic duplici obiectioni paucis poteſt ſatisfieri: Priori quidem ſi, quod veriſsimum eſt, aſſeruero, latere me quo fundamento nixus P. Aynſcom pronunciarit non tam eſſe multiplicem terminum ſecundum totalem totalis termini tertij; quàm eſt multiplicata ratio totalis ſecunda C ad D, rationis tertiæ E ad F: illud enim neque apud Ipſum, neque apud Authorem vſpiam reperias explicatum. At quo Ego nixus contrarium pronunciarim; nec me latuit, nec Lectorem Geometram latere paſſus ſum: euidenter ſiquidem demonſtraui Prop. 17. Arithmeticarum quotcunque Progreſſionum terminis homologis additis nouam creari Progreſſionem Arithmeticam ad eadem muniá omnia exercenda æquè aptam, quibus ſingulæ Progreſſiones funguntur. Poſteriori autem obiectioni cumulatè ſatiſfactum cenſebit quiſquis perpenderit ſymboli rationes quas inter ſpatia hyperbolica, & Progreſſiones Geometricam & Arithmeticam obſeruaui. Sed, vt hæc ita ſint: nihilominùs ad rem per ſe non nihil obſcuram illuſtrandam, ſuperioremque demonſtrationem corroborandam prima ipſa ratiocinationis meæ Principia proponere paulò fuſiùs non fuerit inutile.

Reſumatur itaque Diagramma ſuperiùs Prop. 18. delineatum. Oſtenſum eſt, vt ex Cyclometrâ docui Prop. 20. ductam quamlibet lineam M G N ad axem A B perpendicularem ita ſecari à Parabolis, aliiſque rectis lineis, vt ibidem exponitur; vt quinque ſemper habeantur rectangula continuè proportionalia. Nimirum H G I, Γ G Δ, K G O, L G P, M G N, ita vt Progreſſionem Geometricam, quæcunque ducatur linea M G N, rectangula illa quinque ſemper conſtituant; varia tamen ſemperque diſſimili ratione Progreſſiuâ propagatam ab eodem rectangulo omnibus progreſſionibus communi, nempe rectangulo M G N. His porrò Progreſſionibus omnibus Geometricis horum quinque rectangulorum, totidem Progreſſiones Arithmeticæ ab

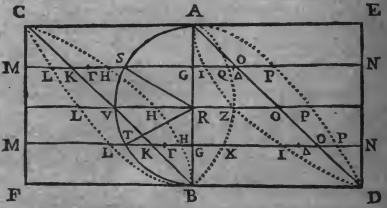
eodem

eodem termino inchoatæ reſpondere concipi poſſunt: quarum hoc eſt munus, vt Geometricas exponant, vt Prop. 15. declaraui. Iam verò ſi omnium illarum Progreſſionum Geometricarum termini homologi, ſiue rectangula eiuſdem in ſua Progreſſione ordinis & loci, ſimul coaleſcere concipiantur: naſcentur & formabuntur ſolida quinque ex ductu quinque diuerſarum ſuperficierum, quas citato loco diſtinxi, in alias quinque ibidem etiam definitas (hîc patere me Indiuiſibilibus breuitatis causâ vti, loco exhauſtionum, quæ longiorem & implicatiorem exigunt ratiocinationem, præſertim cùm hæc Indiuiſibilia ad eas hoc in caſu facilè reduci poſſint) hæc autem ſolida quinque nequaquam poſſunt eſſe continuè proportionalia, vel Geometricam Progreſſionem conſtituere; eo quòd ſingulæ Progreſſiones diſſimili omnes ratione progreſſiuâ extendantur; quâ rationum continuationem turbari neceſſe eſt. At verò, ſi Progreſſionum Arithmeticarum termini homologi coaleſcant per Additionem; procreabitur Progreſſio Arithmetica eiuſdem naturæ, iiſdémque muneribus fungendi æquè capax, ac ſingularis quælibet Arithmetica Progreſsio, vt ſuprà declaratum eſt apertiſsimè per numeros, vbi binas & binas Progreſsiones tam Geometricas quàm Arithmeticas additis terminis homologis in vnam conflauimus.

Hæc ita cùm ſint: rectangulum quodlibet H G I (ſiue Quadratum GQ rectrangulo HGI æquale declaratũ Prop. 25.) ad rectangulum primum MGN duplicatã habet rationẽ rationis eius, quam habet rectangulum KGO ad idẽmet rectãgulum primũ MGN & rectangulũ KGO ad rectangulum MGN, duplicatam rationis rectanguli LGP ad rectangulum M G N. Ergo in Progreſsione Arithmeticâ terminus adhærens rectangulo H G I duplex eſt termini adhærentis rectangulo K G O: hic verò rurſus duplex eſt termini rectangulo L G P adhærentis. Similiter. Si quinque illa rectangula proportionalia continuè, ad alia quinque rectangula continuè item proportionalia conferantur, quæ ex alterius lineæ M G N ſegmentis efformantur (qui eſt caſus ſecundus ſuperiùs expoſitus) ratio rectanguli H G I ad alterum rectangulum H G I, eſt duplicata rationis rectanguli K G O ad alterum rectangulum KGO: & hæc ratio KGO ad KGO eſt duplicata rationis rectanguli L G P, ad alterum rectangulum L G P. In Progreſsionibus autem Arithmeticis terminus vterque rectangulis duobus H G I appoſitus, duplex erit termini vtriuſque duobus rectangulis K G O appoſiti: & hic rurſus vterque terminus, duplex termini vtriuſque vtrique rectangulo L G P debiti, vt ſuperiùs declaraui. In vtroque porrò caſu ex rectangulis homologis ſimul ſumptis (quâ cautione Indiuiſibi-

Digitized by Google

libus vtor, nuqer expoſui) fiunt varia ſolida: quæ eandem non obſeruant rationum, quas habent inter ſe, multiplicationem; quam rectangula ſingula, ex quibus coaluerunt, obſeruant. Attamen termini homologi Arithmeticæ Progreſsionis rectangulis ſingulis continuè proportionalibus adhærentes, ſi ſimul addantur, Progreſsionem Arithmeticam eiuſdem cum ſingulis partialibus Progreſsionibus naturæ & facultatis conſtituunt. Hinc fit vt terminus totalis, Arithmeticæ totalis Progreſsionis ita multiplex non ſit alterius termini totalis ad eandem Progreſsionem totalem pertinentis: vt ratio Solidi ad aliud ſolidum, multiplicata eſt rationis alterius ſolidi ad alterum ſolidum. Vt, ratio ſolidi A ad ſolidum B, non eſt duplicata rationis ſolidi C ad ſolidum D (conſule horum ſolidorum tabellam ad Propoſitionem 27. expoſitam) & tamen terminus Arithmeticæ Progreſsionis totalis priorem rationem A ad B exponens, ſiue potiùs adhærens, duplex eſt termini poſterioris, rationem poſteriorem C ad D Exponentis.



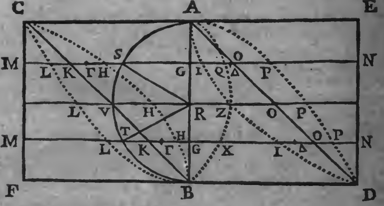
A. *ex* C A R H *in* A I Z R. *vel, ex* A R Z *in* A R Z
B. *ex* H G G H *in* I G G I. *vel, ex* Q G G X *in* Q G G X
C. *ex* A C V R *in* A R O
D. *ex* G K K G *in* G O O G
E. *ex* A C L R *in* A P P R. *vel Cylin. ſuper* A R V
F. *ex* G L L G *in* G P P G. *vel Cylin. ſuper* G S T G

His (quæ certiſsima ſunt, &, quoad fas eſt, plana & euidentia) poſitis: cùm Quadraturæ Interpres in ſcholio illo Propoſitionis 40. Oper.

Oper. Geom. concipi poſſe aſſerat ſpatia hyperbolica, ita compoſita ex partialibus ſpatiis, ſiue in partialia ſpatia ita diuiſa; vt compoſita ſunt ſolida ex rectangulis, vel in rectangula, reſoluta: aſſerátque inſuper rationem inter duas rectas ſpatium hyperbolicum abſcindentes, tam eſſe multiplicatam rationis alterius inter alias duas rectas exiſtentis; quàm multiplex eſt ſpatium ab illis abſciſſum, ſpatij ab iſtis abſciſſi; hoc eſt, vt vno ferè concludam verbo, aſſerat in ſpatiis hyperbolicis eaſdem rationes totales eſſe inter lineas rectas ſpatia intercipientes; quæ reperiuntur inter ſolida illa ſuperiora ex rectangulis generata; ſpatia verò ipſa à lineis rectis intercepta quæ ex ſpatiis partialibus Progreſsiones partiales Arithmeticas obſeruantibus componuntur, rationum illarum multiplicationem per eam, quam inter ſe obſeruant, multiplicitatem deſignare: concludendum eſſe neceſſariò ſequitur ex eo quòd ſpatium primum ſit ſpatij ſecundi duplex, & hoc duplex tertij; rationem primam ſolidi A ad ſolidum B, eſſe duplicatam rationis ſecundæ ſolidi C ad ſolidum D; & hanc, duplicatam tertiæ E ad F. Sed hæc rationum inter ſolida illa duplicatio ab ipſo Interprete reiicitur, meritóque reiici debet. Ergo & idem reiicere debuit ſpatia hyperbolica; non autem aſſerere per earum proprietates *facilè deduci quàm ſit multiplex ſpatium ſecundum ſpatij tertij; atque adeò, quàm ſit ratio ſecunda multiplicata tertiæ, adeóque ipſam tertiam, vnde tetragoniſmus abſoluitur, notam eſſe.* Patet ergo ex hoc etiam capite Propoſitionis meæ veritas.

Confirmatur ſecundò tertia hæc allata demonſtratio. Si, vt à Quadraturæ huius Interprete aſſeritur ſcholio non ſemel iam citato non tam multiplex eſt ſpatium hyperbolicum ſecundum ſpatij tertij; quàm multiplex eſt primum ſecundi; vnde conſequatur, vt ratio ſecunda C ad D non ſit tertiæ rationis E ad F tam multiplicata; quàm prima A ad B multiplicata eſt ſecundæ C ad D: Quid ad tertiam rationem E ad F cognoſcendam neceſſarium ab eodem ſupponitur rationem primam A ad B priùs cognoſci? ſublatâ enim illâ primæ rationis & ſecundæ; ſecundæ item & tertiæ tum æque-multiplicitate tum æque-multiplicatione; quid reſtat connexionis inter primam & tertiam; vt per eam connexionem, ſiue dependentiam ex primæ cognitione erui poſſit cognitio tertiæ? Neque enim minùs verum futurum eſt, quod ab eo aſſeritur, etſi nulla primæ rationis mentio fiat, rationem ſecundam tam eſſe multiplicatam tertiæ; quàm ſpatium hyperbolicum ſecundum ſpatij tertij multiplex eſt. Adeò vt ſentiam tertiam illam rationem ſolidi E ad ſolidum F, non aliter reperiri poſſe, quàm prima Solidi A ad ſolidum B, & ſecunda ſolidi C ad ſolidum D repertæ ſunt; re-

pertis ſcilicet ſingulorum eorum Solidorum quantitatibus, quibus definitis eorum corporum habitudo mutua definiatur. Sicut ergo, etſi notum ſupponatur ſpatium hyperbolicum primum tam eſſe multiplex ſpatij ſecundi quàm multiplicata eſt ratio Solidi primi A ad Solidum ſecundum B, rationis Solidi tertij C ad ſolidum quartum D; oportuit tamen ipſa Solida tertium C ad quartum D inueſtigare ex Principiis quæque ſuis propriis nullâ habitâ ratione cognitionis Solidi primi A & ſecundi B, vel eorum rationis, ita etiam eodem iure vt habeatur cognitio ſolidi quinti E & ſolidi ſexti F, vel eorum rationis; etſi notum ſit ſpatium hyperbolicum ſecundum tam eſſe multiplex tertij; quàm ratio ſecunda C ad D multiplicata eſt rationis tertiæ E ad F; reperiendum erit tam ſolidum quintum quàm ſextum ex propriis Principiis; vnde nota fiat ratio eorum, quæ eſt ratio tertia E ad F. Quare quantò magis ſpatiorum hyperbolicorum facultates in reliquis ſuſpiciendæ videntur; ita in hoc caſu, tanto magis ſuſpectæ debent habe-



A. *ex* C A R H *in* A I Z R. *vel, ex* A R Z *in* A R Z
B. *ex* H G G H *in* I G G I. *vel, ex* Q G G X *in* Q G G X
C. *ex* A C V R *in* A R O
D. *ex* G K K G *in* G O O G
E. *ex* A C L R *in* A P P R. *vel Cylin. ſuper* A R V
F. *ex* G L L G *in* G P P G. *vel Cylin. ſuper* G S T G

ri, nec tam facilè ex eis deduci poſſe, quàm multiplex ſit ſpatium hyperbolicum ſecundum ſpatij tertij; vt ipſam deductionem abſoluere non debuerit Cyclometriæ huius fautor R. P. Aynſcom, ſi ſaluam vellet Preceptoris ſui hanc Quadraturam.

Demonſtra

Demonſtratio quarta.

Retuli ſuperiùs ratiocinationem, quâ eximius Cyclometra vſus eſt ad probationem. Propoſitionis ſuæ 44. Lib. 10. Oper. Geom. in quâ aſſerit notam eſſe illam, de quâ controuertitur, tertiam rationem E ad F: obitérque quædam annotaui: quæ difficultatem patiuntur non mediocrem, dubiámque produnt primæ huius Quadraturæ methodum. Sed ea rursùs hîc ex Inſtituto, vt locus exigit, ponderanda ſunt accuratiùs; vt omnia, quæ huic Quadraturæ aduerſari mihi viſa ſunt, vnum in locum congeram; quò eorum momentum clariùs eluceſcat, dum plura ſimul ad eandem probationem concurrunt Argumenta. Primâ quidem huius Propoſitionis meæ 29, cuius probationem proſequor, demonſtratione declaraui quomodo in eo deficeret Authoris Quadraturæ Argumentatio, quâ citatam Propoſitionem 44 probat; quód concluſio Propoſitioni minimè ſatisfaceret, nec notam exhiberet tertiam rationem, quam notam eſſe Propoſitio aſſereret, quam ſententiam meam apertè comprobat Quadraturæ Interpres, dum non aliter notam fieri poſſe ait dictam rationem tertiam E ad F, quàm ope ſpatiorum hyperbolicorum; quorum nulla ad hanc rationem cognoſcendam non tantùm applicatio; ſed ne mentio quidem vſpiam ab Authore facta fuiſſet, vt demonſtratione ſecundâ expoſui. Nunc verò omiſsâ Argumentationis concluſione, Argumentationis ipſius contextum clarè, vt Ego quidem opinor, oſtendo conſtare ſibi non poſſe, ſoluíque totum; ſi admittatur Propoſitionum, quibus conſtruitur, Interpretatio à duobus earum commentatoribus P. Alphonſo à Saraſa, & P. Franciſco Aynſcom adducta. Quod non leue fuerit alicuius in hac Quadratura commiſſi defectûs Argumentum. Sic igitur habent (ſeruatis Indicibus Characteribus meis in tabellâ deſignatis) Authoris Propoſitiones; ſic Interpretum è regione poſita paraphraſis; ſic ad calcem notæ in vtrumque meæ. Itaque ob oculos poſito diagrammate, ſimúlque tabellâ ex eo petitâ; ea accipe.

Authoris textus.	*Interpretum Paraphraſis.*
Oſtenſum eſt notam eſſe rationem Solidi A ad Solidum B. ſimiliter demonſtratum eſt notam eſſe rationem Solidi C ad Solidum D	Eadem eſt, quoad hoc, Interpretum tum ſententia, tum oratio

Notæ.

Vtrumque illam rationem notam eſſe accuratiſſimè probauit Author Prop. 43. quàm eandem numeris expreſſi Prop. 26. ex Quadraturæ Examine repetitis.

Textus.	*Paraphraſis.*
Demonſtratum au-	Demonſtratum eſt rationem primam A ad B

ratio

tem eſt rationem primam A ad B toties continere ſecundam C ad D: quoties ſecunda C ad D continet tertiam E ad F per Propoſitionem 40. Lib. 10. Oper Geom.

rationibus partialibus conſtitui iuxta Prop. 8. Lib. 10. Oper. Geom. (hanc fuſè expoſui Prop. 8) toties multiplicatis rationum partialium rationem ſecundam C ad D iuxta eandem Prop. 8. conſtituentium: quoties hæ rationes partiales rationem ſecundam conſtituentes, multiplicatæ ſunt rationum partialium rationem tertiam E ad F iuxta Prop. 8. conſtituentiam.

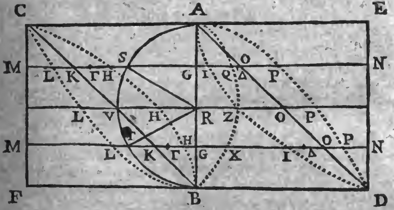
Notæ.

Longè quidem ab ipsâ Authoris ſententia Interpretum expoſitio aliena videtur. Verùm, cùm eam Authoris mentem fuiſſe teſtes ſint eius ore edocti, æquúmque ſit Inſignium Geometrarum verba in æquiorem ſemper partem aſſumi; Ita poſſunt Auditorum verba cum Præceptoris oratione conciliari; vt ab hac non tam diſparata, quàm primâ ſpecie videtur, illa ſint. Volunt ſcilicet Interpretes, rationes omnes partiales, quibus ratio totalis A ad B conſtituitur iuxta Prop. 8. toties continere per multiplicationem rationes partiales; quas continet, ſiue quibus conſtituitur ratio totalis ſecunda C ad D: quoties hæ partiales rationem ſecundam C ad D conſtituentes, multiplicatæ ſunt rationum partialium rationem tertiam E ad F conſtituentium. Author verò cùm citatâ Prop. 8. aſſeruerit rationes partiales omnes, quibus conſtituuntur rationes totales, AB, CD, EF, eſſe ipſaſmet totales rationes; ideo nullâ partialium rationum factâ mentione pronunciauit non ſine obſcuritate, rationem primam A B toties cōtinere ſecundam C D, quoties hæc continet tertiam E F. Atque hæc quidem verborum diſſonantium conciliatio, vt vera & abſoluta, admitti debere videretur: ſi, quam appoſuere Interpretes, vocem illam (*per multiplicationem*) enunciationi ſuæ addidiſſet, dixiſſétque rationem primam A B toties continere *per multiplicationem* ſecundam CD: quoties hæc *per multiplicationem* continet tertiam EF. Atque hac cautione adhibitâ, nulla videtur aptior ſententiarum verbis tam diſſonantium concordia ſtabiliri. Verùm, non fugit Geometras eximios ex eo ſenſu reliqua, quæ ſequuntur pendi debere: perperam ſiquidem, nec ſine Lectorum fraude, diſpendióque eidem enunciationi iiſdémque verbis expreſſæ vnus atque alter à priori diuerſus ſenſus pro arbitrio tribueretur; quod à tantis viris alieniſſimum eſt.

Hîc porrò quæſierim (neque enim mihi ipſemet hoc in dubio ſatisfacere potui) nunquid etiam ratio AB prima totalis in rationes partiales non poteſt diſtribui per varias eius terminorum ſectiones (ſic enim

iuxta

iuxta Propoſitionem 8. Lib. 10. Oper. Geom. & Expoſitionem à me allatam Prop. 8. rationes partiales generantur ex totali, cui ſimul ſumptæ ſint æquales) vt hæ, vel omnes, vel ſaltem aliquæ non ſint ita multiplicatæ rationum partialium ſingulæ ſingularum, quæ rationem ſecundam C D conſtituunt; vt multiplicatæ erunt hæ partiales rationem ſecundam conſtituentes rationum partialium rationem tertiam E F conſtituentium? Id enim ſi quo modo fieri poteſt, aut primæ aut ſecundæ, ſiue tertiæ rationis terminis aliter & aliter diuiſis: haud quaquam dici poterit prima ratio toties *per multiplicationem* continere ſecundam; quoties ſecunda tertiam *per multiplicationem* continet: imò tunc non minori iure dicetur prima ratio non continere ſecundam, & ſecunda non continere tertiam. Quare vt omnis dubitatio



A. *ex* CARH *in* AIZR. *vel, ex* ARZ *in* ARZ
B. *ex* HGGH *in* IGGI. *vel, ex* QGGX *in* QGGX
C. *ex* ACVR *in* ARO
D. *ex* GKKG *in* GOOG
E. *ex* ACLR *in* APPR. *vel Cylin. ſuper* ARV
F. *ex* GLLG *in* GPPG. *vel Cylin. ſuper* GSTG

(cuius ne minimum quidem Geometria patitur) præcindatur: hîc eximiis Geometris primùm probandum incumberet rationes partiales rationem totalem primam conſtituentes non poſſe non continere toties per multiplicationem rationes partiales, quibus ratio ſecunda totalis conſtituitur: quoties hæ rationem ſecundam conſtituentes, multiplicatæ ſunt rationum partialium tertiam rationem conſtituen-

L tium.

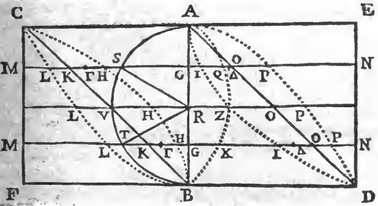
tium. Sed pergendum deinceps iuxta allatam paulò antè continentiæ expoſitionem.

Textus.	*Paraphraſis.*
Igitur cum prima & ſecunda ratio A B, & C D nota ſint (per Prop.43. Lib.10.Oper. Geom.) notum quoque eſt quoties prima A B contineat ſecundam C D. Ac ideò notum quoque, quoties ſecunda contineat tertiam E F.	Igitur cum prima & ſecunda ratio A B & C D notæ ſint: notum quoque eſt, quoties rationes partiales rationem primam A B conſtituentes (*inhæreo ſtatuta, vocis huius, continentiæ, expoſitioni*) multiplicatæ ſint rationum partialium rationem ſecundam CD conſtituentium: ac proinde notum quoque quoties rationes partiales rationem ſecundam C D conſtituentes, multiplicatæ ſint rationum partialium rationem tertiam E F conſtituentium.

Nota.

Non aliam poteſt admittere vox hæc (continere) ſignificationem quàm quæ in proximè præcedentibus notis ſtabilita eſt, & in hac paraphraſi ex Interpretum mente concinnatâ exprimitur: ne, (quod ineptum, nugatoriúmque foret) in eâdem ferè ſententiâ, eâdem voce in plures ſenſus ad arbitrium abuti liceret. Adde (quod hîc eſt maioris momenti) vitioſam fore Argumentationem totam; ſi eiuſdem termini ſignificatio in Præmiſſis diuerſa foret: neque enim tunc tres tantùm terminos, vt forma ſyllogiſtica exigit, contineret, (niſi materialiter) Argumentatio, ſed plures. At, ſi hoc in hunc modum euitaueris periculum, aliud non leuius incurrendum eſt. Quid enim opus eſt primam & ſecundam rationem priùs notam haberi; vt ex eâ cognitione colligatur, vt vult Authoris textus, quoties prima ratio contineat ſecundam, & ſecunda tertiam: ſi ita intelligenda ſit continentia illa, vt velit Cyclometra primam rationem continere ſecundam toties, quoties ſecunda continet tertiam, eo tantùm ſenſu, vt aſſerat rationes partiales rationem primam conſtituentes, toties continere per multiplicationem rationes partiales, quibus ratio ſecunda conſtituitur; quoties per multiplicationem partiales rationes conſtituentes ſecundam, continent rationes partiales rationem tertiam conſtituentes. Vel, vt clariùs in ſpecie loquamur; Quid opus eſt primæ & ſecundæ rationis A B, & C D cognitione; vt colligatur rationes partiales, quibus conſtat ratio prima totalis AB, duplicatas eſſe rationum partialium ſingulas ſingularum, quibus conſtat ratio ſecunda C D; has autem partiales rationem ſecundam conſtituentes, eſſe duplicatas rationum partialium ſingulas ſingularum rationem tertiam E F conſtituentium? Nunquid eſt id notum ante omnem rationum duarum primæ & ſecundæ

cundæ cognitionem? Probauit ſanè Quadraturæ Author Prop. 40. Lib. 10. Oper. Geom. rationem primam toties continere ſecundam, quoties ſecunda continet tertiam ante quàm Propoſitione 43. oſtenderet duas rationes primam & ſecundam in ſuâ ſpecie notas eſſe, neque ex hac cognitione illam collegit. Aliud ergo aliquid voluit Author ſignificare quàm notum fieri, rationes partiales primas, eſſe duplicatas rationum partialium ſecundarum; & ſecundas, duplicatas tertiarum: vel in genere, rationes partiales primas, toties eſſe multiplicatas rationum ſecundarum; quoties ſecundæ tertiarum multiplicatæ ſunt. Aliud, inquam, voluit Author; cùm, vt habet adductus textus, ait,



A. *ex* CARH *in* AIZR. *vel, ex* ARZ *in* ARZ
B. *ex* HGGH *in* IGGI. *vel, ex* QGGX *in* QGGX
C. *ex* ACVR *in* ARO
D. *ex* GKKG *in* GOOG
E. *ex* ACLR *in* APPR. *vel Cylin. ſuper* ARV
F. *ex* GLLG *in* GPPG. *vel Cylin. ſuper* GSTG

Cùm prima & ſecunda ratio A B & C D notæ ſint; notum quoque eſt quoties prima contineat ſecundam; ac proinde notum quoque, quoties ſecunda contineat tertiam. Quid verò tandem his verbis indicare voluit Eximius Geometra? huic quæſtioni minimè mihi incumbit ad rem meam vt ſatisfaciam: cùm mihi ad Inſtitutum ſatis ſit, vt oſtenderim ſenſus diuerſos vnius eiuſdémque Propoſitionis in contextu Argumentationis,

nis, quâ Propoſitionem 44. probat Author, aſſumi tum ab Ipſo, tum ab eius Interpretibus: neque etiam eidem cum illis planè conuenire. Vnde Argumentum non leue deducitur, quo tota hæc Quadratura in dubium reuocetur; meáque Propoſitio hac quartâ demonſtratione confirmetur. Quæ vt euidentior adhuc fiat; reliquam probationem Propoſitionis illius 44. proſequor.

Textus.

Itaque, cùm ſecunda ratio C D nota ſit: etiam tertia E F nota erit. Quod erat demonſtrandum.

Nota.

Nullâ hîc opus eſt ad hanc concluſionem Authoris exponendam Interpretum paraphraſi; neque enim aliam ab hac diuerſam allaturi ſunt concluſionem; cùm ipſa ſit, vt par eſt, probanda Propoſitio 44. Verumtamen, cùm aſſerat P. Aynſcom ad hoc, vt tertia illa ratio E ad F nota ſit, neceſſaria eſſe ſpatia hyperbolica; de quibus in hac tota Argumentatione, vel alio vſpiam loco apud Authorem, vt ſuprà monui, nulla habetur mentio: vix cuipiam ſuadeatur hanc ratiocinationem, quâ Propoſitio citata probari debet, omni defectûs ſuſpicione carere. Quod ſufficit ad Propoſitionis, quam ſtabilio, manifeſtam demonſtrationem, & quidem iam quartam.

Scholium.

Adduci vix vnquam potui, vt crederem ſummum Geometram Quadraturæ huius Authorem illâ ſuâ ratiocinatione, quâ Propoſitionem 44. quâ ratio tertia E F nota aſſeritur, demonſtrat; non omnia complexum eſſe, quæ neceſſaria arbitrabatur ad ipſam ſuam demonſtrationem ſuis omnibus numeris abſolutam exhibendum; præſertim cùm ex eâ vnâ immediatè ipſi colligenda foret tanto molimine quæſita Quadratura: adeò vt non niſi ægrè Interpreti acquieſcam aſſerenti præter ea, quæ ab Authore hîc ſtatuta ſunt, ad ſpatia hyperbolica recurrendum eſſe: vt veritas citatæ Propoſitionis 44. pateſcat. Vt autem cui fundamento nitatur hic ſenſus meus, appareat, planúmque fiat (quod toti huic diſſertationi non parum lucis impertietur) vnde labendi occaſio nata ſit, breuiter eandem repeto ratiocinationem.

Quoties prima ratio A B continet ſecundam C D: toties ſecunda continet tertiam E F. Sed notum eſt quoties prima A B continet ſecundam C D. Ergo notum eſt quoties ſecunda continet tertiam E F. Maiorem probat Author per Prop. 40. Lib. 10. Oper. Geom, minorem verò per Prop. 43. quâ conſtat rationes primam & ſecundam notas eſſe: quibus notis latere non poteſt; quoties prima contineat ſecundam; & ex eo (ſi modò

dò maior vera eſt) notum euadit quoties ſecunda contineat tertiam.

Itaque, cùm ſecunda nota ſit; etiam tertia E F nota erit. Quod erat demonſtrandum.

Euidentiſſima eſt hæc collectio, ipſáque adeò Propoſitio 44. probanda: ſi admittatur maior illa, quam ex Propoſ. 40. demonſtrat Author. Si enim ſecunda CD nota eſt, notúmque præterea quoties ſecunda hæc contineat tertiam E F; ſiue continentia illa intelligatur ſimpliciter per multiplicitatem, ſiue per multiplicationem: nota fieri poteſt ipſa tertia ratio E F. ſi enim ſecunda ratio continere dicatur tertiam, ſicut & prima ſecundam per multiplicitatem: erit tertia ratio E F, tertia proportionalis duabus primæ & ſecundæ: cuius inueſtigandæ methodus habetur in Examine Quadrat. Lib. 1. Prop. 26. At ſi continentia Intelligatur per multiplicationem: etiam tertia ratio ex notis primâ & ſecundâ iuxta continentiam illam nota fieri poteſt, iuxta methodum à me traditam Lib. 2. Prop. 47. citati Examinis; etſi minùs ea probata fuerit P. Franciſco Aynſcom ob vſurpatam à me *rationis*, loco *Proportionis* vocem: quod ipſi non adeò nouum, nec inſolitum videri debuerat: cùm aliàs apud omnes, apud non paucos etiam num, nec non interdum in Opere Geometrico haſce duas voces idem ſignificare, ac pro eodem accipi ab Ipſo poterat obſeruari. Quia verò (vtrouis ſenſu, ſiue per multiplicationem, ſiue per multiplicitatem reperiatur tertia illa ratio E F) ex eâ deducta Quadratura vitioſa eſt, & à vero aberrat, vt in Examine oſtendi; neceſſariò concludi debet veram non eſſe primam illam totius Argumentationis maiorem Propoſitionem (reliquæ enim veriores eſſe nequeunt) nimirum, Quoties prima ratio A B continet ſecundam C D: toties ſecunda C D continet tertiam E F. Quare accuratè perpendi debet Propoſitio illa 40. vnde maiorem, de qua agitur, deducit Author.

Aſſero itaque veram non videri Propoſitionem 40. Quid ita? quia, cùm in eâ concludatur rationem primam toties continere ſecundam, quoties ſecunda continet tertiam, ex eo quòd Propoſitione præcedente 39. eiúſque Coroll. oſtendiſſet Author rationes omnes partiales rationem primam ſolidi A ad ſolidum B conſtituentes iuxta Propoſitionem 8 Lib. 10. Oper. Geom. quam expoſui Prop. 8. toties continere per multiplicationem rationes omnes partiales, & quidem ſingulas ſingulas, quibus conſtituitur ratio ſecunda Solidi C ad Solidum D: quoties hæ partiales rationem C ad D conſtituentes, continent per multiplicationem rationes partiales; quibus conſtituitur tertia ratio Solidi E ad Solidum F: Verum autem eſſe nequeat, Ipſis etiam illud ipſum aſſerentibus Quadraturæ huius Propugnatoribus; vt ratio-

nes totales ita ſe habeant; vt ſe habent inter ſe rationes partiales, quibus totales ſingulæ iuxta illam Propoſitionem 8. conſtituuntur, ſuprà declaratum eſt: hinc tandem ſequitur, vt omni fundamento, probationéque deſtituatur maior illa Argumentationis Propoſitio. *Quoties prima ratio A B continet ſecundam C D: toties ſecunda C D continet tertiam E F.*

Verùm. Etſi falſa reuerà ſit hæc Propoſitio: veritatis tamen ſpeciem præſe fert tam ſplendidam; vt mentis aciem quamcunque firmiſſimam perſtringendi capax ſit. Cùm enim rationes ſingulæ primam rationem A B conſtituentes, ita ſe habeant ad rationes ſingulas, quibus conſtituitur ſecunda ratio C ad D: hæ verò ſingulæ partiales rationem ſecundam conſtituentes, ita rurſus ſe habeant ad ſingulas rationes, quibus conſtituitur tertia ratio E ad F; ſunt enim tam primæ ſecundarum, quàm ſecundæ tertiarum ſingulæ ſingularum æque multiplicatæ: Quis primo intuitu non facilè ſibi perſuadeat; ſi omnes rationes partiales tam primæ, quàm ſecundæ, & tertiæ coaleſcant iuxta Propoſitionem 8. Oper. Geom. vel vt hîc nuper expoſui, collectis ſcilicet earum terminis, rationem totalem ex primis partialibus rationibus conflatam, ad totalem rationem ex ſecundis partialibus genitam, eandem habere habitudinem; quam habet totalis hæc ratio ad rationem totalem tertiam quam partiales tertiæ conſtituunt iuxta citatam illam Prop. 8. Atque hac veriſimilitudine captum Geometram eximium malim dicere, dum rationem illam tertiam E F notam eſſe & pronunciauit, & probare conatus eſt; eundémque ratiocinatione ſuâ perfectè & abſolutè abſque omni ad ſpatia illa hyperbolica perfugio, illam notam eſſe arbitratum fuiſſe; quàm fuiſſe ratum ea ſpatia ad ſuam adhuc neceſſaria eſſe demonſtrationem. Sic enim dum ſentio, erga virum doctiſſimum æquior videri debeam, cui vnius tantùm lapſûs excuſatione non omnino indigui, vt paulò ante obſeruaui, labem tribuo: quàm ſi aſſererem, ab eo in illâ Prop. 44. & plus propoſitum quàm probatum vellet; & Lectorem eò amandatum; quò aditus nec pateret, nec patere poſſet, neque in mentem illum tentandi cogitatio aliquando veniret: vt ſunt illa ſæpius memorata hyperbolica ſpatia.

Demonſtratio Quinta.

Quam hic allaturus ſum Propoſitionis meæ probationem, haudquaquam aliàs demonſtrationis nomine appellandam cenſuiſſem. Sed, cùm in Examine Quadraturæ eadem ſit à me propoſita quæſtio Lib. 2. Prop. 50. eiúſque ſolutionem ab eo dari debere; qui tertiam illam rationem E ad F ad Quadraturam omnino neceſſariam aſſereret notam eſſe, conceptis verbis declarauerim; eámque à me expoſci, expectari

pectarique profeſſus ſim: Quis iam; quando ſtrenuus huius Quadraturæ fautor, & Authoris Interpres R. P. Aynſcom pro ſuſcepto munere eam exhibere debuerat; eius ne quidem meminerit, meminerit reliquorum à me obiectorum. Quis, inquam, iam ſilentium illud, vel quæſtionem ſoluendi impoſſibilitati vel ſummæ & needum ſubactæ difficultati meritò non adſcribat? concludátque traditam dictæ illius rationis tertiæ inueſtigandæ methodum, ſiue ea ineatur ope ſpatiorum hyperbolicorum, ſiue alio quouis modo, multò minùs ad id (cum longè ſit propoſitâ quæſtione difficilius) aptam eſſe? ac tandem huius meæ Propoſitionis veritatem ſatis euidenter ex eo demonſtratam non agnoſcat? Verùm, vt apertiùs conſtet quodnam ſit huius probationis momentum: obſeruandum eſt, cùm in omnem partem animum citato Examine conuertiſſem; vt quâ tandem arte notam vellet Author Quadraturæ, tertiam illam rationem, aſſequerer; nec quidquam occurriſſet, cui tutò ſentirem acquieſcendum: id tandem eſt à me initum conſilium. Quæſtionẽ propoſui; in quâ omnes conditiones, quas in tertiæ illius rationis inueſtigatione ſupponit Cyclometra, accuratè obſeruarentur; iiſque ſeruatis ab eodem popoſci, vt in caſu propoſito ſuâ illa arte, quæ hactenus me latuiſſet, tertiam rationem ignotam aperiret? Sunto, (inquiebam ad calcem Propoſitionis 50. Libri 2. Exam.) duæ rationes A ad B, & C ad D. vtriuſque termini ex duobus partialibus terminis ſimul additis nati ſunt: quorum ſinguli terminum A conſlantes, ad ſingulos quibus conſtat terminus B, rationem habent toties multiplicatam; rationum duarum ſingulæ ſingularum; quas habent duo termini terminum C conſtituentes, ad duos terminos, quibus conſtat conſequens terminus D: quoties multiplicatæ ſunt rationes partiales, rationem C ad D conſtituentes, rationum partialium, quibus tertia ignota ratio E ad F conſtituitur iuxta ſenſum Propoſitionis 8. Lib. 10. Oper. Geom. qnam Prop. 8. pluribus expoſui. Addebam etiam (quod laborem non mediocriter leuare videtur) rationes duas partiales, quibus conſtat prima ratio totalis A ad B, ita eſſe multiplicatas rationum duarum partialium rationem ſecundam C ad D iuxta Prop. 8. conſtituentium, vt illæ ſint harum duplicatæ: ac proinde hæ etiam ſecundæ, duplicatæ ſint rationum duarum rationem tertiam E ad F conſtituentium. Quærebam igitur, vt mihi exhiberetur tertia ratio E totalis quæ illâ ipsâ arte (ne dicam faciliore) quâ tertia ratio ad Quadraturam neceſſaria reperiri poſſe, notáque eſſe dicebatur; poſſet definiri,

A $18\frac{1}{4}$	C 9	E ....
B $222\frac{1}{4}$	D $95\frac{1}{2}$	F ....

definiri, cùm vtrobique conditiones pares forent. A quo porrò in Examine citatâ Prop. 50. tertiam illam rationem exigebam? A quo expectabam? ab Authore nimirum, ſi difficultates in Examine propoſitas reſponſione dignas cenſuiſſet: aut certe à quocunque, qui eius loco Quadraturam eius tuendam ſuſciperet: vt ſuſcepit tanto Præceptore digniſſimus Auditor R. P. Aynſcom. Quid ergo Is non exhibuit, cùm tam facilè, vt aſſerit, per ſpatia hyperbolica poſſet exhiberi? Quod Ego quidem Argumentum tanti apud omnes ponderis futurum reor: vt Tetragoniſmus non antè fœlicem exitum aſſecutus cenſeri poſſit, etſi cæteræ omnes difficultates ſolutæ forent, quàm huic fuerit ſatisfactum: Quare ex hoc etiam manifeſta eſt Propoſitionis meæ veritas. Vt erat quintò demonſtrandum.

Anacephaleoſis.

Vt quæ paulò fuſiùs ad præcedentis Propoſitionis probationem proſecutus ſum: paucioribus collecta vno ſub aſpectu conſtituam; quo, cuius ſint momenti ſimul vnita pateat euidentiùs: quo etiam difficultates, quas hoc Quadraturæ genus patitur, & faciliùs occurrant, qui eius patrocinium de nouo ſtatuerit ſuſcipere; en vt ſe habeant.

Primò, oſtendi Tertiam rationem ad Tetragoniſmum neceſſariam minimè ab Authore fuiſſe exhibitam, vti exhiberi in terminis debuerat, vt ad exitum perducta iure dici poſſet Quadratura. Cur tamen exhibitam cenſuerit Author per ſolam, quam iniit ratiocinationem ad probationem Propoſitionis ſuæ 44. non inanis à me allata eſt coniectura in ſcholio demonſtrationis quartæ.

Secundò, Demonſtratum aſſerui eandem rationem tertiam cenſeri non exhibitam ab Interprete, eodémque fautore huius Quadraturæ: qui eius rationis cognitionem ex ſpatiis hyperbolicis facilè deduci poſſe, pronunciare contentus; in terminis ipſam non deduxit, vt ex ſuſcepto patrocinij munere poſt impetitam à variis hanc Quadraturam deducere Ipſe maximè tenebatur; ſi abſolutam concedi vellet Quadraturam.

Tertiò, Euidenter oſtendi non modò non facilè tertiam illam rationem ex ſpatiis hyperbolicis innoteſcere poſſe: Sed ne poſſibile quidem eſſe, vt eo modo cognoſcatur. Idémque duplici confirmatione apertiſſima ſtabiliui.

Quartò, Ex ratiocinationis, quâ Author Prop. 44. demonſtrat notam eſſe tertiam rationem, contextu iuxta Interpretis expoſitionem accepto, collegi ratiocinationem totam nutare, nec ſibi conſtare poſſe; cùm continentiæ illius rationum, de quâ tot lites exortæ, ſignificatio in ipſo aliter & aliter ſumatur: Vnde tollitur omnis conſequen

quen

quentiarum ad diſcurſum neceſſaria connexio, & dependentia.

Quintò denique, tertiam eandem rationem à Quadraturæ Interprete minimè notam factam eſſe, nec etiam notam fieri potuiſſe meritò pronunciaui: eo quòd Quæſtioni ſimili, omnibúſque ſeruatis conditionibus à me innumeris propoſitæ non tantùm non ſatisfecerit, ſed ne eius meminerit quidem; etſi à quouis, qui eam rationem tertiam notam eſſe contenderet, etiam atque etiam exegiſſem in Examinis Propoſitione 50. vt eam adduceret; neque eam Geometras, ſi apud Ipſos ſaluum vellet hunc Tetragoniſmum, latere pateretur. Atque ea ferè ſunt capita (alia Aliis fortaſſe occurrent) quæ hanc primam ſummi Geometræ R. P. Gregorij à S. Vincentio Quadraturam in dubium vocare mihi viſa ſunt: cùm ſatis euidenter Propoſitionem ſuperiorem, vnde tota hæc Quadratura pendet, demonſtrare videantur.

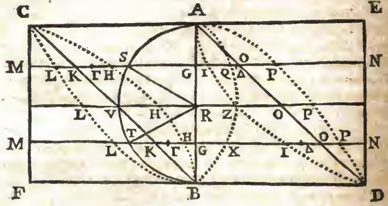
Scholium primum.

Quòd ſi nihilo minùs quempiam in poſterum inceſſat voluntas Quadraturam hanc ex iiſdem Principiis vel tuendi, vel exponendi; ſuadeo vt quam ſuperiùs obiter indicaui ſemitam ſequatur longè tum ſimpliciorem, tum compendioſiorem: quam hîc præſtat paulò pluribus ex Inſtituto declarare.

Oſtenſum itaque eſt Prop. 20. quinque rectangula, quæ ex ſegmentis cuiuſuis lineæ M G N Diagrammatis conſtituuntur eſſe continuè proportionalia. Ea ſunt, vt memoriam eorum refricem, HGI (ſiue Quadratum lineæ G Q) r G △, K G O, L G P M G N. Ex his deinde rectangulis (omiſſo rectangulo r G △ ad hæc inutili) ſolida naſcuntur; ex diuerſis ſuperficiebus in alias ductis, vt citatâ Prop. declaratum eſt. Ad hæc comparata ſunt tria ſolida; quæ ex planis ad axis A B ſegmentum A R adiacentibus ductis generantur; ad alia tria ſolida, quæ generantur ex planis ad eiuſdem axis A B ſegmentum GG, ſegmento A R æquale terminatis: factâ comparatione ſolidorum homologorum; quæ vnico charactere ſunt ſingula deſignata; vt tabella Prop. 27. conſtructa & hîc repetita, repræſentat. Denique, oſtenſum eſt rationem ſolidi A ad ſolidum B rationibus partialibus conſtitui duplicatis rationum partialium rationem C ad D conſtituentium: ſicut & hæ partiales rationem C ad D conſtituentes, duplicatæ ſunt rationum partialium rationem tertiam E ad F conſtituentium. Quæ omnia ex citato loco, vbi fuſiùs exponuntur, repetita ſunt. Iam verò, cùm rationes illæ partiales, rationes ſint rectangulorum ſibi correſpondentium duplicationem inter ſe onſeruantes: eadémque rectangula ex ſegmentis vnius cuiuſque lineæ M G N inter ſe collata,

Digitized by Google

eandem multiplicationem ſiue duplicationem obſeruent: rationes habebuntur totales ſolidorum ex illis proportionalibus rectangulis genitorum, quæ toties per multiplicationem alias totales continebunt iuxta ſenſum Authoris Quadraturæ; quoties hæ continebunt tertias. Rem ob oculos in diagrammate conſtituo.



A. *ex* C A R H *in* A I Z R.	*vel, ex* A R Z *in* A R Z
B. *ex* H G G H *in* I G G I.	*vel, ex* Q G G X *in* Q G G X
C. *ex* A C V R *in* A R O	
D. *ex* G K K G *in* G O O G	
E. *ex* A C L R *in* A P P R.	*vel Cylin. ſuper* A R V
F. *ex* G L L G *in* G P P G.	*vel Cylin. ſuper* G S T G

Rectangula quinque H G I, Γ G Δ, K G O, L G P, M G N ſunt continuè proportionalia. Ergo rectangulum K G O ad rectangulum MGN, rationem habet duplicatam rationis rectanguli L G P ad idem rectangulum M G N. Ratio vero rectanguli Γ G Δ ad rectangulum idem MGN, erit triplicata rationis rectanguli LGP ad idem M G N. Denique, rectangulum H G I rationem habebit ad rectangulum M G N, quadruplicatam rationis, quam habet rectangulum L G P ad idem M G N; ſiue duplicatam rationis, quam habet rectangulum KGO ad Rect. MGN. Quæ omnia conſtant ex proprietate Progreſſionis Geometricæ, quam obſeruant hæc quinque rectangula proportionalia. Cùm ergo; quæcunque ducatur linea MGN, eam ratio-

num,

num, quas rectangula obſeruant, multiplicationem fieri contingat; fiant autem ex rectangulis omnibus ad eadem ſegmenta linearum MGN pertinentibus ſolida; quæ ex ſuperficiebus ad totum axem AB terminatis in alias ſibi reſpondentes ductis, generantur: patet rationes ſolidorum illorum totales continere alias aliorum Solidorum iuxta dictas multiplicationes. Vt ratio Solidi quod fit ex ſuperficie mixta BAGH ducta in mixtam ſuperficiem ABDI ſubalternè poſitam; ſiue Solidi, quod fit ex ſegmēto Parabolico AQZXB in ſe ducto (hoc enim illi eſſe æquale declaratum eſt Prop. 24.) ad Solidū ex Quadrato AF in Quadratum AD ducto genitum, rationibus conſtituitur partialibus toties duplicatis rationum partialiū; quibus conſtituitur ratio Solidi ex triangulo rectangulo ABC in ſubalternum BAD ducto geniti, ad Solidum ex Quadrato AF in Quadratum AD ducto genitum. Ratio verò hæc ſecunda Solidi ex triangulis ſubalternis nati, ad Solidum ex Quadratis ortum conſtituitur ex rationibus partialibus; quæ duplicatæ ſunt rationum partialium: quibus conſtituitur ratio totalis Solidi ex Parabolicâ ſuperficie ACLB in Parabolicam ſuperficiem ſubalternam BAPD ductâ geniti ad ſolidum ex Quadratis AF, AD in ſe ductis genitum.

Hæc cùm ita ſint. Cùm prima ratio totalis Solidi ex ſegmento Parabolico AZB in ſe ducto geniti, ad Solidum ex Quadrato AF in Quadratum AD ducto genitum; & ratio ſecunda Solidi ex triangulo ABC in triangulum ſubalternum ducto procreati ad Solidum ex Quadratis AF, AD ortum notæ ſint: haud dubiè, ſi vera fuiſſent Principia ab eximio Cyclometrâ conſtituta, nota haberetur tertia ratio Solidi ex parabolâ ACLB in Parabolam ſubalternam BAPD ductâ geniti, ad Solidum ex Quadrato AF in Quadratum AD ducto procreatum. Quòd ſi horum ſolidorum ratio nota fieri poſſet; nota continuò foret ratio ſemicirculi AVB ad Quadratum AF. Nam Solidum ex Parabola ACLB in Parabolam ſubalternam BAPD, æquale eſt ſemi-cilyndro, cuius baſis eſt ſemicirculus AVB; altitudo verò eſt AB, vt Prop. 25. declaratum eſt, Solidum verò ex Quadratis ortum, eſt cubus lineæ AB: ergo eiuſdem altitudinis cum ſemi-cilyndro. Ergo ita ſe habet ſemi-cilyndrus ad cubum, vt baſis ſemi-cilyndri, nempe ſemi-circulus AVB ad baſim cubi, ſiue Quadratum AF. per Prop. 11. Lib. 12. Elem.

Ex quibus colligitur, ſi Ars haberi poſſet, quâ ex datis duabus rationibus totalibus primâ & ſecundâ, poſitáque illâ rationum partialium rationes totales conflantium æque-multiplicatione, ratio tertia totalis nota fieret: tunc eam artem vſui futuram non tantùm cùm

Digitized by Google

integræ ſuperficies ad totum axem A B adiacentes, rectiſque duabus CE, FD interceptæ in ſe mutuò ducuntur; tertiáque ratio, quæ inquiritur, eſt ratio totius ſemicirculi A V B ad totum Quadratum A F; verùm etiam, ſi ducantur ſuperficies duabus quibuſuis lineis ad axem perpendicularibus interceptæ: eadem enim in vtroque caſu fieret demonſtratio. Vt ductis duabus parallelis MGN, MGN; haberetur ratio tertia mixtæ quadrilateræ ſuperficiei G S V T G ad rectangulum G M ex duabus notis rationibus primâ & ſecundâ. Illa eſt ratio Solidi ex ſuperficie G Q X G in ſe ducta geniti ad Solidum ex rectangulo G M in ſe ducto genitum: hæc verò eſt ratio ſolidi ex trapezio GKKG in trapezium ducto procreati, ad ſolidum rurſus ex rectrangulo G M in ſe ducto genitum. Et ita de cæteris rationibus, quas inter ſe habent ſolida, quæ ex ſuperficiebus, quas duæ quælibet rectæ lineæ ad axem perpendiculares intercipiunt, in ſe mutuò ductis generantur.

Atque ex his, quod initio aſſerui, manifeſtum eſt. Quàm breuior nempe foret, ſimpliciórque methodus tertiam illam rationem ignotam inueſtigandi hoc modo inita, methodo à Quadraturæ Authore traditâ: quam miror à tanto Geometrâ non obſeruatam fuiſſe: ſe, Lectorémque ſuum non mediocri ſanè labore, quem tam multiplex planorum ductus creat, liberaſſet; nec non planiùs fortaſſe comperiſſet, quod in hac ſuâ primâ Quadraturâ ſubeſſet errandi periculum.

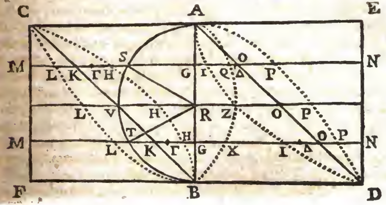
Scolium ſecundum.

Hactenus ſatis multa à me huc adducta ſunt, quæ latæ in Quadraturam primam Libro 2. Examinis ſententiæ æquitatem probare videantur. Aliquid tamen adhuc non-nemo fortaſſe deſideret, vt lis hæc tota compoſita cenſeri poſſit. Quid illud? vt ſcilicet iis, quæ à R. P. Aynſcom in reſponſione ad Examen eiuſdem primæ Quadraturæ allata ſunt, quidpiam reponam. Itaque quamquam ex dictis egregio Quadraturæ huius fautori cumulatè ſatisfieri queat; paucis tamen pleniùs adhuc faciam ſatis.

Obſeruauit R. P. Aynſcom, nec ego quidem diſſentio, quæ contra primam Authoris Quadraturam à me allata ſunt, ad tria potiſſimùm capita reuocari poſſe. Ac primò quidem affero triplicem ſenſum; quo vna ratio alteram continere (quando Author hoc loquendi modo vſus eſt) dici poteſt: quæ rectè intellecta continentia fundamentum eſt; cui nititur tertiæ illius ad Quadraturam tam neceſſario rationis inueſtigatio. Cùm igitur aſſeruit Author rationem primam Solidi A ad Solidum B, toties continere ſecundam Solidi C ad Solidum D; quoties hæc continet tertiam Solidi E ad Solidum F (ſiue Quadrantis circuli A R V ad mixtum Quadrilaterum G S T G) tripliciter intelligi poſſe pronun-

Google

pronunciaui. Senſus enim illius Propoſitionis, vel eſt vt dicantur tres illæ rationes continuè proportionales ſimpliciter & abſolutè, vel vt ſint proportionales ſecundùm multiplicationem: ita ſcilicet, vt prima ratio AB toties ſit multiplicata ſecundæ CD, quoties hæc multiplicata eſt tertiæ EF. qui ſenſus à priore diuerſiſſimus eſt, vt ex duplici continentiæ genere conſtat, quod Lib. 1. Examinis Prop. 24. expoſui. Vel denique ita dicatur prima ratio toties continere ſecundam, quoties hæc continet tertiam; eò quòd prima rationibus partialibus



A. *ex* CARH *in* AIZR. *vel, ex* ARZ *in* ARZ
B. *ex* HGGH *in* IGGI. *vel, ex* QGGX *in* QGGX
C. *ex* ACVR *in* ARO
D. *ex* GKKG *in* GOOG
E. *ex* ACLR *in* APPR. *vel Cylin. ſuper* ARV
F. *ex* GLLG *in* GPPG. *vel Cylin. ſuper* GSTG

conſtituatur toties multiplicatis rationum partialium rationem ſecundam conſtituentium: quoties hæ partiales rationem ſecundam conſtituentes, multiplicatæ ſunt rationum partialium rationem tertiam conſtituentium, ita ſemper intellectâ conſtitutione illâ, vt fert Propoſitio 8. Libri 10. Oper. Geom. Prop. 8. ſuperiore explicata. Quem Ego triplicem ſenſum continentiæ rationum mutuæ ex Ipſius Authoris Quadraturæ verbis, quibus variis in locis vſus eſt dum de eâ loqueretur, ſtudioſè collegi; vt quo tandem ex illis intelligi deberet,

M 3 venarer;

Digitized by Google

venarer; cùm Prop. 44. Lib. 10. aſſerit rationem ſecundam toties continere tertiam, quoties prima ipſam ſecundam continet: ex iis enim ſenſibus tribus vno aliquo intelligi neceſſe eſt; cùm nullum alium agnoſcat Ipſe, nec Ipſi agnouerint duo eius Interpretes R. P. Alphonſus de Saraſa, & R. P. Aynſcom, nec alius præter hos excogitari poſſe videatur. Atque hoc eſt primum ex tribus illis Capitibus, quibus primæ Quadraturæ Examen meum contineri monuit R. P. Aynſom.

Secundum autem Caput in eo conſtituit. Idem Quadraturæ Interpres, quòd reiecerim tanquam abſurdum (vt abſurdum verè eſt, & vt abſurdum Ipſemet reiicit) rationem illam tertiam E ad F, eſſe duabus rationibus A ad B, & C ad D tertiam proportionalem: quòd inſuper amplexus ſim ſecundum mutuæ rationum continentiæ ſenſum paulò antè declaratum, quo aſſeritur prima ratio A ad B, toties eſſe multiplicata rationis ſecundæ C ad D; quoties hæc C ad D multiplicata eſt tertiæ rationis E ad F. hunc ſenſum quomodo amplectar, mox apparebit.

Tertium Caput nihil aliud continet, quàm quòd aſſeruerim ex rationibus partialibus æque-multiplicatis, quibus rationes tres totales AB, CD, EF conſtituuntur, nihil colligi, vnde tertia ratio E F ignota ex duabus notis AB, & C D innoteſcere poſſit.

Ad duo hæc Capita paucis facio ſatis & ita quidem ad poſterius. Nihil verius, quàm me aſſeruiſſe rationes partiales, quibus tres rationes A B, C D, EF conſtituuntur ſeruatâ ſingularum illâ æque-multiplicatione ſuperiùs explicatâ ad tertiam rationem E F ignotam inueſtigandam inutiles planæ eſſe. Cùm enim numero ſint infinitæ; cùm ſint omnes diſſimiles, illas tractandi artem quis norit? quis noſſe poſſit? Nec verò quidquam ex illis collegit Ipſe Quadraturæ Propugnator R. P. Aynſcom, quo tertia hæc ratio E F innoteſcat: quidpiam tamen ex his colligi poſſe innuere videtur in reſponſione ad huius Quadraturæ Examen à me Inſtitutum; ſi modò applicentur ad hyperbolica ſpatia. At, cùm ſpatia huiuſmodi ad dictæ rationis cognitionem aſſequendam planè inepta demonſtrarim ſuperiùs; nec leui coniecturâ ductus oſtenderim non ſatis conſtare an Ipſe Quadraturæ Author de hac eorum facultate in Propoſitionis 44. probatione quam affert, cogitarit; nec demum ab eiuſdem Quadraturæ fautore cognitio illius rationis ex iis deducta ſit, ſed *facilè deduci poſſe* tantùm aſſerta; quod factu impoſſibile euidenter deinde demonſtraui: Quid tandem opis ad Inſtitutum ex huiuſmodi partialium rationum æque-multiplicatione proficiſci poſſe ſperandum eſt?

Cùm ergo, dum Quadraturæ Author aſſeruit ſecundam rationem

C D

C D toties continere tertiam E F quoties prima A B continet ipſam ſecundam C D; id nequeat ita intelligi, vt tertia ratio E F ſit duabus A B, & C D proportionalis; neque etiam ex rationum partialium æque-multiplicatione tertia illa ratio E F deduci poſſit: non mirum, ſi continuò aſſerui continentiam illam rationum ita ab Authore neceſſariò intelligi, vt velit rationem ſecundam toties eſſe tertiæ ignotæ multiplicatam, quoties prima ſecundæ multiplicata eſt. Quod erat alterū caput, ſi enim triplici tantùm ſenſu, vt expoſui, continentiam illam rationum intelligi neceſſe eſt; duobus euidenter excluſis, quid reſtat, niſi vt tertius neceſſariò admittatur, & iuxta eum Authoris Propoſitio expendatur? Quòd ſi ex eo etiam ſenſu abſurdi aliquid contigerit (vt reuerà contingere mihi videor oſtendiſſe, cùm partem toti æqualem eſſe collegi Prop. 48. Lib. 2. Examinis;) quid tunc euidentius eſſe poteſt, quàm huiuſmodi Quadraturæ methodum vitio non carere? cùm quocunque modo intelligatur Author (quando ſuam Ipſe mentem non expoſuit) aliquid ſemper abſurdi incurratur?

Neque verò debuit ex eo quòd fuſiùs expendiſſem an reuerà ex tertiâ ratione ita definitâ, vt eius toties multiplicata foret ſecunda, quoties ſecundam prima multiplicaſſet; ex eo, inquam, non debuit R. P. Aynſcom pronunciare Quadraturam hanc à me non modò non læſam (quod equidem Ego ex animo cuperem) ſed ne petitam quidem, ſiue ne quidem ponderatam; cùm Authoris ſenſus longè alius fuerit. Fuſiùs omninò, & plus quàm dici poteſt, operoſiùs expendi; an tertia ratio illa per æque multiplicationem rationum totalium reperta, foret huiuſmodi; vt ex ea deduci tutò poſset Quadratura. Quid enim ſi breuiùs tractationem expediri non pateretur tot planorum ductus? tot ex ductibus ortorum ſolidorum comparatio, vt tandem præciſæ eorum rationes haberentur? Quid ſi is ſenſus vnicus, reliquis duobus ob abſurda conſequentia reiectis, cenſeri poterat Authoris: nunquid accuratiùs pluribúſque expendendus mihi erat? Nec me latere dici potuit ille mutuæ rationum continentiæ ſenſus; quo rationes partiales ſingulæ rationem primam conſtituentes, dicuntur toties multiplicatæ ſingularum rationum rationem ſecundam conſtituentium: quoties hæ rationes multiplicant rationes rationem tertiam conſtituentes ſecundum Prop. 8. Lib. 10. Oper. Geom. quem Authoris ſenſum fuiſſe aſſerit eius Interpres: cùm eas partiales omnes rationes, earúmque æque-multiplicationem apertè reiecerim Ipſomet Interprete teſte; & ad calcem Prop. 50. Lib. 2. Examinis ſubqueſtus ſim in R. P. Alphonſum de Saraſa; quòd poſt admiſſas rationes illas partiales æque-multiplicatas, non oſtendiſſet; quomodo earum ope colligi

poſſet

poſſet tertia totalis ratio ignota. Me tamen latuiſſe fateor, idque non ſemel hactenus confeſſus ſum, continentiam illam rationum, ſiue totalium: quæ præter æque-multiplicationem earum exigit æque-multiplicitatem, quæ ope ſpatiorum hyperbolicorum definitur; & ex eâ facilè deduci ait Quadraturæ huius fautor tertiam rationem ad Quadraturæ neceſſariam. Sed hæc ſpatia hyperbolica iam ſuprà plus quàm ſatis à me ſunt agitata, & longiùs, vt ad hoc inutilia, amandata.

Ad id porrò, quod R.P. Aynſcom obiicit contra Aſsertionem, quâ dixi Prop. 47. Lib. 2. Exam. propoſitis quantitatibus quinque A, B, C, D, E continuè Proportionalibus; eiſque velut Antecedentibus eodem conſequente G attributo, fieri rationem A G duplicatam rationis C G; hanc verò C G, duplicatam etiam eſse rationis D G: non nihil reponendum videtur. Obiicit ergo falſum id eſse; & verò demonſtrat. Vnde colligit ſententiam à me latam contra hanc primam

A,	B,	C,	D,	E
G,	G,	G,	G,	G

Quadraturam æquam eſse non poſse. Reſpondeo primò. Cùm eximius Geometra iam aſseruiſset me à ſenſu Quadratuæ Authoris aberraſse; non potuiſse eum ſi quid vitij in ratiocinatione ſecundùm falſum ſenſum inſtitutâ commiſſum ſit; ex eo nouum Argumentum haurire, quo oſtendat malè impetitam eſſe Quadraturam: neque enim illam vitium huiuſmodi aliquo modo attingit, cùm in alieno ſenſu ratiocinatio tota verſetur. Reſpondeo ſecundò cautiùs quidem locuturum fuiſſe me; ſi non rationem A G; rationis C G; & rationem C G, rationis D G duplicatam aſſeruiſsem ſed proportionem rationum A G & E G duplicatam eſse proportionis rationum C G & E G: ſicùt rurſus proportionem rationum C G & E G, duplicatam proportionis rationum D G & E G; & ad eam ſuppoſitionem terminos rationum, quas Epilogiſmis meis, determinaui, reduxiſsem ſcopum à me intentum aſsecuturos, vt promptum foret declarare: ſed quàm promptum, tam foret inutile, cùm Quæſtionis ſtatus longè alius ab huius Quadraturæ interprete fuerit conſtitutus. Qui quàm multas, quam graues, & quàm inauditas difficultates patiatur, ex iis licet colligere: quas ſolius veritatis aſsequendæ ſtudio, & nobiliſſimæ diſciplinæ excolendæ cupiditate ductus hactenus expoſui: eóque animo in lucem edi patior; tum vt Geometris aliquod nominis non obſcuri id expoſcentibus morem geram; tum vt faciliùs quempiam aliquando fortaſse nanciſcar primæ huius ab Authore propoſitæ Quadraturæ Aſsertorem (ſi minùs Author ipſe R. P. Gregorius, quem eximium ſui cultorem ſemper agnoſet Geometria, fidem præſtet eius nomine datam à R.P. Alphonſo

de

de Saraſa in confirmationibus Quadraturæ) qui tantarum difficultatum tenebras diſcutiendi negotium ſuſcipiat. Meminerit autem quiſquis illud ſuſceperit, ſe etiam atque etiam rogatum; vt omnes, ne minimâ quidem exceptâ, haſce difficultates expreſſis verbis ita, ſi fas fuerit, diſſoluat; nihil vt (etſi facillimum ſit) ver deducendum, vel colligendum; ſi muneri ſuo feciſſe ſatis cenſeri velit, Lectori committat.

Quod monitum non ad ea tantùm, quæ primam Quadraturam ſpectant, quam hactenus proſecutus ſum, neceſſarium eſt; ſed in iis etiam; quæ deinceps de ſecundâ, reliquiſque duabus huic affinibus exponenda ſunt; eſt obſeruandum, vt exigit huius materiæ, quâ in Geometricis grauior nulla, momentum. Cæterùm, ea præcedentibus breuiora, vti ſpero, planioráque es experturus.

Digitized by Google

PARS SECVNDA LIBRI PRIMI.

In quâ ad latam à me lib. 3. Examinis in ſecundam, tertiam, ac quartam R. P. Gregorij Quadraturas ſententiam Reſponſio à R. P. Franc. Aynſcom propoſita, clarè diluitur; eóque magis Examen ipſum confirmatur, ac promouetur.

PROPOSITIO XXX. *Problema.*

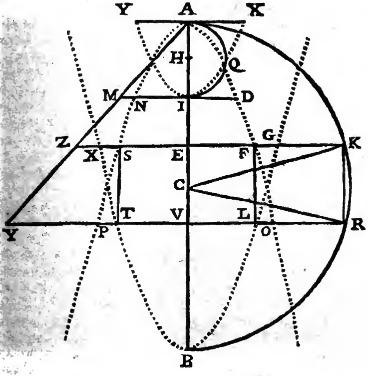
SCHEMA præparemus ad ſecundæ Quadraturæ diſcuſſionem accomodatum.

Conſtructio.

Aliud non poteſt Diagramma ad Inſtitutum parari aptius eo, quod in ipſo Examine eiuſdem Quadraturæ ſecundæ Lib. 3. deſignatum eſt. In eo ſiquidem obſeruari poterit faciliùs, ſi quid in eâ diſcuſſione fortè peccatum ſit; & ex eo faciliùs ad obiectam à R. P. Aynſcom difficultatem reſponderi. Sic igitur ferè citato Lib. 3. Exam. Propoſitionibus aliquot, & præſertim Prop. 9. Schema deſignatum habetur.

In rectâ quapiam lineâ A B, particulæ definiantur hanc inter ſe rationem obſeruantes cenſeatur (neque ad exemplum vt reipsâ ita ſit, opus eſt) A I diuiſa in partes 9: quarum A E ſit 16; & A V 25; at V B iterum 16. Tum circa A B tanquam Axem Parabola deſcribatur P A O; cuius Latus rectum ℞ ſit particula vna ex partibus 9, in quas diuiſa intelligitur A I: eius autem vertex ſit A. huic deinde altera Parabola obuerſa deſignetur æqualis, eiuſdémque Lateris recti, cuius vertex in puncto B ſtatuatur. Tertia denique deſcribatur Parabola Y I X cæteris æqualis, cuius idem ſit Latus rectum, ℞ quod illis aſſignatum eſt. Ad hæc. Per puncta I, E, V lineæ ordinatim ad axem Applicatæ ducantur N I D, S E F, P V O, Tum ſumptâ I M, æquali

li rectæ I A, emittatur ex vertice A recta A M; quæ Angulum ſemirectum in A cum axe A B conſtituet, vt patet. Denique, diuiſâ totâ A B bifariam in C; centro C per A & B ſemicirculus A K R B deſcribatur: diuiſâ etiam A I bifariam in H, centro H deſcribatur ſemicirculus A Q I. Atque hæc tota ferè eſt ſchematis delineatio, quo imposterum vtendum erit.



PROPOSITIO XXXI. *Probl.*

EXponamus in ſchemate proximè deſignato methodum, quam eximius Cyclometra ad quadraturam ſuam ſecundam adhibuit.

Expoſitio.

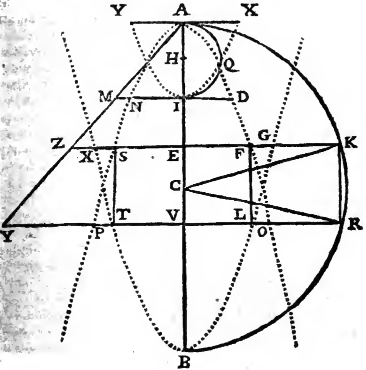
Ne ſtatus quæſtionis, quaùe de re agatur, te tuo cum faſtidio fugiat, hanc ſecundam circuli Quadrandi methodum in primis declara-

ri neceſſe eſt : quam licet vniuerſaliter tradiderit Author Prop. 77. Lib.10. Oper. Geomea tamen in deſignato ſchemate eſt contemplanda; cùm ex eo ſit initum à me Examen, vt Examinis à Quadraturæ fautore aſſumpta impugnatio.

Itaque præter allatam præcedenti Prop. delineationem duc inſuper lineas duas S T, F L connectentes puncta in quibus Parabolæ obuerſæ ſecantur à duabus Applicatis S E F, P V O: Erit autem hæc vtraque linea, æqualis, & parallela lineæ E V. Nam duæ Applicatæ E S, V T; illa in Parabolâ S A F, hæc in Parabolâ T B L; ſunt æquales : eò quòd ex conſtructione ſchematis æqualiter diſtent à ſuo quæque vertice in Parabolis æqualibus : ſunt enim Axis ſegmenta A E, B V poſita æqualia. Ergo per Prop. 33. Lib. 1. Elem. duæ lineæ S T, E V connectentes duas rectas E S, V T parallelas & æquales, æquales & ipſæ ſunt & parallelæ. Eodem modo æquales & parallelæ erunt inter ſe duæ E V, F L. Vtraque porrò S T, F L æqualis erit rectæ A I, cui ex conſtructione æqualis eſt E V. his poſitis.

Aſſerit Quadraturæ Author Prop. 62. Lib. 10. Oper. Geom. ſi ducatur in ſe Parabola A I D, vt fiat Solidum (quod A deinceps appellaturus ſum) ducatur autem & Parabolæ portio F L O in ſe, vt fiat Solidum (quod voco B) tertiò ducatur Parabolæ portio F S P L in ſe; vnde naſcatur Solidum (illud dicito C) ac denique ducatur in ſe Parabola A I N; vnde formetur Solidum D. Rurſus. Si eædem ſuperficies in ſe ducantur ſubalternè, vt alia fiant Solida quatuor : Solidum nimirum E ex Parabolâ A I D in ſubalternam I A Y, ſiue (quod idem eſt) in obuerſam A I X· & Solidum F ex portione F L O in obuerſam portionem F L G : Solidum autem G ex portione F S P L in portionem obuerſam F X T L : denique Solidum H ex Parabolâ A I N in ſubalternam I A X vel obuerſam I A Y. Aſſerit, inquam, Author citato loco, Solida octo ex quatuor ductibus directis, & quatuor ſubalternis genita eam habere inter ſe habitudinem; vt proportio rationis primi Solidi A ad ſecundum B, ad rationem tertij Solidi C ad quartum D, eadem ſit cum proportione rationis Solidi quinti E ad Solidum ſextum F, ad rationem Solidi ſeptimi G ad octauum H. Hæc Solida memoriæ, & confuſionis vitandæ gratiâ in hac Synopſi deinceps interdum conſulendâ intuere. Sed inſuper adde proportionem duarum priorum rationum A B, C D vocandam impoſterùm K L; duarum verò poſteriorum, E F, G H eſſe nuncupandam M N: & harum proportionum proportionalitatem P Q. Ad huius porrò Aſſertionis ſuæ probationem Author non alio vtitur Principio; quàm quod ex Propoſitione ſua 8. Lib. 10. colligitur, vt tota eius ratiocinatio apertè declarat.

Secundò



ductus directus			*ductus ſubalternus*		
A. *ex* A I D	K	P	E. *ex* A I D	M	Q
B. *ex* F L O			F. *ex* F L O		
C. *ex* F S P L	L		G. *ex* F S P L	N	
D. *ex* A I N			H. *ex* A I N		

Secundò. Author Prop. 63. & 64. Lib. 10. modum attingit, quo ſolida illa quatuor A, B, C, D ex ductu orta directo in alia æqualia reduci poſſint: quæ rectilinea ſint, adeóque tum ipſarum quantitas, tum ratio, nota fieri poſſit. Quod vtrumque cumulatè preſtiti Prop. 12. Lib. 3. Examinis. Vbi etiam rationum A B, C D proportionem K L exhibui.

Tertiò. Idem Author reliqua quatuor Solida E, F, G, H; quæ oriuntur ex ductu ſubalterno earumdem ſuperficierum, quæ in ſe directè ductæ Solida quatuor priora genuerant; in alia commutari quidem poſſe indicat Prop. 68. Sed obiter & obſcuriſſimè. Ea ex eius mente & ad ſchema noſtrum appoſitè commutaui Prop. 14. Lib. 3. Examinis: ſingulorúmque quantitatem exhibui, & ſimul rationes EF, G H, rationúmque Proportionem M N.

Quartò. concludit Idem Author Quadraturam hanc ſecundam dari ex eo, quòd oſtenderit eandem eſſe proportionem K L duarum rationum A B, C D, cum proportione M N rationum duarum EF, GH: & præterea, quòd oſtenderit quatuor priora Solida reduci poſſe ad Solida rectilinea; poſteriora verò quatuor E, F, G, H ad alia Solida curuilinea quidem, ſed curuitate circulari. Hinc enim fit (velut Argumentatur) vt habeatur nota ratio cuiuſpiam curuilinei ad rectilineum: quam Lectori inquirendam relinquit non ſine operatione tam prolixâ, difficilique; vt mirum, niſi ſtudioſiſſimus quiſque Geometra tanto labori ſuperſedeat, eóque ipſo in ſuſpicionem iam inducatur Tetragoniſmum hunc tantis obrutum tenebris, nec ab Authore ipſo diſcuſſis, occulto cuipiam defectui obnoxium eſſe. Non parum Ego quidem mihi videor tantis difficultatibus attuliſſe lucis: cùm Solida quatuor poſteriora E, F, G, H, in Solida Cylindracea commutari poſſe demonſtraui Prop. 5. Lib. 3. exam. quorum altitudo Latus rectum foret ℞ non ſecus quàm Idem Latus rectum eſt altitudo Solidorum rectilineorum, in quæ Solida quatuor priora A, B, C, D conuertuntur. Hinc enim fit vt rationes, rationúmque proportiones, quæ alioqui in Solidis illis octo conſiderari deberent; in ipſis eorum baſibus, longè, quàm ſint ipſa Solida, apertioribus; & ad Tetragpniſmum hunc, qui in planis ſuperficiebus totus verſatur, accommodatioribus perpendi queant: cùm per Prop. 32. Lib. 11. Elem. & 11. Lib. 12. eadem ſit ratio priſmatum, & Cylindrorum, Cylindraceorúmque, quorum eadem eſt altitudo; quæ baſium eſt, quibus inſiſtunt. Quæ cùm ita ſint: eadem eſt iuxta Cyclometram ratio Solidi A ad Solidum B, & ratio Solidi C ad Solidum D; quæ eſt baſis Solidi, in quod A conuerſum eſt; ad baſim Solidi ex Solido B profecti. Idem dicito de baſibus ſolidorum; in quæ conuertuntus ſolida C & D: Idem etiam de ſolidorum baſibus, quæ in ſolidorum E, F, G, H, locum ſubſtituuntur. Ita vt omiſsâ omni ſolidorum, & ad ea ſpectantis rationis, rationúmque proportionis mentione; rationum, proportionúmque ad baſes illas pertinentium habitudo debeat obſeruari. Iuxta quæ aſſeret Author Cyclometriæ eandem proportionem eſſe duarum rationum baſium

ſolidorum,

ſolidorum, quæ ſolidis A, B & C, D ex ductu ſimplici ortis ſubſtituta ſunt; cum proportione duarum rationum, quas inter ſe habent baſes ſolidorum; in quæ conuerſa ſunt ſolida E, F, G, H ex ductu ſubalterno genita: hoc eſt, æquales erunt proportiones K L, & M N; iuxta Authorem; qui ex ea proportionum illarum æqualitate Quadraturam colligi poſſe cenſet. Habes hactenus paucis Cyclometræ mentem, quam in Examine paulò fuſiùs proſecutus ſum: ſed hæc ad Inſtitutum noſtrum cumulatè ſufficiunt, qui rudem tantùm aliquam expoſitionem ſtatûs quæſtionis; ne quâ de re agatur, quempiam fugiat, qui aliunde eius cognitionem minimè hauſerit; hîc afferendam cenſui.

PROPOSITIO XXXII. *Theorema.*

ADmitti nullo modo poteſt quadratura è Principiis præcedenti Propoſitione explicatis collectâ.

Demonſtratio.

Hæc Propoſitio ipſamet eſt Propoſitio 16. & 18. Lib. 3. Examinis Quadraturæ: nec alias ad hanc ſtabiliendam probationes affero ab iis diuerſas, cum firmiſſimæ ſint, quas ibidem adduci. Vnum illud hîc tantùm videndum eſt. An ſcilicet aliquid de earum robore detractum fuerit conatu illo non equidem leui, quem ſtrenuus huius Quadraturæ fautor R. P. Franc. Aynſcom exeruit. Verùm, quò perſcrutor accuratiùs, maturiúſque perpendo, quæ ab eo contra Propoſitionem 16. Lib. 3. Exam. citatam (Propoſitionis enim 18. ponderis licèt grauiſſimi, ne mentionem quidem fecit) allata ſunt; eò firmiùs ſtabilitam licet intueri hanc vtramque Propoſitionem meam: tantúmque abeſt, vt à ſententiâ decedam vt nihil mihi magis totam hanc Quadraturam in dubium vocare viſum ſit. Quod ne gratis dictum, fictúmque cenſeatur, rem ipſam mecum pauliſper contemplari ne grauere.

Quadraturam ſuam ſecundam, de quâ nunc agitur, ex eo abſolui cenſet Author; quòd Propoſitione 62. oſtenderit proportionem K L rationum A B & C D (quarum termini nunc, vt paulò ante expoſui, cenſeri debent baſes ſolidorum æqualium ſolidis ex ductu ſimplici planorum in ſchemate ſuperiùs deſignatorum procreatis) æqualem eſſe proportioni M N duarum rationum E F, & G H (quarum etiam termini baſes ſunt ſolidorum ſolidis ex ductu ſubalterno genitis ſubſtitutorum.) At duas illas proportiones K L & M N inæquales eſſe euidenter produnt multiplices Epilogiſmi in Examine non ſine curâ, operáque grauiſſimâ collecti. Ex quibus quid aliud à me ſtatui potuit

tum

tum in Examine Prop. 16. Lib. 3. tum hac 32. quàm totam Quadraturam ſoli æqualitati proportionum K L, & M N nixam ſtare non poſſe.

Deinde Propoſitione 18. Lib. 3. Exam. aliâ euidentiſſimâ ratiocinatione oſtendi, etſi Cyclometræ concederetur duplicem illam proportionem K L, rationum A B, & C D; & proportionem M N, rationum E F, & G H, æqualem eſſe; non hinc tamen ſecuturum, vt rationes ipſæ ſpecificæ innoteſcerent: cùm rationes infinitæ diuerſæ ſpeciei poſſint exhiberi; quibus tamen eadem competat propoſitio. Attamen ad Quadraturam neceſſarium omnino eſt, vt ipſæ rationes E F, G H proportionem fundantes cognoſcantur: vt ex ipſarum terminis inter ſe comparatis quidpiam comperiatur rectilineum; quod ad curuilineum rationem habeat notam, & eorum alterum in alterius formam poſſit conuerti.

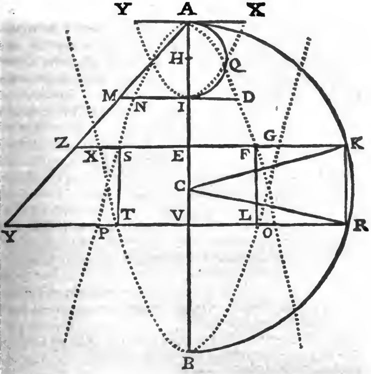
Poſſum hic etiam Argumentum ad hanc confirmandam Propoſitionem grauiſſimum ex eo deducere quòd Cyclometriæ Author hanc æqualitatem proportionum K L & M N colligat ex Prop. ſuâ 8. Lib. 10. per quam rationum ſpecie diuerſarum termini varij adduntur: conflatámque rationem, vt oſtenſum eſt ſuperiùs, confuſam, ignotámque exhibent, viamque ad eius cognitionem aſſequendam præcludunt omnem. Quòd ſi ex Additione terminorum ad rationes ſimplices pertinentium perturbatio huiuſmodi, confuſióque rationum conſequatur; quid in earumdem ita confuſarum rationum proportionibus euenturum cenſeri debet?

Hæc ſi vera ſunt: falſa eſſe non poteſt nec mea hæc Propoſitio, nec Propoſitio 16. Lib. 3. Examinis, ſiue etiam Prop. 18. eiuſdem Libri: adeóque ſecunda Authoris Quadratura in diſcrimine verſatur apertiſſimo. Verùm, illam ab eo liberaſſe ſibi viſus eſt eius Propugnator R. P. Aynſcom in eâ, quam ad citatam Propoſitionem 16. Lib. 3. Examinis, reſponſionem exhibuit: quæ hîc primò referenda, tum perpendenda eſt; vt ſuus veritati, quæ ſola ab vtroque noſtrum peruestigatur, ſaluus ſit locus. In hunc igitur modum dictam Propoſitionem 16. Lib. 3. Exam. quæ cum hac eadem eſt, aggreditur in Reſponſionibus quas ad Propoſitionem 3. Quadraturæ ſecundæ Pag. 141. attexuit.

Reſponſio R. P. Aynſcom ad Propoſitionem 16. Libri 3. Examinis Quadrat. eiúſque demonſtrationem.

Ratiocinatio P. Leotandi (ea eſt, quæ ex inæqualitate proportionum concludit) *legitimè contra Authorem Operis Geom. concludit: ſi in præmiſſis peccatum non ſit. Porrò vbi, & in quo peccatum ſit, adeóque vnde inæqualitas*

qualitas illa proportionum K L *&* M N, *ſiue proportionalitatis* P *&* Q *ortæ ſit, vt melius intelligatur.*



ductus directus			*ductus ſubalternus*		
A. *ex* A I D	K	P	E. *ex* A I D	M	Q
B. *ex* F L O			F. *ex* F L O		
C. *ex* F S P L	L		G. *ex* F S P L	N	
D. *ex* A I N			H. *ex* A I N		

Aduertendum eſt, in quo ductus plani in planum, ex quo Author ſua format Solida, differat à multiplicatione numeri per numerum, quo loco planorum ſupponuntur, vt productus ex illâ numerus ſolidum exhibeat. Nimirum in hoc differt: quòd Authoris ductus ita dependeat à figura & ſitu pla-

Digitized by Google

norum, quæ inuicem ducuntur; vt alterutro mutato, aliud, & mole diuerſum à priori oriatur ſolidum: At verò, iidem numeri quomodocunque inuicem ducti, idem ſemper producant, quod exemplis ſic oſtendo & primò quidem in eo ductu, in quo eâdem ſeruatâ figurâ ſolus mutatur ſitus. Eſto triangulum A I M. (Illud Ego in ſchemate noſtro aſſigno) *hoc ductum in ſe ordinatè, producit pyramidem duplam eius pyramidis, quæ oritur ex ductu eiuſdem trianguli in ſe ſubalternè ducti. Sit ergo idem triangulum A I M numero* 100 *expreſſum: tunc ſiue in ſe ordinatè, ſiue ſubalternè ducatur, cum ſitus eius quantitatem numero* 100 *expreſſam non mutet, eundem numerum ſemper producet.*

Alia ibidem Exempla ſubiicit ad mutationem tum ſitûs, tum figuræ pertinentia: quibus hanc Solidorum quæ ex ductu planorum & numerorum generantur; diuerſitatem, & inæqualitatem oſtendat: ſed pluribus in re clariſſimâ; & quæ à nemine ductûs planorum, numerorúmque multiplicationis non omnino rudi in dubium reuocari poteſt, opus non eſt: hanc admitto, amplectórque veritatem. Quid porrò ex eâ ita admiſsâ & ſuppoſitâ contra hanc meam Propoſitionem 16. Lib. 3. Examinis item meam colligi poteſt? En quid colligi cenſeat. R. P. Aynſcom, dum in hæc verba ſuam ad meum illud Argumentum ex Inæqualitate Proportionum K L & M N petitum, Reſponſionem concludit.

Secunda & maxima cauſa inæqualitatis primam eius cauſam leuiter, pro eo ac meretur, attigit; quam inanem euidenter in Examine oſtendi) *proportionum K L & M N; ſiue terminorum P & Q proportionalitatis earum, eſt, quòd P. Leotaudus quantitates arearum, quibus conſtant plana; ex quorum ductu ſua format corpora, tantùm conſiderarit; numeróſque, quibus illas expreſſerat, in ſeipſos, vel in alios iuxta conſuetas Arithmeticæ leges duxerit, nullâ habitâ ratione in pleriſque figuræ aut ſitûs planorum: à quibus tamen ita dependet Authoris ductus, vt alteruoro mutato aliud planè & mole diuerſum oriatur Solidum, vt antè demonſtraui. Vnde mirum non eſt, quòd tanta inæqualitas inter porportiones K L & M N, ſiue terminos proportionalitatis P & Q reperiatur: cùm in ductibus ferè ſingulis, ex quibus octo illa ſolida nata ſunt, peccatum ſit. Nihil igitur contra Quadraturas euicit P. Leotaudi Examen.*

Hæc citato loco R. P. Aynſcom non tam Quadraturæ quàm veritatis tuendæ ſtudio propoſuit: quo etiam vno ductum me, etiam atque etiam velim in animum inducant Geometræ, & Examen Quadraturarum aliàs inſtituiſſe; & nunc denuo eiuſdem Examinis confirmationes aduersùs obiectas difficultates ſuſcepiſſe: vt ſcilicet è tam obſcuris tot difficultatum tenebris, quibus hoc de circulo Quadrando

Proble

Problema omnium totius Geometriæ celeberrimum obruitur, clariùs tandem emicet, & à candidis veritatis cultoribus & agnoſcatur & propugnetur; ſiue ea à partibus ſtet Quadraturæ (quod votis omnibus exoptarem) ſiue ab eâ (quod pertimeſco) ſit aliena: Id porrò videndum nunc eſt.

Ac in primis quemadmodum huius Quadraturæ ſecundæ Examen Libro 3. à me initum, à R. P. Aynſcom non lectum eſſe aſſerere non poſſum; ita, minimè, aut valdè leuiter eſſe perpenſum, adducor vt credam; credam etiam hanc contra Epilogiſmos à me aduersùs Quadraturam collectos reſponſionem, haud quaquam Quadraturæ Authori R. P. Gregorio fuiſſe priùs quàm ederetur, communicatam adeò facilis & expedita à me, à quouis alio, qui Examinis mei Librum 3. perlegiſſet, reſponſio danda videri poterat, vno quippe ferè verbo comprehenſa. En ipſam. Nulla eſt à me numerorum inita multiplicatio in totâ Propoſitionis 16. Libri 3. probatione, quæ Solidis ex variorum planorum ductu genitis apprimè non conueniat, eorúmque veram quantitatem non exprimat. Quo proinde fiat, vt inæqualitas illa proportionum K L & M N non numerorum multiplicationi, ſed ipſis Solidis, quorum rationes eandem non ſeruant proportionem, accepta referenda ſit. Quod eò maiori cum libertate aſſerere mihi licet; quo magis cuilibet præſtò ſunt tabulæ, quibus probari poſſit Aſſertio mea: neque enim niſi his prolatis fidem mihi adhiberi volo. Conſulat quiſquis hac de re certior fieri expetierit, Epilogiſmos citato libro 3. Examinis à me collectos, quibus Solida illa octo exprimuntur; Ipſe ſibi non ſine voluptate, vt ſpero, ſatisfacturus eſt. Atque hæc, breuis licèt, Reſponſio obiectis à R. P. Aynſcom plus quàm ſatis debet ſatisfacere. Verùm, vt Geometram veritatis ſtudioſum, in hac præſertim tam celebri, támque agitatâ materiâ, omni labore leuem; quem in expendendis ratiocinationibus meis ſuſcipere ipſi incumberet: & vt quæſtionem hanc ita dirimam; vt nulla, ſi fas fuerit, in poſterum de eâ dubitandi occaſio reliqua fiat: veſtigia poſtmodùm rurſus teram; quibus Libro 3. Examinis inſtiti, numeróſque meos cum Solidis ex ductu planorum genitis conferam. Ad quæ, ante quam venio, lubet paucis velitari.

Ac primò. Mirari ſatis nequeo erudito Geometræ R.P. Franciſco Aynſcom, poſtquàm aſſeruiſſet *In ductibus ferè ſingulis ex quibus octo illa Solida nata ſunt, à me peccatum eſſe*, in mentem minimè veniſſe illud Sereni Effatum celebre, quod Ipſe aliàs merſennianam illam Quadraturæ cenſuram refellens, ad rem aptiſſimè propoſuit; Nimirum *Abſurdum eſſe Geometras de Problemate Geometrico ſine Demonſtra-*

O 2 *tione*

tione quidquam affirmare. Ego quippe, cuius intereſt, Alius quiuis Geometra veritatis ſtudioſus exigere ab eo meritò poſſe videbamur: Vt illius ſententiæ ſatis grauis cauſam aperiret: ne alioqui quàm facilè pronunciata eſt, tam facilè reiiceretur. Vnicum ſatis erat Exemplum, in quo vitium aliquod obſeruaretur in Solidi conſtitutionem irrepſiſſe; vt reliquorum omnium conſtitutio damnaretur: & ex eo inæqualitatem illam Proportionum K L, M N, proficiſci crederetur; atque adeò Quadratura ex eo capite omni periculo vacare cenſeretur.

Secundò. An non debuit vt Quadraturæ huius propugnatoris munus egregiè præſtaret R. P. Aynſcom, vbi in Solidi alicuius eorum octo quantitate per numeros exprimendâ errorem comperiſſet; methodum exhibere quâ veri numeri obtineri poſſent, quibus illud exprimi deberet. Imò. Nonne ipſarum proportionum K L & M N; aut terminorum proportionalitatis P, Q æqualitatem, vnde Quadraturæ ſoliditas conſtaret euidenter, numeris iuxta methodum à me initam, debuit explicare. Nihil certè ad hanc tuendam Quadraturam afferri poterat efficacius, ponderiſque maioris: aut quod Geometriæ cultoribus ſatisfaceret cumulatiùs; vt ad eam conuellendam nihil efficacius reperiri queat, quàm numerorum illa Inæqualitas; quibus exprimi declaraui proportiones K L & M N, aut etiam proportionalitatem P, Q.

Tertiò. Cùm Libro 2. Examinis, dum Quadraturam primam expenderem, tot Solidorum, quæ ex variorum planorum ductu generantur, quantitatem numeris exhibuerim; quos non aliter, quàm quos in huius Quadraturæ ſecundæ Examinè protuli, à me definitos eſſe manifeſtum eſt: quid cauſæ tandem fuit, cur Quadraturæ vtriuſque Interpres & patronus R. P. Aynſcom non eodem Argumento ex numerorum Solida per ductum genita exprimentium falſitate deducto vſus eſt ad primam illam Quadraturam ſtabiliendam: quo ad hanc ſecundam vti libuit? præſertim cùm ieiuna ſatis, frigidáque foret, quam affert, reſponſio ad ea; quæ à me obiiciebantur contra primam Quadraturam illam Argumenta: quòd nimirum Authoris ſenſum minimè fuiſſem aſſecutus; aſſecutus tamen omnes fuiſſem, vt ipſe refert; ex quibus pendi poteſt illa prima Quadrandi methodus? obſeruauerit fortaſſe me in primæ Quadraturæ Examine Solida ſingula, quæ ex planorum ductibus ſanè multis & difficilibus oriuntur, Geometricè primùm, tum Arithmeticè exhibuiſſe, verámque eorum quantitatem numeris debitis determinaſſe. At hæc eius obſeruatio ad Solida debuerat extendi, quæ ad huius Quadraturæ ſecundæ diſcuſ-

ſionem

ſionem à me propoſita ſunt: cum eâdem planè methodo vtraque ſint numeris definita. Sed hæc ad velitationem ſatis, quam pondere non carere æquus quilibet rerum æſtimator iudicabit.

Accedo nunc ad Propoſitionis meæ hîc allatæ probationem, ſiue Propoſitionis 16. Lib. 3. Examinis mei Quadrat. defenſionem, quam hoc loco me ſuſcepturum nuper fidem dedi. Hanc autem, ſic habeto, non niſi inuitus aggredior. Quî enim eam lubens aggrediar; quæ in eo ſita ſit vniuerſa; vt oſtendam Geometram eximium, cuius in mathematicis totâ ſuâ Quadraturarum Geometricâ deductione tam rara facultas elucet, perperam aſſeruiſſe numeros, quibus ſolida ex ductu planorum genita expreſſi, cum verâ eorum ſolidorum quantitate non conuenire? leuiúſque, quàm res ferret, tam Solidorum, quàm ea exprimentium numerorum generationem perpendiſſe? ac demum, quod aſſeruit, prolatis tabulis falſum eſſe compertum? Verùm in hoc Ego veniâ præ Ipſo dignus videar: cùm mihi ea, quæ protuli (ſi ab iis ſtet veritas) contra aggredientem quemlibet tuendi ius competat: nec aliud exigam (quod nemo non cenſebit æquiſſimum) quàm vt illa, Solida numeris exprimendi methodus denuo in medium adducta, & in actum denuo reuocata, Paulò áttentiùs perpendatur: vt tandem emergat tandiu quæſita hac in controuerſiâ veritas.

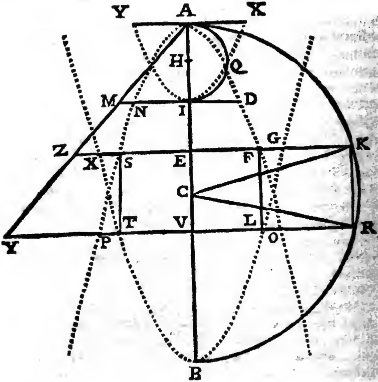
In primis ergo ſchema Prop. 30. delineatum totius cauſæ ſtatum complectens reſumendum eſt: quod idem eſt ſchema iuxta quod huius ſecundæ Quadraturæ Examen Libro 3. Exam. inſtitutum eſt à me; vnde fuſior ſingulorum, quæ hîc afferam, declaratio, ſi fortè cuipiam hæc ſatisfaciam, hauriri poterit.

Primò ergo notæ ſupponi debent lineæ aliquot: quæ vel ex conſtructione definitæ ſunt, vel ex iis in conſtructione definitis facilè deduci poſſunt. Has omnes in appoſitâ ſynopſi intuêre.

℞ *Latus rectum*	1	V O, V P	5
A B	41	E F, E S	4
A V, V Y,	25	I D, I N	3
A E, E Z	16	*Semiſſis arcûs* A QI	706860
A I, I M	9	*Maior vero; at minor*	706858
AH, IH; EC, VC	45	*Semiſſis arcûs* A K R B	3220140
C A, C K, C R	205	*Maior vero, at minor*	3220128
E K, V R	20		

Obſerua lineas V O, E F, I D rectè determinatas eſſe: eò quòd

V O per Prop. 11. Lib. 1. Apoll. media ſit proportionalis inter A V 25, & Latus rectum ℞ 1. Similiter E F media ſit inter A E 16 & idem Latus ℞ 1. Idem de Applicata I D cenſeto. Obſerua præterea rectas A H, I H &c. fractionibus exprimi decadicis, ſicut & rectas C A, C K: Sicut



ductus directus			*ductus ſubalternus*		
A. *ex* A I D	K	P	E. *ex* A I D	M	Q
B. *ex* F L O			F. *ex* F L O		
C. *ex* F S P L	L		G. *ex* F S P L	N	
D. *ex* A I N			H. *ex* A I N		

(In the box, braces join A–B into K, C–D into L, and K–L into P; E–F into M, G–H into N, and M–N into Q.)

etiam ſemiſſes arcuum A Q I, A K R B, ſiue pars quarta totarum circuli perimetrorum; quæ vtraque quantitas definitur Prop. 10. Lib. 3.

Digitized by Google

3. Exam. poſitâ enim circuli diametro 1; perimeter eſt 3 1'4160 maior verâ; verâ autem minor 3 1'4159. Ergo poſitâ diametro A I 9, perimeter erit 28 2'7440, & 28 2'7431: huius autem perimetri tam maioris verâ, quàm verâ minoris quarta pars, ea ipſa eſt quam tabella refert. Nec aliter determinata eſt quarta pars perimetri circuli totius AKRB; cuius diameter eſt A B 41. Atque hæ ſunt lineæ ferè omnes: quarum aliquam mentionem in ſequentibus fieri neceſſe erit; quas in citatâ Prop. 10. Lib. 3. Examinis paulò fuſiùs determinatas reperies.

Secundò. Planorum aliquot definito hîc non poteſt præteriri ex Prop. 11. Lib. 3. Exam. deſumpta prout hæc tabella refert.

Triang. A I M	405'		318'0820
Trapez. E Z Y V	1845'	Semic. A Q I	
Rectang. E L	36		318'0811
Parab. F L O	$4\frac{2}{3}$		1830'2924
Planum E F O V	$40\frac{2}{3}$	Plan. E K R V	
			1830'2890

Paucis horum planorum generationem expono, ne graue forté ducas citatum Examinis locum conſulere.

Triangulum A I M 405' gignitur ducto latere A I 9 in lateris I M ſemiſſem 45'.

Trapezium E Z Y V 1845' fit ducto latere E Z 16 in latus E V 9, & ad genitum 144 addito triangulo A I M 405'.

Rectangulum E L 36 naſcitur ex E V 9 in E F 4.

Parabolica portio F L O habetur; ſi ex tota Parabola P A O 166 $\frac{2}{3}$ dematur Parabola S A F 85 $\frac{1}{3}$ (hæ areæ inueſtigantur in Examine) vt reliquum fiat planum mixtum S F O P 81 $\frac{1}{3}$ cuius ſemiſſis 40 $\frac{2}{3}$ erit planum E F O V (quod etiam hîc erat inueniendum) à quo ſi dematur Rectangulum E L 36, reliqua fiet portio Parabolica F L O 4 $\frac{2}{3}$.

Semicirculus A Q I, & Quadrilaterum E K R V cum prolixam magis, quàm difficilem exigant inueſtigationem: præſtat ex examine eam repetere.

Tertiò. Ex definitâ proximè tum Linearum, tum Planorum in numeris quantitate ad Solidorum quantitates in numeris item definiendas accedo; ex quibus notis nec rationes nec rationum proportiones, aut proportionum proportionalitates poterunt ignorari. Atque hoc eſt caput,

Digitized by Google

ſubiectum Rect. E L concipi debet; motúque ſecundum latera E F, V L pergente, donec ad latus F L peruenerit. Atque hoc parallelepipedum, primum eſt Solidum: quod ex ductu generari contingit numeriſque inter ſe ductis à me expreſſum eſt: de quo, ante quàm ad reliqua pergo, à Quadraturæ Propugnatore pauca quæro.

Quæro itaque primò à P. Aynſcom num cenſeat & admittat ex illo ordinato ductu Rectanguli E L in ſe iuxta ſitum paulò antè declaratum, parallelepipedum produci: cuius baſis ſit Rectangulum E L, & altitudo E F? Admittet omnino, cùm ipſa prima à Præceptore ſuo R. P. Gregorio allata Propoſitio Libro de ductibus id euidenter oſtendat: nec res ſit alioqui tam abſtruſa; quin eam concipiat trium dierum Geometriæ Tyro. Quæro rurſus num cenſeat & admittat Parallelepipedi illius Quantitatem rectè numeris exprimi: ſi eius baſis E L numero 36 rectè expreſſa, ducatur in altitudinem E F numero 4 rectè item expreſſam; ac proinde eam quantitatem numero 144 ex multiplicatione numerorum 36 & 4 procreato? Quis, inquiet, rem tam claram, támque tritam in dubium reuocet? ita cenſeo, ita admitto. Cenſet igitur & admittit in hoc ſaltem caſu à me rectè eſſe definitam per numerorum multiplicationem quantitatem Parallelepipedi; quod ex ductu Plani rectanguli E L in ſeipſum ordinatè ducitur: atque adeò fatetur hunc ipſum caſum minimè complecti noluiſſe ſuâ illâ ſententiâ, quâ pronunciauit *in ductibus ferè ſingulis, ex quibus octo illa ſolida nata ſunt, à me peccatum eſſe; nec vllam à me habitam rationem ſitûs, vel figuræ planorum quæ in ſe ducuntur.* Sed præterea Ipſum fateri neceſſe eſt (contrà quàm longâ illâ, multiplicique inductione ſuadere videtur) haud quaquam in hoc eodem caſu à me multiplicatum eſſe numerorum; quo quantitas alterius planorum, quæ in ſe ducuntur, exprimitur, per numerorum alterius plani aream deſignantem. Neque enim Rectanguli E L aream 36 per alterius Rectanguli E L aream eandem 36 multiplicaui; quo modo ſoliditas facti per ductum Parallelepipedi exprimeretur hoc numero 1296. Sed multiplicandam dixi aream 36 Rectanguli E L, quod eſt baſis Parallelepipedi per eiuſdem Parallelepipedi altitudinem E F quæ eſt 4. Vnde naſcitur Parallelepipedi ſoliditas 144 longè minor numero illo 1296; cuius hic 144 nona tantùm pars eſt. Huius ergo ſolidi area, quod primum ex ductu plani in planum naſci contigit; rectè per multiplicationem numeri in numerum inueſtigata eſt. Vnde iam cuilibet fas ſit augurari, quid in ſolidis reliquis, quæ per ductus generantur, numero exprimendis à me præſtitum ſit: neque enim tam citò mei immemor à methodo rectè ſemel initâ deſciuiſſe æſtimari debeo. Quod vt reipsâ comprobrem, ad reliqua pergamus.

P In

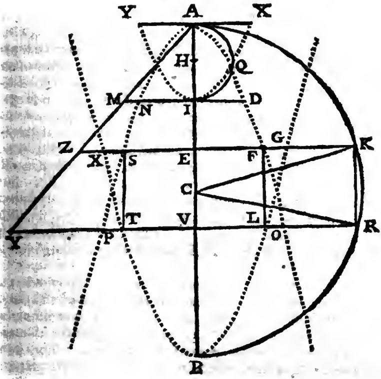
In eo verſamur, ſi meminiſti, vt inquiratur ſoliditas corporis ſecundi B: quod producitur ex portione Parabolicâ F L O in ſe ductâ. Quam ſoliditatem conſequi me poſſe ſpero ope ſolidi; quod fit ex ductu Quadrilateri mixti E F O V in ſe ducti. Hoc enim cùm ſit æquale ſolido, cuius baſis eſt trapezium E Z Y V 1845 & altitudo Latus Rectum 1, adeóque ipſum notum ſit; ſit nimirum 1845; notum etiam eſt ſolidum ex Quadrilatero mixto E F O V in ſe ducto genitum. Hoc verò ſolidum æquale eſt per Prop. 199 de ductibus vt ſuperiùs ratiocinari cœperam, ſolido ex Rectangulo E L in ſe ducto; & ſolido ex portione F L O in ſe; tum ſolido ex Rectangulo E L in portionem F L O bis ducto genitis. Solidum autem ex Rectangulo E L in ſe ducto genitum rectè, vt demonſtraui, in Examine deſignatum erat numero 144. Atque eò loci peruenerat inita ratiocinatio; quam abrumpere neceſſe fuit ad ſolidum ex Rectanguli E L in ſe ductu genitum diſcutiendum. Nunc eandem reſumo ex eodem citato loco Examinis, vbi ita habetur.

Solidum ex Rectangulo E L bis ducto in Parabolam F L O habetur; ſi altitudo E F 4 ducatur in duplum Parabolæ F L O, quod duplum eſt 9 $\frac{1}{3}$: vel (quod idem eſt) ducatur altitudo E F 4 in Parabolam F L O 4 $\frac{2}{3}$, productúſque numerus 18 $\frac{2}{3}$ duplicetur: vtrouis enim modo habebitur numerus 37 $\frac{1}{3}$, exprimens ſolidum ex ductu Rectanguli E L in Parabolam F L O bis ſumptum. Quòd ſi numerus hic 37 addatur ad priorem 144, quo Solidum ex Rectangulo E L in ſe ducto genitum exprimitur; fiet numerus 181 $\frac{1}{3}$: qui ſi dematur ex numero 184 5′, ſiue 184 $\frac{1}{2}$ (æquales enim ſunt huic numero 184 adhærentes fractiones, decadica 5′, & communis $\frac{1}{2}$) quo exprimitur quantitas Solidi ex Quadrilatero E F O V in ſe ducto geniti; reliquus fiet numerus 3 , quo deſignatur Solidum ſecundum B ex Parabolicâ portione F L O in ſe ductâ genitum.

Cernis hic rurſus in ductu Rectanguli E L in Parabolam F L O accuratè à me habitam rationem tam ſitûs, quàm figuræ amborum, quæ in ſe mutuò ducuntur, planorum. Cernis etiam, vt quantitatem definirem Solidi, quod ex Rectangulo E L in Parabolam F L O ducto generatur; haud quaquam aream 36 rectanguli E L, & aream Parabolæ F L O 4 $\frac{2}{3}$ mutuò me multiplicaſſe (quod ſuâ Inductione ſuadebat P. Aynſcom à me in totâ ratiocinatione meâ commiſſum, quod vel per ſomnium à me commiſſum puderet) ſed multiplicaſſe me aream 4 $\frac{2}{3}$ Parabolæ F L O tanquam baſim Solidi futuri per Latus E F Rectanguli E L quod in Parabolam ducitur. Naſcitur enim (ſi rectè ductuum methodum concipio) ex rectangulo E L in Parabolam F L O

ducto

ducto Solidum; cuius baſis eſt ipſa Parabola F L O, altitudo verò eſt Latus E F Rectanguli E L. Multiplicatâ autem baſi per altitudinem, ſoliditatem produci corporis illius quis ignorat? Quare, cùm laudatus



ductus directus			*ductus ſubalternus*		
A. *ex* A I D	K	P	E. *ex* A I D	M	Q
B. *ex* F L O			F. *ex* F L O		
C. *ex* F S P L	L		G. *ex* F S P L	N	
D. *ex* A I N			H. *ex* A I N		

Quadraturæ huius Patronus aſſeruit *In ductibus ferè ſingulis, ex quibus octo illa Solida nata ſunt, à me peccatum eſſe nec; vllam à me habitam eſſe rationẽ ſitûs, vel figuræ planorum, quæ in ſe ducuntur; vel eorumdem pla-*

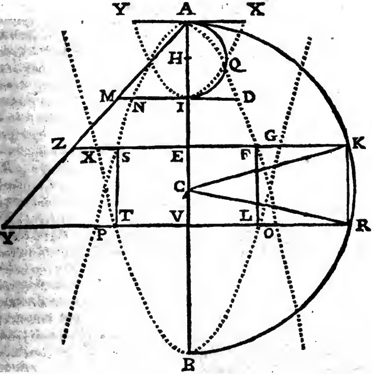
norum areas ipſas à me multiplicatas, vt Solidi ex eorum mutuò ductu geniti quantitas numero expreſſa obtineatur: haud dubiè caſum etiam hunc ab huiuſmodi cenſurâ aut excepit, aut excipere debuit. Sed nec ſequentem, qui in determinando ſolidum tertium C occurrit, eâdem ſententiâ potuit condemnare. Sic enim in Examine Prop. 12. Lib. 3. Pag. 245. Solidi illius C quantitatem ad numeros reuocare conatus ſum.

Corpus denique C, inquio, ex ductu plani F S P L in ſe ducti genitum, eâdem ferè methodo notum euadet. Cùm enim planum hoc in duas partes diuidatur à linea E V: erit per Prop. 199. ductuum, Solidum C quæſitum æquale Solido ex ductu Rectanguli E L in ſe, genito: quod iam inuentum eſt (*& quidem, vt paulò antè oſtendi, debitâ methodo.*) numero 144 deſignatum: & Solido ex ductu in ſe ſegmenti E S P V, quod eſt 1845': & denique Solido, quod fit bis ex Rectangulo E L in ſegmentum E S P V ducto, hoc eſt, quod naſcetur ex lineâ E F 4 bis ſumptâ, ſiue ex numero 8 in ſegmentum E S P V, ſiue E F O V $40\frac{2}{3}$ multiplicato: quâ multiplicatiene producitur numerus $325\frac{1}{3}$. Tres ergo hi numeri 144, 1845' (ſiue 184') $325\frac{1}{3}$, ſi ſimul addantur; colligetur numerus $653\frac{1}{3}$ exprimens ſolidum C, ex ſegmento Quadrilatero mixto S F L P in ſe ducto genitum. Hæc habeo citato loco Examinis.

In huius Solidi tertij C procreatione per numeros abſoluendâ occurrit Solidum numeris exprimendum: quod fit ex ductu Rectanguli E L in Quadrilaterum E S P V. Attendatur igitur quo numero; quoúe modo, genito, illius Solidi quantitatem expreſſerim. Numero $325\frac{1}{3}$ expreſſi eius duplum: ergo ſemiſſis $162\frac{2}{3}$ ipſum foret Solidum ex Rectangulo E L in Quadrilaterum E S P V ducto natum. At, vt hic numerus $162\frac{2}{3}$ quantitatem dicti Solidi exprimens haberetur; nunquid præcepi, vt Rectanguli E L area 36 in aream $40\frac{2}{3}$ Quadrilateri E S P V duceretur, vt ſuppoſuit Quadraturæ fautor? neque per ſomnium aſſerui ita definiri Solidi ex eo ductu geniti quantitatem. Aſſerui duci debere illius Solidi altitudinem E F 4 in baſim quadrilateram E S P V $40\frac{2}{3}$. Ex quâ multiplicatione nemo non nouit numerum naſci, qui ſoliditatem corporis ex tali ductu procreati repræſentet.

Ex his ergo habemus hactenus quatuor illa priora ſolida A, B, C, D; quæ ex ordinato, ſiue ſimplici ductu plani in planum generantur, debitis numeris verâmque eorum quantitatem exhibentibus à me fuiſſe deſignata; nec vllo modo poſſe in numeros à me definitos cadere, quod monuit R. P. Anſcom cuius verba ſuperiùs retuli; *differre ſcilicet*

ſcilicet ductum plani in planum, quo ſua Solida Quadraturæ Author format à multiplicatione numeri per numerum, qui loco planorum ſupponuntur. Ita ſiquidem ductus, inquit, *pendet à figurâ & ſitu planorum, quæ ducuntur;*



ductus directus		*ductus ſubalternus*	
A. *ex* A I D } K } P		E. *ex* A I D } M } Q	
B. *ex* F L O		F. *ex* F L O	
C. *ex* F S P L } L		G. *ex* F S P L } N	
D. *ex* A I N		H. *ex* A I N	

vt altero mutato, alind mole diuerſum à priori oriatur Solidum. At verò ijdem numeri quomodocunque inuicem ducti, idem ſemper producunt. Quod Exemplis demonſtrat: tum his conformem ſubdit concluſionem.

Digitized by Google

Maxima cauſa inæqualitatis terminorum proportionalitatis P Q eſt, quòd à P, Leotaudus quantitates arearum, quibus conſtant plana; ex quarum ductu ſua format corpora, tantùm conſiderarit, numeróſque, quibus illas expreſſerat, in ſe ipſos, vel in alios iuxta conſuetas Arithmeticæ leges duxerit nullâ habitâ ratione ſitûs aut figuræ planorum &c. Quàm longè aliena ſint hæc & à praxi multiplicationis, quâ vſus ſum, & à verbis; quibus eam expoſui; potes; mi Lector, ex ſuperioribus, aut ex ipſo Examine, vel leuiter inſpecto iudicare. In eo enim Solida per ductus Geometricè conſtituta conſideraui: nec vnquam numeros, quibus planorum, quæ ducuntur, deſignantur areæ, alterum per alterum multiplicaui: ſed Solidi cuiuſuis Geometricè per ductum plani in planum efformati baſim per eius altitudinem ſemper duxi. Quare ſi tanta obſeruatur inæqualitas Proportionalitatis P Q; cuius, ſi vera foret hæc Quadratura, ſumma eſſe deberet æqualitas; ne eam quæſo, quiſquam cenſeat proficiſci ex eo, *quòd in ductibus ferè ſingulis, ex quibus octo illa Solida nata ſunt; à me, dum varias multiplicationes neceſſarias inſtitui, peccatum ſit,* Cùm ſaltem quatuor priorum Solidorum ordinato ductu genitorum quantitas numeris ſit à me rectè deſignata. Sed nec vllius quidem poſteriorum Solidorum quatuor E, F, G, H, ex ductu planorum ſubalterno genitorum quantitas numeris per multiplicationes repertis eſt à me falsò conſtituta: vt cuilibet generationem numerorum, quibus priora quatuor Solida deſignari aſſerui, perpendenti manifeſtum eſt: cùm ex iiſdem, & eorumdem numerorum multiplicationibus eorum quantitas determinetur. Quod tum in eorum gratiam, in quorum manus meum non peruenit Examen; tum, ne quid aliunde repetendum ſit) quod ad abſolutam hanc tractationem deſideretur; iuuat hîc explicare.

Itaque. Solidum primum E, & quartum H: quorum vtrumque naſcitur ex ductu ſubalterno Parabolæ A I D; nullâ egent multiplicatione numerorum, qui ex planis in ſe ductis vllo modo pendeant. Eſt enim hoc vtrumque ſolidum æquale ſemi-cylindro, cuius baſis eſt ſemicirculus A Q I, & altitudo Latus rectum, vt Prop. 5. Lib. 3. Examinis declaraui. Quare cùm Latus Rectum ſit 1, ſemicirculi verò A Q I area ſtatuta ſit ſuperiùs 318'0870 maior verâ, & 318'0861 verâ minor; Erit vtrumque hoc ſolidum numeris debitis expreſſum, vel 318'0870, vel 318'0861. Latus enim Rectum cùm ſit 1, baſim A Q I, quam multiplicat, non immutat.

Solidum ſecundum F, quod oritur ex ſegmento F L O in ſe ſubalternè ducto, in quantitate diſcretâ innoteſcet; ſi ex Solido, (cuius baſis eſt mixtum Quadrilaterum E K R V 183'02924 maior verâ;

&c

& 183ò2896 verâ minor; & altitudo Lactus Rectum 1. quod baſim multiplicando, ſolidúmque generando non immutat, (hoc porrò Quadrilaterum nuper definitum eſt)dematur ſolidū, quod fit ex eodē Rectangulo E L in ſe ducto, & quod fit ex eodem Rectangulo E L bis in planum parabolicum F L O. Qui vterque ductus horum planorum iam ſuprà abſolutus eſt, dum Solidum B quærebatur, inuentáque ſunt duo ſolida 144, & 37 $\frac{1}{3}$: quæ ſimul addita conſtant numerum 181 $\frac{1}{3}$: qui demi debet ex cylindraceo, baſi Quadrilateræ mixtæ E K R V inſiſtendi ad altitudinem Lateris Recti 1. hoc eſt, ex baſi proximè aſſignatâ. Eſt enim Cylindraceum huiuſmodi æquale ſolido: quod fit ex Parabolicâ portione E F O V in ſe ſubalternè ductâ, vt oſtendi Lib. 3. Examinis Prop. 5. Solidum autem ex eâ portione natum, æquale eſt per Propoſitionem 199 ductuum, ſolido ex Rectangulo E L in ſe ducto; ſiue parallelepipedo; cuius baſis eſt Rectangulum E L, & altitudo E F: & Solido bis, quod ex eodem Rectangulo ducto in portionem Parabolicam F L O naſcitur; ſiue ſolido, cuius baſis eſt portio F L O, & altitudo E F (nec refert, vt in Examine declaraui, quòd hæc portio in ſe ſubalternè ducatur) & denique ſolido ex portione parabolicâ F L O ductâ in ſe ſubalternè. Quare, ſi ex notâ quantitate portionis parabolicæ E F O V in ſe ſubalternè ductæ dematur duplex illa quantitas, (quæ ſimul eſt 181 $\frac{1}{3}$, reducíque debet ad fractionem decadicam 181ʒ'3333 per Prop. 38. Lib. 2. Inſtitutionum mearum Arithm. vt à fractione decadicâ 183ò2924 vel 183ò2896 demi poſſit) relinquetur numerus 1ő9591 vel 1ő9563. Rectè itaque hic numerus habetur, quo exprimatur Soliditas corporis ex ductu portionis F L O ſubalterno geniti; Rectè, inquam, eò quòd rectè definiantur numeri ex duplici, qui hic occurrit ductus, procreati.

Reſtat Solidum tertium G attendendum: quod oritur ex portione parabolicâ F S P O in ſe ſubalternè ductâ. Illud autem cùm æquale ſit per Prop. 199 ductuum, hiſce Solidis, nempe Parallelepipedo ex ductu Rectanguli E L in ſe genito (quod notum eſt) & Solido bis, quod fit ex eodem Rectangulo E L in planum parabolicum E S P V (quod notum eſt, vt habetur ſuperiùs 40.) Solido denique quod fit ex portione Parabolicâ E S P V in ſe ſubalternè ductâ (quæ eſt ipſa baſis mixta E K R V ducta in latus Rectum 1, quæ nota eſt) ſi numeri omnia hæc ſolida exprimentes addantur: habebitur numerus; quo verè quantitas Solidi tertij G deſignetur. In cuius inueſtigatione contingit ducenda eſſe plana quædam, quæ iam antè ducta ſunt; oſtenſúmque Solidorum ex huiuſmodi ductibus ortorum quantitates rectè numeris eſſe definitas; nec vnquam, vel per vmbram, numeros Area-

rum

rum in ſe ductarum fuiſſe inter ſe multiplicatos; non ſecus quàm in inueſtigatione priorum quatuor Solidorum ex ſimplici ductu genitorum contingere demonſtratum eſt: Imò eadem ipſa Solida hîc iiſdem numeris expreſſa ſunt; quibus eadem, dum priora ſolida quærerentur, exprimi contigerat. Patet ergo in hac quæſtione, in quâ de facto agitur, prolatis tabulis ex ipſo Examine, quod omnibus proſtat, petitis, quo iure à R. P. Aynſcom dici potuerit *mirum non eſſe, quòd tanta Inæqualitas proportionalitatis P & Q reperiatur: cùm in ductibus penè ſingulis, ex quibus octo illa ſolida nata ſunt peccatum ſit:* cùm ne vnus quidem in illorum octo ſolidorum procreatione ductus in Examine à me adhibitus reperiatur (vt ex præcedente ſingulorum diſcuſſione euidentiſſimum eſt) in quo à me peccari contigerit. Quod hoc miror magis ab eo eſſe pronunciatum, quòd Ipſemet Part. 2. Secundæ Quadrat. Prop. 4. 5. & 6. eâdem methodo, iiſdémque ferè verbis, illa ipſa octo Solida ex ductibus mixtarum earundem ſuperficierum orta Geometricè conſtituat, quâ à me conſtituta ſunt. Quo fit vt credam totam hanc meam ratiocinationem leuiùs quàm par ſit, cùm eam impugnaret, ab eo eſſe expenſam.

Certum igitur cùm ſit inæqualitatem illam, quæ inter terminos proportionalitatis P & Q obſeruatur, nullo modo deriuari à Soliditate illorum octo corporum in numeris perperam definitâ: concludendum neceſſariò venit, eam ex Principio aliquo falſo ſuppoſito proficiſci; neque eandem eſſe proportionem K L rationis Solidi A ad Solidum B, ad Rationem Solidi C ad Solidum D; cum proportione M N rationis ſolidi E ad ſolidum F, ad rationem ſolidi G ad ſolidum H. Quâ ſublatâ proportionum K L & M N æqualitate, tolli continuò neceſſe eſt hanc ſecundam circulum Quadrandi methodum. Vt aſſeritur hac Propoſitione 32. quam probare, vel in Examine à me rectè probatam, demonſtrare ſuſceperam.

Corollarium.

Ex omnibus ad huius Quadraturæ ſecundæ diſcuſſionem hactenus allatis; non tantùm hæc vna ſecunda, ſed reliquæ etiam duæ, tertia & quarta, cùm iiſdem fundamentis nitantur, non omni vitio carere demonſtrantur, vt eas vlteriùs proſequi neceſſe non ſit. Imò nec ea ipſa Quadratura, quam quaſi de nouo affert R. P. Aynſcom, & de quâ inferiùs ſermo habendus eſt, pluribus egeret: vt in latentis alicuius vitij ſuſpicionem, aut apertam cognitionem veniret; cùm ex iiſdem planè, quibus proximè memoratæ tres, Principiis colligatur.

Scholium.

Etſi Libro 3. Exam. Quadraturæ numeros, quibus illorum octo ſolido

Solidorum quantitas exprimitur ; conſtituerim eóſque hîc non omiſerim : diſperſos tamen hinc, illinc. prout eorum tractatio tulit, exhibui : quos ſi lubeat ſimul cogere, eorúmque rationes rationúmque proportiones, ac proportionum proportionalitates colligere ; liceat quidem, ſed operâ paulò grauiore : cui vt parcatur, en ipſos hoc vno ſub Aſpectu poſitos etiam diſtinctùs quàm in Examine Lib. 3. præſtiterim. Quatuor ergo priora Solida ex ordinato ductu oriunda ita habent, vt hoc ſchema refert ex ſuperioribus collectum. Fractis autem

A	$40\frac{3}{6}$	C	$653\frac{5}{6}$
B	$3\frac{1}{6}$	D	$40\frac{1}{2}$

A	$\frac{243}{6}$	C	$\frac{3923}{6}$
B	$\frac{19}{6}$	D	$\frac{243}{6}$

ad eandem denominationem reuocatis, ad quam ipſi etiam integri reuocentur ; ſtabunt numeri, vt hoc ſecundum ſchema referr. Demum abiectis denominatoribus ; ſoli numeratores corpora illa quatuor, eorúmque rationes exhibent, vt in hoc alio ſchemate exhibetur.

A	243	C	3923
B	19	D	243

		vel in minimis		
K	243000		K	30375
L	306736		L	38342

Quòd ſi has rationes ad eundem conſequentem reuocemus ; qui reiiciatur poſtea tanquam inutilis : duo Antecedentes (qui ſunt K 30375 & L 38343) exhibent proportionem, quam inter ſe habent hæ duæ rationes A B, & C D vt hoc in ſchemate exhibetur.

Non ſecus ſolida quatuor E, F, G, H, ex ductu ſubalterno genita ; tum eorum rationes, ac rationum porportiones ſigillatim oculis ſubiiciemus in vnum collectas. Atque ita quidem, vt hic habetur, Ipſa

E	318'0870	*Mai.*	G	6523'6257	*Mai.*
	318'0861	*Min.*		6523'6229	*Min.*
F	16'9591	*Mai.*	H	318'0870	*Mai.*
	169563	*Min.*		318'0861	*Min.*

Solida numeris deſignantur, veris tam maioribus, quàm minoribus. At ; vt ſequens ſchema refert ; eorundem ſolidorum rationes tam ex verò maioribus, quàm ex verò minoribus terminis ortæ exhibentur :

earum autem termini, ſunt ipſi numeri Solida exprimentes, expunctis tantùm accentibus, qui denominatorum vices gerunt in huiuſmodi fractionibus decadicis: qui cùm hic ſint æquales, expungi poſſunt, ſolique numeratores retineri ad rationes ſolidorum exprimendas tam veris maiorum quàm veris minorum, vt hoc in ſchemate

Rationes Solidorum veris maiorum.		Rationes Solid. veris minorũ.	
E. 3180870.	G. 65236257	E. 3180861.	G 65236229
F. 169591.	H. 3180870	F. 169563.	H. 3180861

præſtitum cernis. His ita conſtitutis rationibus E ad F & G ad H; earum Proportio inuenietur, ſi ad eundem conſequentem termini reuocentur vel eâ methodo quam Prop. 13. Lib. 3. Exam. tradidi; vel alterâ, quam Prop. 9, Lib. 1. expoſui.

Tunc enim Antecedentes Proportionem, quam rationes ipſæ obſeruant inter ſe, exhibebunt vt in hoc ſchemate cernere eſt, in quo Proportio illa (quæ eſt M ad N) ſiue rationes E ad F, & G ad H numeris conſtent vero maioribus, exhibetur ad minimos terminos reuocata.

Proportio Rationum E ad F & G ad H.			
M. 3180870	*ex terminis*	M. 3180861	*ex terminis*
N. 3478131	*vero maioribus.*	N. 3477565	*vero minoribus.*

Ex patatis hactenus proportionibus rationum A ad B, & C ad D, quas obſeruant ſolida ex ſimplici ductu genita; & rationum E ad F, & G ad H ſolidorum ex ductu ſubalterno ortorum; quarum proportionum prior eſt K ad L, & poſterior M ad N, colligere licebit proportionalitatem P ad Q. Si nimirum proportiones K ad L, & M ad N, quaſi forent rationes ſimplices, ad eundem conſequentem reuocentur: tunc enim Antecedentes proportionalitatem earum proportionum exhibebunt, quæ duplex eſt; altera quæ ex proportionis M ad N terminis vero maioribus gignitur; altera, quam producunt termini vero minores. Vtramque hoc ſchema exhibet: & vtramque à proportionalitate æqualitatis valde alienam; contrà quàm à Quadraturæ primo Authore aſſeratur, eiúſque deinceps fautoribus ſtatuatur. Habes

bes igitur hoc in ſcholio digeſtam methodum totam, quâ proportio-

Ex terminis vero maioribus		*Ex terminis vero minoribus.*	
P.	105648229125	P.	105631067250
Q.	121960917540	Q.	121960571462

nalitas P Q definita eſt. Quâ, ſi lubeat Propoſitionis huius meæ 32 veritatem aliis & aliis factis Parabolarum ſuppoſitionibus perpendere, vti poſſis; vt Ipſemet Prop. 17. Lib. 3. Examinis Quadrat. vſus ſum ad confirmationem Propoſitionis 16. cui reſpondet hæc 32. In eâ verò, Proportionalitatis P Q inæqualitas longè maxima collecta eſt; cùm terminis exprimatur P 145829890. Q 347760051. vt citato loco habetur; vt & alia aliquot Paradigmata: in quibus omnibus hanc Proportionalitatis P Q inæqualitatem. Vnde rationis Solidi A ad Solidum B ad rationem Solidi C ad Solidum D Proportio diſſimilis colligatur Proportioni, quam habet ratio Solidi E ad Solidum F ad Rationem Solidi G ad Solidum H. Sed quid opus tam multis hanc harum rationum diſproportionem, ſiue Proportionalitatis P Q inæqualitatem probare; cùm, etſi ſupponatur eius ſumma æqualitas, non tamen ex ea conſequatur, quam aſſerunt Quadraturæ huius Authores, rationum E ad F, aut G ad H cognitio; ſine quâ ad Quadraturam abſolutam nequit perueniri, vt citatâ Prop. 17. Lib. 3. oſtenſum eſt euidentiſſimè: quam paucis ſequenti Propoſitione iuuat curſus explicare, vt hîc etiam hæc difficultas tradatur abſolutiùs. Itaque ſit.

PROPOSITIO XXXIII. *Theorema.*

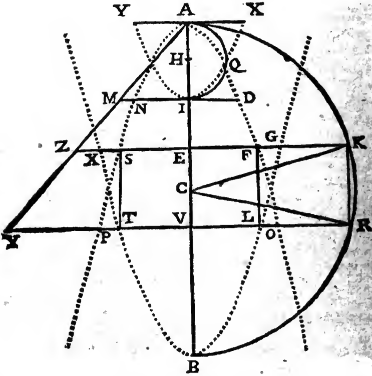
ETSI Rationum A B & C D ex ductu ſimplici & ordinato conſtitutarum Proportio K L æqualis foret Proportioni M N rationum E F & G H, quas ductus ſubalternus generat. Siue, quod idem eſt, etſi proportionum K L & M N Proportionalitas P Q terminis conſtaret æqualibus, & ratio quædam foret æqualitatis: haud quaquam tamen obtineretur ex eo circuli Quadratura.

Demonſtratio.

Et Tetragoniſmus iuxta hanc methodum abſoluatur: debet neceſſariò alterutra rationum E ad F aut G ad H determinatè cognoſci:

Q 2 vt

vt ſcilicet ſemicirculus A Q I, qui eſt Antecedens rationis E F poſſit conferri cum conſequente ſuo F; qui eſt mixta quædam ſuperficies, cuius vnum latus eſt arcus KR, & ex eâ collatione circulare quidpiam



ductus directus			*ductus ſubalternus*		
A. *ex* A I D	K	P	E. *ex* A I D	M	Q
B. *ex* F L O			F. *ex* F L O		
C. *ex* F S P L	L		G. *ex* F S P L	N	
D. *ex* A I N			H. *ex* A I N		

reperiri rectilineo æquale: quod etiam reperiri poſſet, ſi Antecedens G rationis G H, qui quædam etiam eſt mixta ſuperficies, quam arcus K R cum tribus aliis lineis rectis circumſcribit, cum ſuo conſe-

quent

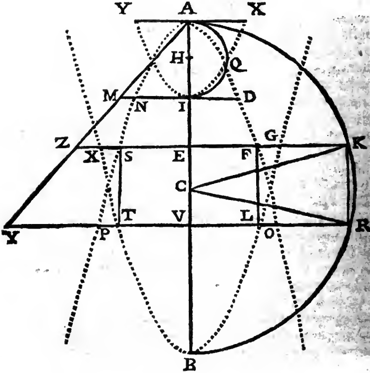
Digitized by Google

quente H, ſiue ſemicirculo A Q I conferretur. Quam alterutrius dictarum rationum E F & G H, aut vtriuſque cognitionem omnino neceſſariam eſſe ſatis oſtendit Doctiſſimus Quadraturæ Author, dum Prop. 77. Lib. 10. Oper. Geom, huiuſmodi Problema adducit. *Oporteat rationem exhibere quæ eſt inter corpora, quæ oriuntur ex ſubalterno ductu Parabolæ A I D in ſe* (ſchemate vtor meo) *& ex ductu item ſubalterno portionis Parabolicæ F L O. Vel inter Solida, quæ fiunt ex ductu ſubalterno in ſe plani E L P S, & Parabolæ A I T.* Quæ ſolida iuxta deſignationem meam ſunt ſolida E, F; & G, H: quorum baſes eandem cum Solidis ipſis rationem ſeruant. Quod Problema vtinam, vt propoſuit, ita abſoluiſſet ſummus Geometra. Sed tandem totâ ſuâ ratiocinatione, quam citatâ Prop. proſecutus eſt, aliam concluſionem non collegit, nec aliam colligere potuit, vt euidenter oſtendi Lib. 3. Prop. 8. Exam. præter hanc, quæ à Propoſitione longè profectò aliena eſt. *Ergo Proportionem exhibuimus; quæ eſt inter rationes E ad F, & G ad H.* Hoc eſt, ſtylo meo, Proportionem M N. Cenſuit ergo eximius Cyclometra, tum neceſſariam eſſe ad Tetragoniſmum cognitionem rationum E ad F, & G ad H, cùm ad eam exhibendam Problema proponat; tum eam ſe exhibuiſſe eo ipſo, quòd Proportionem earum rationum, vt Ipſe putat (nam ne ipſam quidem Proportionem rationum E ad F & G ad H, quæ eſt proportio M ad N, exhibuit, vt proximâ Propoſ. demonſtraui) exhibuerit: cùm in concluſione, quæ alia eſſe non poteſt quàm ipſa Propoſitio, *Proportionem rationum E F, & G H ſe aſſerat exhibuiſſe. Quod præſtandum*, inquit, *erat.*

Hac ergo Propoſitione aſſentior ipſi quidem notas omnino fieri debere rationes E F, & G H, vt eius fert Propoſitio illa 77. Sed non perinde aſſentior notas eſſe factas; etſi, vt eiuſdem Propoſitionis fert concluſio, nota facta ſit earum rationum Proportio. Quæ mea foret hîc probanda Propoſitio: niſi eam Prop. 18. Lib. 3. Exam. tum Arithmeticè tum Geometricè nec paucis, nec obſcuris Argumentis demonſtraſſem, quem locum velim conſulas. Aut certè ſtabilienda rurſus foret: ſi quo modo fuiſſet à R. P. Aynſcom impetita in eâ Reſponſione, quam edidit ad difficultates, quarum hæc eſt maxima, quas aduersùs Quadraturam ſecundam, eíque affines reliquas duas, tertium, & quartam obieceram. Sed, quod ab eo omitti omnino non debuerat, ſi vt æquam & aliquo cum fundamento pronunciatam hanc ſententiam, *Nihil igitur contra has Quadraturas euicit P. Leotaudi Examen*; admitti vellet; ne eius quidem vſpiam mentio ab eo facta eſt. Nihilominùs hîc pauca addam, eáque, vt opinor, planiora & aper-

tiora: quibus iuxta Propoſitionem hanc 33. in hac controuerſiâ cuilibet, etſi minimè preſtò foret Examen, fiet ſatis.

Obſerua ita que ignotas quãtitates relatiuas non aliâ methodo, quàm



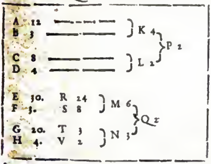
ductus directus			*ductus ſubalternus*		
A. *ex* A I D	K	P	E. *ex* A I D	M	Q
B. *ex* F L O			F. *ex* F L O		
C. *ex* F S P L	L		G. *ex* F S P L	N	
D. *ex* A I N			H. *ex* A I N		

abſolutas innoteſcere poſſe. Sicut ergo, ſi quatuor ſint quantitates, proportionales id eſt, eadẽ ſit ratio primæ ad ſecundam, & tertiæ ad quartam; vt earum vna aliqua ignota cognoſcatur, neceſſe eſt vt tres reliquæ

quæ

quæ notæ priùs factæ fuerint; nec vlla hactenus tradita eſt ars, ſed nec tradi poteſt, quâ ex duabus tantùm earum quibuſcunque no tis, reliquarum duarum, vel etiam vnius cognitio colligatur: Ita etiam in relatiuis quatuor quantitatibus, in quatuor ſcilicet rationibus proportionalibus, ſiue quarum binæ eandem habent inter ſe proportionem, quam binæ reliquæ; idem planè contingit. Nam, ſi rationum, de quibus hîc habetur ſermo, A B & C D, proportio K L eadem ſit cum Porportione M N duarum rationum E F & G H ſolidorum ex ductu ſubalterno genitorum; notæque factæ fuerint tres quæcunque ex illis rationibus quatuor A B, C D, E F, G H: certum eſt quartam ignotam, notarum trium ope notam fieri poſſe. Vt, ſi ratio G H ignoretur cæteris tribus notis A B, C D, & E F. Si illis tribus quarta reperiatur ratio G H proportionalis per Prop. 26. Lib. 1. Exam. ea erit, quæ inquiritur. Eodem modo, ſi ignota foret ratio E F reliquis tribus A B, C D, & G H notis; etiam ratio E F innoteſceret: ſi fieret, vt C D ad A B, ita G H ad aliam E F? foret enim, Inuertendo, vt ratio A B ad C D; ita E F inuenta ad G H, hoc eſt, hæ quatuor rationes A B, C D, & E F, G H forent proportionales; ſiue duarum priorum A B, C D proportio K L, æqualis foret proportioni M N duarum poſteriorum E F, G H? & earum proportionum duarum K L, M N proportionalitas P Q terminis æqualibus P & Q conſtaret, hoc eſt, foret ratio æqualitatis.

At verò, ſi ex illis quatuor rationibus, etſi earum eadem Proportio ſupponeretur, duæ tantùm notæ haberentur; neutra duarum reliquarum poſſet innoteſcere: non ſecus quàm termini duo rationum duarum proportionalium, ſi ignoti fuerint, ex duobus reliquis notis, noti euadere non poſſunt. Par enim eſt in hoc caſu abſolutarum, & relatiuarum quantitatum conditio. Quod Exemplo placet illuſtrare. Quatuor rationum A B, C D; & E F, G H æquales ſupponantur proportiones K L, & M N; hoc eſt, ſint proportionales; ſiue earum proportionalitas P Q ſit ratio æqualitatis (hoc enim ex eâ ſuppoſitione neceſſariò ſequitur) ſi igitur notæ ſint duæ tantùm rationes A B, & C D: etſi conſtet proportiones K L, & M L eſſe æquales. Nihilominùs, neutra duarum rationum ignotarum E F, & G H nota poterit euadere. Sunt



enim

enim multitudine infinitæ rationes, eæque ſpecie diuerſæ: quarum proportio ſit ſemper æqulis proportioni M N ſiue K L. Ecce rationis E ad F, quæ decupla eſt, ad rationem quintuplam G ad H proportio eſt M N, ſiue K L dupla: quæ eadem proportio dupla M N, eſt etiam proportio rationis R S triplæ, ad rationem T V ſeſquialteram: eóque modo aliæ & aliæ rationes innumeræ ſpecie diuerſæ aſſumi poſſunt, quarum proportio ſit ſemper M N, æqualis proportioni KL, notarum duarum rationum A B, C D: ac proinde ſint omnes rationibus A B, C D proportionales. Quomodo igitur ſi duæ tantùm notæ rationes quatuor quantitatum ſupponantur præter notam proportionem, reperiri poterunt aliæ duæ rationes ignotæ quatuor ignotarum quantitatum poterunt inueniri? has certè nequaquam facilius fuerit definire: quàm ſi datâ proportione duarum rationum A B & C D, vt duplâ; datíſque duobus tantùm terminis A B rationis A B, notis; alterutrum terminum C vel D, aut vtrumque ignotum, notum volueris

A	4	C...	10	E	50
B	2	D...	5	F	25

exhibere: neque enim minùs terminus E 50, quàm C 10 poterit aſſumi; vt quæſtioni ſatisfiat: tam ſiquidem E ad F quàm C ad D rationem duplam termini noti A 4 ad terminum notum C 2 obſeruat.

Ex his ſequitur, clarius conſtare nihil Geometricum poſſe; quàm quod hac Propoſitione aſſertum eſt à me nimirum. Etſi cognoſcantur quatuor quantitates A, B, C, D ex ſimplici ductu planorum determinatæ: ac proinde notæ etiam ſint earum rationes duæ A ad B & C ad D: notáque earum rationum proportio K L: & præter hæc, Authori Quadraturæ, eiúſque Interpretibus concederetur (quod vt falſum concedi minimè debere nuper demonſtratum eſt) eandem eſſe proportionem M N, rationum E F, G H; quam obſeruant genita ſolida ex ductu ſubalterno planorum eorumdem, quibus in ſe directè ductis producuntur Solida A, B, C, D, Etſi, inquam, hæc ita ſupponantur. Niſi tamen præter duas rationes A B, & C D notas, notámque proportionem K L duarum rationum E F, G H ignotarum, alterutra harum rationum ſaltem detur: nequaquam tamen notas fieri poſſe has rationes E F, G H; quas obſeruant Solida ex ductu ſubalterno genita. Quod cùm ita ſit. Cùm Solida illa omnia E, F, G, H ignota ſint (ſunt enim cylindracea baſi inſiſtentia circulari, adóque ignotæ, quæ inueſtiganda proponitur) etiam ignorari neceſſe eſt tam eorum rationes E F, G H, quàm rationes (cùm eædem ſint cum ſolidorum ipſorum rationibus) baſium circularium, quibus inſiſtunt Cylindracea Solidis illis æqualia. Ergo etiam ex eâ rationum ignoratione ſequitur

quitur baſes illas circulares inter ſe non poſſe comparari, nec aliquid per hanc comparationem circulare detegi, quod rectilineo cuipiam ſit æquale; hoc eſt, vt verbo dicam, nec Quadratura hæc ſecunda, nec reliquæ ei affines tertia & quarta ex eodem deductæ principio ad exitum fœlicem & optatum hac methodo perduci poſſunt. Quod oſtendendum ſuſceperam.

Monitum.

Ex dictis hîc hactenus euidenter conſtare opinor quàm ſint non inanes, quas in Examine Quadraturæ propoſui, difficultates; quibus laborare videntur hæ celeberrimæ celeberrimi Geometræ R. P. Gregorij à S. Vincentio Quadraturæ: cùm eas vir eruditione non vulgari clarus R. P. Franc. Aynſcom, dum omni ſtudio conatur diſſoluere, & Quadraturas ipſas tueri; vix, ac ne vix quidem, id, vt patuit, præſtiterit. Vnde ſanè grauius hos Tetragoniſmos omnes in dubium vocandi naſcitur argumentum. Neque enim vel ipſe laudatus Quadraturarum interpres, vel etiam earundem Author (vix enim eo inconſulto, cuius res agebatur, eius Auditor hoc opus in eius gratiam ediderit) quidpiam omiſerint eorum, quibus hi explicari, ſtabilirique, & ab omni tum præſenti, tum olim fortaſſe futuro ruinæ periculo liberari poſſent. Quod cùm minùs ex ſententiâ ab ipſis perfectum ſuadeant tam aperta in contrarium adducta tot Argumenta: multò minùs ab alio quouis idem aliquando præſtandum meritò videri debet; adeóque vt certum ac demonſtratum haberi, Quadraturam hac methodo ad exitum perduci nullo modo poſſe.

An verò eadem ſententia ferri debeat in eam, quam quaſi nouam adducit R. P. Aynſcom Quadraturam, nunc venit expendendum; vt, ſi fas fuerit, nihil hac in materiâ omittatur: de quo rurſus mouenda ſit aliquando controuerſia. Sit itaque.

R PARS

PARS TERTIA LIBRI PRIMI.

Alia quadam quaſi noua Quadraturæ ratio à Geometrâ non vulgari R.P. Franc. Aynſcom expoſita multiplici nomine reijcienda demonſtratur.

PROPOSITIO XXXIV. *Theorema.*

METHODUS quaſi noua circulum quadrandi à Quadraturarum interprete clariſſimo adducta, rejicienda videtur non ſolùm ob rationes; ob quas ſecunda cum duabus ſequentibus tertiâ & quartâ reiecta eſt: verùm etiam ob alias peculiares, quæ in illâ methodo occurrunt.

Expoſitio.

Poſtquàm eximius Quadraturarum interpres R.P. Aynſcom earum principia declaraſſe, & fundamenta pro munere ſuſcepto ſtatuiſſe ſibi viſus eſt, obiectiſque difficultatibus occurriſſe; ad idem illud munus ſuum pertinere iure cenſuit ipſam tetragoniſmi praxim tradere, quâ ſcilicet fuſiùs exponeret conſtructionem totam; eâque ratione querelis ſatisfaceret, quas Authoris Cyclometriæ huius maxima breuitas cum obſcuritate coniuncta in ipſum concitarat. Illa ergo praxis, quam laudatus Author in ſecundâ circuli Quadraturâ proſecutus eſt, haud admodum probanda mihi videtur: tum quia iis ipſis fundamentis nititur, quæ non ſatis firma fuiſſe ex ſuperioribus colligi poteſt: tum quia alias de nouo difficultates inuoluit, quibus in diſcrimen adducitur. Duas itaque partes continet hæc Propoſitio demonſtrandas. In priore declarandum eſt hanc ſolutionem, vel eandem eſſe cum ſolutione ſecundæ Quadraturæ, aut certè ex iiſdem fundamentis concludi. In poſteriore obſeruari debent ea, quorum memini, vitia; quibus eadem noua ſolutio labefactari videtur.

Demonſtra

Demonſtratio prioris partis.

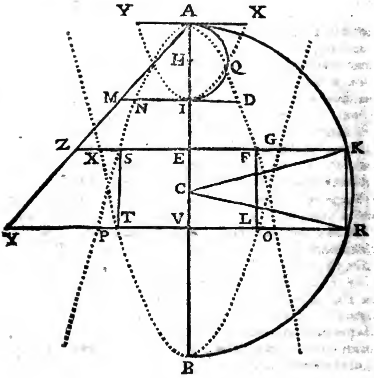
Prior pars huius Propoſitionis, quæ præcipua eſt; vtpote quæ totius huius Quadraturæ de nouo adductæ fundamentũ eſt, paucis concludi poteſt. Cùm enim eadem ſit hæc Quadratura cum ſecundâ Authoris Quadratura, eo tantùm diſcrimine ab eâ diuerſa, quòd hæc noua paulò fuſiùs, & diſtinctiùs exponatur, quàm illa ſecunda ab Authore fuiſſet deducta. Quid opus nouis Argumentis præter iam allata ad hanc impugnandam, ac concludendum de nouo, eandem ab omni labe minimè eſſe immunem. Nec verò vllatenus dubitandum eſt, an hæ Quadraturæ duæ, eædem ſint eodémque è principio petitæ. Illud habes Prop. 31. ſuperiore ex Authore Quadraturæ recitatum: quod conſule, & cum hoc confer, quod ex Quadraturarum interprete adduco ſaluâ tamen deſignatione meâ quam hæc tabella continet Prop. 27. conſtructa & appoſita ad ſchema, quo hactenus vſus ſum.

Dico, inquit Prop. 3. Secundæ Circuli Quadrat. *rationem ſolidi A ad ſolidum B, eſſe ad rationem ſolidi C ad ſolidum D; ſicut ratio ſolidi E ad ſolidum F ad rationem ſolidi G ad ſolidum H.* eſt eſt, Proportio K L, rationis A B ad rationem C D: æqualis eſt proportioni M N rationis E F ad rationem G H. Atque adeò proportionis K L ad proportionem M N proportionalitas P Q, quædam ratio æqualitatis; ſiue termini P, Q debent eſſe æquales, vt aſſerit Qadraturæ interpres. Atque hoc Theorema ſuum probare conatur laudatus Author. Sed ſiue eâdem ratiocinatione vtatur, quâ Quadraturæ Author vſus eſt; ſiue diuerſâ; perinde vitio aliquo eam laborare certum eſt: cùm oſtenderim tantam intereſſe diuerſitatem inter terminos Proportionalitatis P & Q vt in vtroque Paradigmate ex Examine petito & hic appoſito cernitur.

Paradigma primam.	*Paradigma ſecundum.*
P. 105648229125.	P. 1458 29890.
Q. 121960917540.	Q. 3477 60051.

Quàm verò rectè ex legibus tũ Geometriæ, tùm Arithmeticæ calculus ſit à me initus in ſuperioribus Prop. 32. ſatis conſtat. In quo autem omnes illas ratiocinationes ſiue ab Authore Quadraturæ, ſiue à Quadraturæ fautore inſtitutas peccare contingat, haud fuerit operæ pretium pluribus inueſtigare: per numeros & à poſteriori ſatis eſt mihi euidenter demonſtraſſe falſum eſſe eandem eſſe proportionem K L rationis A B ad rationem C D (quam vtramque gignit ductus ordinatus) cum Propoſitione M N rationum E F & G H ex ductu ſubalterno genitarum: ſiue (quod idem eſt) proportionis K L ad proportionem M N proportionalitatem

litatem P Q eſſe æqualitatis; ſiue terminos illius P & Q eſſe æquales. Dicam tamen hic obiter (quod in pari caſu obiter iudicaui ſuperiùs)



ductus directus			*ductus ſubalternus*		
A. *ex* A I D	K	P	E. *ex* A I D	M	Q
B. *ex* F L O			F. *ex* F L O		
C. *ex* F S P L	L		G. *ex* F L P S	N	
D. *ex* A I N			H. *ex* A I N		

Nimirum conglobationem illam proportionum, quâ vt medio ad illationem ſuam vtuntur clariſſimi hi Geometræ, non eſſe Proportionum additionem: cùm rationum ipſarum termini tam Antecedentes quàm conſequentes ſimul addantur; ex quâ additione iam naſcitur

naſcitur

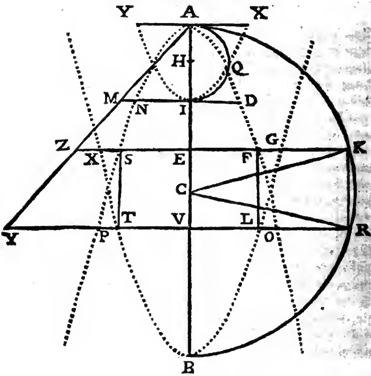
Digitized by Google

naſcitur rationum ipſarum, cùm diſſimiles ſint, ſumma perturbatio; quæ deinceps in rationum earundem proportionem multò maior deriuetur. Vnde non mirum ſi tanta, quantam retuli, proportionalitatis P Q inæqualitas conſequatur: ac demum ex eâ inæqualitate veritas colligatur prioris partis Propoſitionis huius. Quòd ſcilicet rejici debeat hæc Quadratura in ſpeciem noua ob eaſdem rationes, ob quas Quadratura ſecunda rejecta fuit; quarum rationum hæc eſt prima.

Altera non minoris, quàm prior ponderis, quam Propoſitione 33. adduxi, hæc eſt. Quamuis concederetur eximio cyclometriæ huius fautori proportionem K L rationum A B & C D ex ductu ordinato genitarum æqualem eſſe proportioni M N rationum E F, & G H, quas genuit ductus ſubalternus; ſiue earum proportionum proportionalitatem P Q conſtare terminis æqualibus P & Q: haud quaquam tamen nota fieret alterutra rationum ignotarum E F aut G H, vt notam fieri neceſſe eſt ad Quadraturæ huius ſolutionem. Oſtenſum ſiquidem eſt citatâ Propoſitione & Prop. 18. Lib. 3. Exam. Quadrat. ex notâ Proportionalitate, aut (quod perinde eſt) ex notis duabus proportionibus, vt K L, & M N; etſi duæ quæcumque rationes tantùm cognoſcantur, reliquas cognoſci non poſſe: neceſſarium enim eſt, vt præter quatuor rationū proportiones: duas notas, aut notam earum proportionum proportionalitatem, vt P Q, non duæ tantùm rationes, ſed tres innoteſcant priùs, vt quarta poſſit innoteſcere. Quemadmodum enim (vt citato loco expoſui) in abſolutis, ſi quatuor fuerint quantitates proportionales; ex tribus notis, & non ex duabus tantùm, quarta cognoſci poteſt; ita etiam in relatiuis accidit: neceſſarium enim eſt, vt è quatuor rationibus proportionalibus tres habeantur notæ, vt quarta ignota colligatur. At in caſu noſtro duæ tantùm rationes A B & C D; quæ ex ductu directo generantur, notæ ſunt; vtraque verò illa ratio E F & G H, quam ductus ſubalternus producit, ignota eſt: ſi enim earum altera nota eſſet, nota vtique eſſet, quæ inquiritur, Quadratura; ſiquidem earum termini, plana ſunt circularia diſſimilia, & inæqualia: vnde quidpiam rectilineum curuilineo æquale colligere liceret. Quare, etiamſi concedatur legitimè probatum eſſe à Quadraturæ Authoribus, rationes A B, C D, & E F, G H eſſe proportionales, hoc eſt, proportiones K L & M N eſſe æquales; vel harum proportionum proportionalitatem P Q eſſe æqualitatis: nihil tamen ex eâ conceſſione ad Quadraturam compendij ſequeretur: Atque adeò etiam ex hoc capite dici non poteſt ad exitum perducta Quadratura, vt aſſerit Propoſitionis huius 34. pars prior, quæ erat demonſtranda.

R 3 *Demon*

Demonſtratio partis poſterioris.



ductus directus			*ductus ſubalternus*		
A. *ex* AID	K	P	E. *ex* AID	M	Q
B. *ex* FLO	K	P	F. *ex* FLO	M	Q
C. *ex* FSPL	L	P	G. *ex* FLPS	N	Q
D. *ex* AIN	L	P	H. *ex* AIN	N	Q

Poſterior Pars Propoſitionis huius 34. aſſerit hanc de nouo allatam Tetragoniſmi methodum, aut potiùs ſecundam eximij cyclometriæ Authoris Quadraturam explicatione non paulò fuſiore ab erudito interprete illuſtratam, hac in explicatione quaſdam pati difficultates; ob quas, etſi aliũde ab omni vitio foret immunis, vix à Geometriâ deberet admitti.

admitti. Atque in harum difficultatum expoſitione tota verſatur (quam ineo) partis poſterioris Propoſitionis demonſtratio. Has igitur ſingulas hoc ordine proſecuturus ſum.

Prima difficultas.

Prima hæc difficultas continetur Propoſitione 7. ſecundæ circuli Quadraturæ pag. 149. quam expono iuxta meam iam ſæpius vſurpatam diagrammatis deſignationem, eiúſque indices characteres, ſenſu interim, ipſiſque adeò Authoris verbis ſeruatis. Sic igitur habet citata Propoſitio.

Sint A I, F L diametri quæcunque æquales in parabolâ A D F O: ducantúrque per I & L normales I D, V L ad Axem A B.

Oportet oſtendere corpora ex ductu partium A I D, F L O in ſe ſubalternè, & reducta ad fruſta cylindrica habere diuerſas altitudines; & pro baſibus, ſegmenta circularia diuerſorum circulorum: vtrumque autem oporteat determinare. Hæc ille, in quibus hæc obſeruo.

Proponit Quadraturarum interpres oſtendendum hîc eſſe corpora ex ductu partium parabolicarum A I D, F L O in ſe ſubalternè, & reducta ad fruſta cylindrica habere diuerſas altitudines, & pro baſibus ſegmenta circularia diuerſorum circulorum. Animaduerto quidem, & & admitto huiuſmodi corpora ad fruſta cylindrica reducta baſes nanciſci circulares diuerſorum circulorum, eáſque, vel hac Propoſitione vel præcedente 6. rectè eſſe determinatas: corporis enim cylindrici ſolido ex ductu ſubalterno parabolæ A I D genito æqualis, baſis eſt ſemicirculus A Q I: baſis autem cylindracei æqualis ſolido ex ſegmento parabolico F L O in ſe ducto ſubalternè, eſt mixtum quoddam planum ex plano mixto E K R V abſciſſum, adiacens arcui K R. verum igitur eſt, imò & determinatum duo huiuſmodi cylindracea habere pro baſibus ſegmenta circularia diuerſorum circulorum.

At vbi habetur demonſtratum vel hac propoſitione (in quâ id oportet oſtendere) vel aliâ quâuis duo illa cylindracea *habere diuerſas altitudines?* nuſquam. Attamen id prius quàm ipſæ altitudines determinarentur, oſtendendum fuerat: vt problemati propoſitio ſatisfieret; quod expreſſis verbis id exigit.

Sed minimè mirum, ſi cylindraceorum illorum altitudines diuerſæ ab eximio Geometrâ oſtenſæ non fuerint; etſi id ab eo propoſitum hîc fuiſſet: æquales enim ambæ ſunt huiuſmodi cylindraceorum altitudines, & quidem ambæ æquales lateri recto parabolæ A D F O. Nunquid illud ſatis clarè & euidenter demonſtraueram Lib. 3. Prop. 4. & 5. Examinis Quadrat. eáque ſuppoſitione tanquam certâ & indubitatâ in Epilogiſmis tot calculorum colligendis ſemper vſus fueram?

Y 3

Vt vel hoc vno argumento (cui aliud ſimile iam ſuprà obſeruaui) adducar vt credam, Examen illud meum Quadraturæ à Quadraturæ fautore lectum, aut perpenſum fuiſſe paulò leuiùs, quàm accurata reſponſio, quam moliebatur, exigeret: cui afferendæ, ſi debita hæc attentio acceſſiſſet, fortaſſe ſuperſediſſet, laborique ſanè graui pepercіſſet: quem ab eo in hanc reſponſionem impenſum oportuit. Sed de hoc in allatâ propoſitione commiſſo lapſu ſatis; cùm talis non ſit, vt ei occurri non poſſit; nec per eum, ſi ſolus foret, impediatur Quadraturæ perfecta ſolutio: non tamen parum ad hanc Propoſitionis meæ partem ſecundam ſtabiliendam conferre videtur.

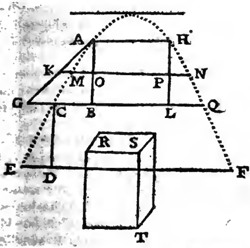
Secunda difficultas.

Secunda difficultas, quæ ad huius Quadraturæ hac methodo aſſequendæ ſolutionem aditum præcludere videtur, pendet tum ex Propoſitione 4. ſecundæ circuli Quadraturæ pag. 146. deduct. Geometricæ tum ex ſcholio Lemmatis 2. pag. 152. his enim in locis conſtructio duplex affertur ad Quadraturam neceſſaria; quarum tamen vna alteri, vt oporteret, minimè poteſt inſeruire; atque adeò ex hoc etiam capite R.P. Aynſcom Quadraturam hac methodo minimè exhibuiſſe cenſendus foret. Nam citato ſcholio duas parabolæ diametros ad Quadraturam neceſſarias laudatus Author tales aſſumit, ac determinat ac tales aſſumptas ac determinatas hoc toto in tractatu à ſe intelligi monet, vt earum altera ſit Axis parabolæ; altera priori æqualis, talis ducatur vt per eius extrema puncta ad axem normales ductæ lineæ, ſiue ad axem ordinatim applicatæ, abſcindant ex quodam circa axem deſcripto ſemicirculo arcum toti ſemicirculo commenſurabilem. Tales in meo diagrammate ſunt diametri A I, & F L: lineæ autem per extrema puncta F & L, diametri F L ad axem applicatæ ſunt F E, O V; quæ productæ abſcindunt ex ſemicirculo A K R B arcum K R, quem ſuppono ipſi ſemicirculo commenſurabilem; ſicut & hunc ſemicirculum totum toti ſemicirculo A Q I circa alteram diametrum A I deſcripto: has enim conditiones ad commenſurabilitatem pertinentes vult Quadraturæ interpres obſeruari; modúmque, quo obſeruentur, eruditè ſuo modo docet citatis locis.

Hanc porrò conſtructionem inſtituit eius Author: vt deinceps oſtendat iuxta ſua, ſuíque potiùs præceptoris principia proportionem rationis E ad F (hic etiam breuitatis causâ meum obſeruo ſimplicibus characteribus ſolida ex ductu ſubalterno genita deſignandi modum hactenus vſurpatum) ad rationem G ad H, hoc eſt, proportionem M N notam eſſe ex eo, quòd nota ſit proportio K L rationis A ad B ad rationem C ad D: quæ ad ſolida pertinent genita ex ductu ordinato eorundem

eorundem panorum, ex quorum ductu ſubalterno genita fuerunt ſolida E, F; & G H: hæc enim proportio K L nota eſt, eo quòd ſolida A, B; & C, D ad rectilinea ſint reducta. At hæc ſolida A, B, C, D, ex ductu ordinato genita, ad ſolida rectilinea quomodo, aut vbi à Quadraturarum fautore reducta fuere? Propoſitione 4. Secundæ Quadraturæ pag. 146. inquiet, in eâ enim praxis docetur, quâ nota fiant hæc ſolida; notáque proinde habeatur rationum, quas obſeruant, proportio K L ad Quadraturam hanc omnino neceſſaria, vt citatæ Propoſitionis Corollario habetur.

At ego contrà aſſero ope citatæ illius Propoſitionis 4. nullo modo notam fieri poſſe proportionem K L ſolidorum ex ductu ordinato genitorum in caſu aſſignato, & determinato in ſcholio Lemmatis 2. pag. 153. quem expoſui paulò antè. Atque adeò aſſero exhibitam non eſſe, nec exhiberi poſſe à Quadraturæ Promotore Quadraturam hac, quam exponit, methodo. Aſſertio hæc mea meliùs nequit demonſtrari, quàm allatâ Propoſitionis citatæ conſtructione, quæ ſic habet.



Sint (inquit Propoſitionis Author) *A B, C D diametri quæcúque æquales in Parabolâ A E F*) excipere debuit axem parabolæ tanquam inutilem) *actiſque per B & D normalibus C Q, E F; ducatur A H parallela C Q.*

Oportet ſolida orta ex ductu ordinato partium A C B, B A H Q: C E D, D C Q F in ſeipſas, reducere ad nota corpora.

Conſtructio.

Agatur per A contingens A G, occurrens C Q productæ in G. Ponatúrque recta K M N parallela G Q; & H L parallela A B. Per Prop. 89. de Parab. Rectæ omnes K M, M O, O P ſemper ſunt proportionales continuè. Ergo per 45. de ductibus. Mixtilineum A G C M A ductum in altitudinem O P, æquatur parti A C B ductæ in ſe. Quia verò quadrata eſt parabola A G C fiat illi æquale Rectangulum R S: erit hoc ductum in altitudinem

S T æqualem O P, æquale mixtilineo A G C M A in O P, hoc eſt, Parabola A C B ductæ in ſe.

Eadem methodo reducetur pars C E D ducta in ſe, ad parallelepipedum notum. Hæc ille, & quidem ſatis.

Iam quæro ab erudito Geometrâ, ſi in ipſo eius ſchemate diameter A B foret axis Parabolæ (vt deinceps ſupponit, ſupponique, ac ita determinari vult citato ſcholio paginæ 153. eâque factâ ſuppoſitione hanc ſuam Quadraturam proſequitur & abſoluit.) Quomodo notum fieret ſolidum ex Parabolâ A C B ductâ in ſe ordinatè? Si enim tunc ducatur tangens A G per punctum A, quod ſtatuatur vertex Parabolæ; nunquam cum huiuſmodi tangente concurſura eſt B G normalis ad A B: atque adeò nullum dabitur planum A C G, quod ducatur in altitudinem aliquam O P quæ & ipſa tunc perit; duo ſiquidem puncta O & P in eo caſu coaleſcunt in ipſo axe Parabolæ.

Quæ cùm ita ſint. Quamuis verum foret proportionem K L rationum duarum A B, C D, quas obſeruant ſolida ex ductu ordinato genita, æqualem eſſe proportioni M N, rationum E F, G H inter ſolida ex ductu ſubalterno procreata: (quod falſum oſtendi) Nequaquam tamen hac methodo, quam ſecutus eſt Quadraturæ promotor, ad exitum fœlicem Quadraturam perduxiſſe cenſeri poteſt.

Tertia difficultas.

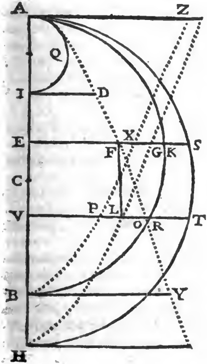
Eadem circuli Quadrandi ratio impugnari poſſe videtur argumento ex paulò antè relatâ determinatione duarum diametrorum æqualium parabolæ: quæ in ſcholio Lemmatis 2. pag. 152, vel 153. aſſignatur in hæc verba.

Sit, inquit Quadraturæ huius Promotor, *ſemicirculus A Q I deſcriptus ſuper axe A B parabola A D O. Sit autem & ſemicirculus alius A K R B priori maior, ſic vt perimeter A R B ſit commenſurabilis perimetro A Q I. Cum per Lem. 2. inueniatur in perimetro A R B arcus K R commenſurabilis perimetro A R B, à cuius extremitatibus K, R educta normales ad axem A B intercipiant in illo partem E V æqualem diametro A I; ducatúrque ex F puncto interſectionis parabola & linea K E, recta F L parallela axi A B. Erunt A I, F L diametri æquales eiuſdem parabola, & partes parabolica A I D, F L O, illa de quibus præcedentes & ſequentes Propoſitiones velim intelligi:* ait idem Author.

Quod ergo in hac determinatione diametrorum parabolicarum A I & F L difficultatem patitur, quam hîc obiicio, in hoc verſatur. Vult Quadraturæ Interpres *partes Parabolicas A I D, F L O, illas eſſe, de quibus præcedentes & ſequentes Propoſitiones ſuas vult intelligi.* Vult ergo

Digitized by Google

ergo partem parabolicam A I D in ſe ſubalternè ductam corpus generare : cui æqualis ſit ſemi-cylindrus baſi inſiſtens ſemicirculari A Q I; cuius altitudinem determinat Prop.7. pag.150. vult etiam non tantùm partem Parabolicam F L O in ſe ſubalternè duci; ſed etiam partem E F O V;) & hanc quidem ita in ſe ductam corpus generare, cui ſit æquale corpus quoddam cylindraceum baſi inſiſtens mixtilineæ E K R V, arcu K R, & rectis E K, E V, V R, circumſcriptæ : cuius etiam altitudinem determinat citatâ Prop.7. (de quâ ſuperiùs difficul. 1. egi) cuius porrò cylindracei pars quædam item cylindracea ſolido ſit æqualis; quod ex parte parabolica F L O in ſe ſubalternè ductâ generatur. Hanc enim ſuppoſitionem *tam in præcedentibus*, *quam in ſequentibus Propoſitionibus ſuis* Idem Author aſſumit, & iuxta eandem, Quadraturam ſuam abſoluit.



Cenſet igitur corpus ex ſegmento parabolico quadrilatero E F O V in ſe ſubalternè ducto genitum, æquale eſſe cylindraceo, cuius baſis ſit planum mixtum E K R V: cuius ſcilicet vnum latus ſit arcus K R, perimetro A K R B commenſurabilis, iuxta ab eo ſtatutam conſtructionem. At ego in hoc, pace doctiſſimi Geometræ dixerim, longè aliter ſentiendum puto: aſſeróque longè aliter determinandam eſſe baſim illam mixtam E K R V cylindracei ſolido æqualis, quod ex ductu ſubalterno portionis parabolicæ E F O V producitur; neque eam eſſe, *quâ tam in præcedentibus quàm in ſequentibus propoſitionibus vtitur.* In iis enim omnibus ſupponit portionem parabolicam E F O V in ſeipſam ſubalternè duci : vt corpus generet æquale cylindraceo, cuius baſis ſit planum mixtum E K R V: At niſi planum hoc mixtum tale ſit, vt duæ rectæ E K, V R arcum K R perimetro ſemicirculari A K R B

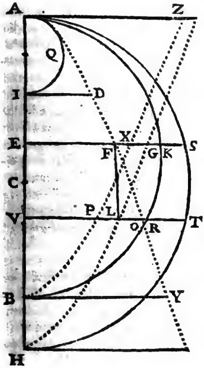
commenſurabilem intercipientes, ſint æquales inter ſe: (quod tum demum eueniet, cùm æqualiter à centro circuli A K R B diſtabunt per Prop. 14. Lib. 3. Elem.) Nequaquam eſſe poteſt baſis illius cylindracei, ſolido quod ex ductu portionis E F O V in ſe ſubalterno generatur; eſto poſſit eſſe baſis alterius cuiuſdam cylindracei, ſolido æqualis, quod producitur ex ſegmento quidem parabolico E F O V ſubalterne ducto, non in ſeipſum, ſed in aliud quoddam eiuſdem parabolæ ſegmentum: Quæ, vt euadant aperciſſima, in eodem diagrammate pauca hæc delinea.

Parabolam deſcribe B P X priori parabolæ A F O æqualem, & obuerſam, cuius vertex ſit B; eáque ſecet rectas E K, V R in punctis P & X. Diuiſâ etiam rectâ E V bifariam in C, centro C ſemicirculus deſcribatur A S T H ſecans in S & T productas lineas E K, V R: ac demum parabola deſcribatur circa axem H A prioribus æqualis, obuerſa verò parabolæ A F O; quæ ſecabit lineas E K, V R in punctis L, G. His poſitis, clarum eſt portiones obuerſas, ſiue ſubalternè poſitas E F O V, & V L G E eſſe æquales: æquales enim ſunt tam duæ ordinatim applicatæ E F, V L; quàm duæ E G, V O: Tam enim illæ, quàm iſtæ æqualiter diſtant à verticibus A & H ſuarum parabolarum æqualium. Vnde primò fit apertum portionem parabolicam E F O V in ſe ſubalternè ductam, vel ductam in obuerſam portionem E G L V, generare corpus quod eſt æquale cylindraceo, cuius baſis eſt planum mixtum E S T V; altitudo verò eſt latus rectum parabolarum, vt ſuprà declaratum eſt. Corpus ergo ex portione E F O V in ſe ſubalternè ductâ genitum, nequaquam æquale eſſe poteſt cylindraceo, cuius baſis ſit planum mixtum E K R V, niſi in eo vno caſu, in quo continget rectas E K, V R eſſe æquales; vel (quod in idem recidit) niſi quando eædem rectæ à centro circuli, cuius arcum abſcindunt, æqualiter diſtabunt.

Quare Quadraturæ promotor ſcholio illo Lemmatis 2. recitato ſuperiùs non tantùm debuit determinare, vt circulus A K R B deſcriberetur maior circulo A Q I ad arbitrium, & vt in eo arcus K R inueſtigaretur perimetro ſemicirculari commenſurabilis, per cuius extrema puncta K, R ductæ lineæ normales K E, R V ad axem A B, abſcinderent ex ipſo axe rectam E V æqualem diametro A I circuli A Q I: Sed præterea conditio adhibenda neceſſariò fuit; vt circulus circulo A Q I maior deſcriberetur talis, vt ex eo arcus K R abſcindi poſſet, ex cuius extremis punctis K & R ductæ normales K E & R V ad axem A B, & abſcindentes E V æqualem diametro A I circuli A Q I, eſſent

inter

inter ſe æquales;vel certè æqualiter à centro circuli deſcripti A K R B hincinde æqualiter diſtarent; ſiue quod idem eſt, eiuſdem circuli centrum punctum medium lineæ abſciſſæ E V occuparet. Quam conditionem negotij non mediocris foret obſeruare. Verùm ſiue leuis, ſiue grauis negotij conditio ea ſit; ad propoſitam determinationem, vt omnino neceſſaria omitti non debuit à Quadraturæ interprete: cum in omnibus tam præcedentibus, quàm ſequentibus propoſitionibus ſuis ab eodem ſupponatur; nec vllum liceat eius ſchema obſeruare, in quo ſumma non habeatur eius ratio; vt haberi reuerà debuit ad eius inſtitutum. Cùm igitur à propoſito tam aliena ſit hæc arcûs K R, & lineæ E V, quam Quadraturæ Promotor adducit, determinatio; nec ad Quadraturam promouendã, *vel in præcedentibus vel in ſequentibus propoſitionibus* ab eo ſit vnquam adhibita, licet ab eodem ſemper adhibenda aſſeratur: videris, quid de huiuſmodi Quadratura ex ſuppoſitionibus, Principiiſque tam incertis, deductâ ſentire debeas.



Hic demum quæras nec abs re (eius enim mentio ſuperiùs facta eſt) cùm portio Parabolica E F O V in ſe ſubalternè ducta non gignat ſolidum æquale cylindraceo, cuius baſis ſit planum mixtum E K R V: in quam aliam portionem parabolicam eadem portio E F O V ſubalternè poſitam duci debet; vt corpus gignat cylindraceo æquale, cuius baſis ſit planum illud mixtum E K R V? Reſpondeo portionem E F O V duci debere in portionem E X P V; quam eædem lineæ K E, R V intercipiunt ex parabolâ B P X obuersâ parabolæ A F O, cuius vertex eſt B. Quod ex ſuperioribus, vel ex Lib. 3. Exam. Quadr. vel ex ipſo Cyclometriæ Authore Lib. 10. Oper. Geom. ſatis apertè conſtat. Tota enim Parabola A F O Y ducta in Parabolam

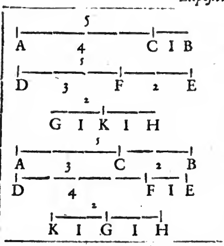
ſubalternè poſitam B P X Z, corpus generat æquale ſolido Cylindraceo; cuius baſis eſt ſemicirculus A K R B; altitudo verò, vt oſtendi, eſt Latus Rectum: duæ autem quælibet portiones ex duabus obuerſis Parabolis interceptæ à duabus quibuſlibet lineis E K, R V ad axem normalibus, in ſe ductæ, ſolidum generant æquale cylindraceo; cuius baſis eſt planum mixtum E K R V, eiſdem lineis E K, V R interceptum; altitudo verò eſt Latus Rectum Parabolarum.

Quarta difficultas præ cæteris inſignis, quâ promotæ huius Quadraturæ fundamentum euertitur.

ALlatæ hactenus, quæque afferri poſſent aliæ difficultates ad Propoſitionis huius 34. veritatem ſtabiliendam non inanes quidem videri debeant: Quam tamen nunc affero, ponderis longè adhuc maioris futura eſt; vtpote quæ principium, vnde Quadratura hæc colligitur, euidenter concutiat. Illud autem habetur Lem.4. Propoſitionis 7. Secundæ Quadraturæ pag. 154. vbi Quadraturæ promotor hanc affert Aſſertionem.

Eſto ratio B C ad B A ad rationem E F ad E D, vt linea H K ad lineam H G. Dico rationem B C ad C A eſſe ad rationem E F ad F D, vt linea H K ad lineam K G.

Expoſitio.



Hoc eſt H K ad H G, ſit Proportio rationis B C ad B A ad rationem E F ad E D: erit, *inquit*, H K ad K G proportio rationis B C ad C A, ad rationem E F ad F D. Quod vniuerſaliter aſſerit, ſiue fuerit ratio C B ad F E minoris inæqualitatis, vt in priori ſchemate; ſiue, vt in poſteriori, inæqualitatis maioris. At hoc in vtroque caſu propoſitionem hanc Geometriæ repugnare atque adeò Tetragoniſmum, qui ei vel maximè nititur, ſtare non poſſe, euidenter oſtendo, idque duplici initâ ratiocinatione. Priorem inſtituo à poſteriori per numeros quorum Epilogiſmus abſurdum

Digitized by Google

dum non leue ex ea Propoſitione ſequi apertè demonſtrat. Poſterior in cauſâ huius defectûs, qui non niſi ex falſâ aliquâ propoſitione ad probationem Aſſertionis illius aſſumptâ naſcitur, inueſtigandâ tota verſatur.

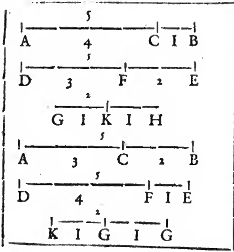
Ad priorem hac primùm vtor ſuppoſitione. Sunto A B, & D E æquales: quarum vtraque partium 5. ſtatuatur, quarum vna ſit C B; duæ verò ſint F E: vt nimirum ratio C B ad F E ſit inæqualitatis minoris, ſub dupla ſcilicet. Sit etiam linea quæcunque G H, quæ bifariam diuidatur in K; vt ſit etiam ratio K H ad G H ſubdupla, ſimilis nimirum rationi C B ad F E. Quibus ſuppoſitis. Ita eſt ratio C B ad B A, ad rationem F E ad E D: vt C B eſt ad F E, ſiue, vt K H ad H G. Nam, cùm A B & D E, quæ ſunt ambarum rationum conſequentes, poſitæ ſint æquales: ita eſt per Prop.7. Lib.1. Exam. Quadrat. ratio C B ad A B, ad rationem F E ad D E: vt eſt antecedens illius C B, ad huius Antecedentem F E. Ita vt ratio C B ad F E ſit proportio rationum C B ad A B, & F E ad D E: quo eodem iure ratio K H ad G H (quos terminos terminis C B, F E æquales hîc eſſe volo) erit earumdem rationum proportio. Cùm ergo hac factâ hypotheſi ita ſit ratio C B ad A B ad rationem F E ad D E; vt eſt K H ad G H (quæ eſt ipſa Authoris ſuppoſitio) ita erit ratio C B ad C A ſiue 1 ad 4, ad rationem F E ad F D, 2 ad 3: vt eſt K H ad K G, nempe vt 1 ad 1 iuxta Authoris Aſſertionem. Quæ ſi vera eſt; verum erit rationem 1 ad 4 æqualem eſſe rationi 2 ad 3. Cùm earum rationum proportio K H I ad K G I ſit ratio æqualitatis I ad I. At rationes 1 ad 4, & 2 ad 3 æquales eſſe aſſerere, id verò eſt abſurdiſſimum rationi ſiquidem 1 ad 4 æqualis eſt ratio 2 ad 8, non autem 2 ad 3. Quod cùm ita ſit, patet Propoſitionis huius (quæ Quadraturæ quaſi nouæ baſis eſt) falſitas.

Alterum in maiorem confirmationem lucemque profero Paradigma, iuxta poſterius ſchema ſuprà allatum, in quo ratio C B ad F E ſit maioris inæqualitatis. Sint iterum A B & D E æquales, trium vnaquæque partium: quarum C B ſit duarum, vnius autem F E: ponatur etiam K H partium duarum G H vnius: ſiue, ponantur K G, G H, æquales duabus C B, F E. His ſuppoſitis. Ita eſt iuxta proximè inſtitutam ratiocinationem ratio C B ad A B, ad rationem F E ad D E; vt K H ad G H: quæ eſt Hypotheſis ab Authore præſcripta. Ergo ita debet eſſe iuxta eundem ratio C B ad A C ad rationem F E ad D F; vt G H eſt ad K G; id eſt vt 1 ad 1 (eſt enim K H partium duarum, & bifariam diuiditur in G) Vnde fit iuxta hanc Aſſertionem, vt ratio C B ad A C (2 ad 1) ad rationem F E ad D F (1 ad 2) ſint æquales,

dupla

dupla ſcilicet & ſubdupla. Quo nihil eſt à vero alienius: Et id miror à Geometrâ pereruditо in re tanti ad inſtitutum ſuum momenti non eſſe obſeruatum. Conſtat ergo ex dictis hactenus ope numerorum & à poſteriori, vitio non carere falſæ huius Propoſitionis probationem; quod occultiſſimum non poteſt non eſſe, quando tantos Geometras, Quadraturæ Authorem (quis enim hæc edita abſque eius approbatione ſibi perſuadeat (eiúſque interpretem ita latuit, vt fugerit Quod vt comperiamus, etſi minimè ad inſtitutum id neceſſarium ſit) cui ſufficit Propoſitionem hanc falſam eſſe oſtendiſſe, vndecunque fuerit profecta falſitas; probationis ab interprete allatæ ſeries relegenda eſt. Quæ ſic habet.

Quoniam, inquit, *ratio B C ad B A eſt ad rationem E F ad E D, vt H K eſt ad H G. Igitur rationis B C ad B A denominator eſt H K, reſpectu H G denominatoris rationis E F ad E D.* Non moror hic rurſus, vt hanc denominatoris rationum ſingularum acceptionem rejiciam, cùm Lib. 1. Examinis Quadrat. Prop. 2. admitti non poſſe demonſtrarim nec paucis nec obſcuris. Quis enim non videat hac in Hypotheſi rationem H K ad H G, eſſe proportionem rationis B C ad B A, ad rationem E F ad E D? atque adeò hanc ipſam rationem H K ad H G dici poſſe, ac reuerà eſſe denominatorem non rationum; ſed rationum earundem



proportionis. Quod vtinam, etſi leue in ſpeciem videatur, obſeruaſſent doctiſſimi cyclometræ: è multis enim ſuis contemplationibus egregiis tenebras deterſiſſent, quas iis offuſas dolemus. Dicatur itaque H K ad H G proportio rationũ B C ad B A, & E F ad E D. Pergit autem. *Eſt verò per Prop. 39. de Proport. vt ratio B C ad B A, ad rationem E F ad E D, ita ratio B C ad E F ad rationem B A ad E D. Erit igitur ratio H K ad H G, ratio denominatorum rationum B C ad E F, & B A ad E D.* Hoc eſt, vt loquor ego, erit H K ad H G proportio rationum B C ad E F, & B A ad E D, ſiue etiam illius proportionis denominator. Veriſſima eſt hæc illatio: & verò in appoſitis ſchematibus,

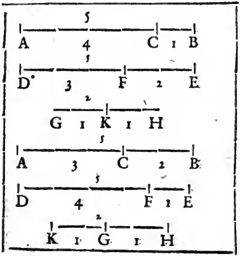
in

in quibus æquales ponuntur termini A B & D E, rationem æqualitatis conſtituunt, clariſſima. Sed pergat Author. *Ergo ratio antecedentium B C ad E F ad rationem differentiarum C A ad F D eadem erit* (ô ſcopulum!) *cum ratione antecedentis H K ad differentiam K G:* Hoc eſt, vno verbo, H K ad K G, eſt proportio rationis B C ad E F, ad rationem C A ad F D. At hîc eſt, cur meritò quæram, quo ex principio? Quâ ex Propoſitione, ſiue in Elementis habeatur; ſiue in tàm amplâ Propoſitionum ad rationes, rationúmque proportiones pertinentium ſyluâ Libro de Proportionalitatibus à P. Gregorio congeſtâ lateat; ſiue ab alio quopiam Authore allata fuerit; hæc illatio deduci queat? nullam enim hic præter morem, prætérque exigentiam (cùm principium per ſe notum non ſit ea conſequentia) citari obſeruare eſt. Nec mirum: cùm, quæ ex eâ ſequitur concluſio, vt ex paulò antè declaratis abſurdis iam patuit, nequeat admitti tanquam vera. Hanc autem ex illa colligit Quadraturæ huius Author. *Sed vt ratio B C ad E F ad rationem C A ad F D: ita eſt ratio B C ad C A ad rationem E F ad F D per 39. de Proport. Igitur vt H K ad K G, ita eſt ratio B C ad C A ad rationem E F ad F D. Quod erat demonſtrandum.*

At hæc concluſio (quæ eſt ipſamet, provt eſſe debet, propoſitio demonſtranda) à veritate alieniſſima eſt, quemadmodum ſuprà per numeros probatum eſt euidentiſſimè. Eius verò defectum, quem ex aliquâ ratiocinationis totius falsâ propoſitione proficiſci neceſſe eſt; non aliunde profectum aſſero, quàm ex eâ vnâ propoſitione: in quâ Quadraturarum interpres ſupponit, (nec vllo modo, vt iam monui, probat) *rationem B C ad E F ad rationem C A ad F D, ita ſe habere vt H K ad K G; ſiue H K ad K G, eſſe proportionem rationum B C ad E F, & C A ad F D:* Ita vt ea ipſa ſola cauſa ſit falſitatis, quam patitur ipſa concluſio, vt numeri ſuperiùs allati apertè demonſtrant.

Et verò præterquàm quòd probatione caret ea Prop. eodémque, quo aſſeritur, iure negari poteſt: eius falſitas arguitur euidenter in duplici ſchematis ſuperioris caſu: in quo vtroque A B, & D E ſupponuntur æquales. Quâ factâ Hypotheſi patuit rationem C B ad F E eandem eſſe cum ratione H K ad H G: & vtramque eſſe proportionem rationis C B ad B A, ad rationem F E ad E D. Cùm enim rationũ C B ad B A, & F E ad E D, conſequentes B A & E D ſint æquales; ita ſe habet ratio C B ad B A, ad rationem F E ad E D, vt antecedens C B ſe habet ad antecedentem F E, ſiue vt K H ad H G. Cum ergo hi duo conſequentes B A, & E D in alios maiores, & minores ſeruatâ æqualitate mutari poſſint, iidémque ipſi antecedentes C B & F E

ſemper retineri: eadem ſemper rationum C B ad B A, & F E ad E D futura eſt proportio C B ad F E, ſiue K H ad H G. Vnde ſequitur præterea vt K H ad K G (ſi vera foret hæc propoſitio) ſemper ſit proportio rationis C B ad F E, ad rationem C A ad F D. At certum eſt, & manifeſtum mutatis conſequentibus A B & D E, in alios inter ſe æquales, antecedentibus iiſdem C B & F E non mutatis, rationes C B ad F E, & C A ad F D, ſemper fore diuerſas; neque poſſe eandem proportionem K H ad K G omnes inter ſe obſeruare. Quod in numeris euidentiſſimè licet intueri, quos non longiùs repetam quàm ex duplici ſuperiori ſchemate, quod ad falſitatem ipſius aſſertionis adduxi, Ecce in priori ſchemate, ſi K H 1 ad K G 1, eſt proportio rationis C B 1 ad F E 2, ad rationem A C 4 ad D F 3; erunt rationes 1 ad 2, & 4 ad 3, æquales: earum enim proportio K H 1 ad K G 1 eſt æqualitatis. In poſteriori verò, in quo K H 2 ad K G 1 eſt proportio rationis C B 2 ad F E 1, ad rationem A C 3 ad D F 4; ratio 2 ad 1 dupla foret rationis 3 ad 4. Quod item falſum eſt. Ratio ſiquidem 2 ad 1; dupla eſt rationis 1 ad 1, non autem rationis 3 ad 4. Atque hoc ipſum aliis atque aliis aſſumptis numeris duobus A B, D E æqualibus, imò & inæqualibus (æquales enim non neceſſitatis, ſed facilitatis gratiâ aſſumpſi) licebit obſeruare.



Cùm ergo in duplici hoc Paradigmate falſum ſit K H ad G K eſſe proportionem rationis C B ad F E ad rationem A C ad D E; etſi K H ad G H ſit proportio rationis C B ad F E, ad rationem A B, ad D E: falſum etiam erit, quod ex eo infert Author per Prop. 39. de Proport. nimirum K H ad G K, eſſe proportionē rationis C B ad C A, ad rationem F E ad F D. Vt habet hoc Authoris Lemma 4 citatum. Quod cùm ſit ad hanc Quadraturam ſummè neceſſarium, vt ex eius ſolutione conſtat, cernis quo ea ſtet loco.

Atque hæ ſunt præcipuæ, maioriſque momenti difficultates (neque enim exhauſtæ ſunt omnes, vt ex dicendis patebit) quæ ex hac Qua-

dratūram

draturam ſtabiliendi promotâ methodo conſequuntur: quibus, etſi non alia occurrerent argumenta (occurrunt autem ea omnia, quæ aduersùs ſecundam, & tertiam quartámque Quadraturam propoſui, quæ hanc etiam attingunt) non leuiter confirmata videtur hæc mea pridem adducta Propoſitio 34. vt vltima qua eam à Geometriâ vix aliquando admittendam pronunciaui in hæc, quæ ne fortè exciderint, refero, verba. *Methodus quaſi noua circulum Quadrandi à Quadraturarum interprete clariſſimo adducta, reÿcienda videtur, non ſolùm ob rationes ob quas ſecundam & cæteras reÿci debere ſuadetur; verùm etiam ob alias peculiares, quæ in illâ methodo occurrunt. Quod erat oſtendendum.*

Monitum.

Oneri, quod ſuſceperam, tum illud meum Quadraturarum celeberrimarum Examen tuendi; tum earundem promotionem à Geometrâ pereruditio initam expendendi ſatisfeciſſe cumulatè, fortaſſe videri debeam: Quia tamen in Quadraturæ illius promotæ diſcuſſione à Theſi vix diſceſſi; dum ipſa, vnde deduceretur, ſola principia expendi: meritò exigat non-nemo, vt hypotheſi ea omnis contemplatio applicetur, gratior omnino, nec paulò planior euaſura. Quod ego ſum eò libentiùs præſtiturus; quò clariùs ex eo elucebit laudati ſæpius Quadraturarum interpretis facultas in Geometricis non vulgaris: quò etiam maior ex eo iis, quæ hactenus agitata ſunt, euidentia, firmitáſque conciliabitur. Hæc porro theſeos ad hypotheſim applicatio, cum tota ferè in eo verſetur; vt quæ ad præcedentis propoſitionis probationem allata ſunt, vltima præſertim difficultas, ſingularibus exemplis ex aliquot Propoſitionibus Quadraturæ promotoris petitis illuſtrentur: ideo eam ſcholiorum ad hanc propoſitionem 34. pertinentium nomine non malè appellaueris: quorum hoc primum eſto.

Scholium Primum.

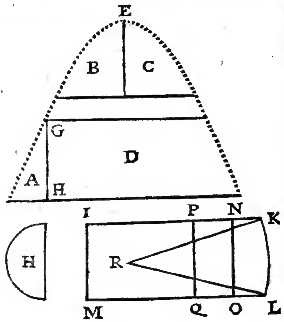
Propoſitio 8. ſecundæ circuli Quadraturæ pag. 156. ab eius Authore in hæc verba enunciatur.

Sit E F axis parabolæ, cui ſit æqualis altera diameter G H iuxta determinationem factam in ſcholio Lem. 2. ductiſque per F & H ad axem normalibus, exhibeantur plana parabolica A B C D.

Oportet tria ſolida cylindrica, orta ex ductu ſubalterno planorum A, B, D, reducere ad eandem altitudinem.

Primò hîc notandum venit problema hoc ad reductionem pertinens cylindraceorum, ſolidis, quæ ex planis A, B, D in ſe ſubalternè ductis oriuntur, æqualium, ad eandem altitudinem, perperam eſſe propoſitum: cùm, vt difficultate primâ ſuperiore retuli, conſtet ex

Prop.4.& 5.Lib.3. Exam. Quadrat. cylindraceorum illorum altitudinem æqualem eſſe, & quidem ſemper Lateri recto parabolæ.



Secundò vult Author diametrũ G H aſſumi *iuxta determinationem factam in ſcholio Lem. 2.* At iuxta illam determinationem nec planum D in ſe ipſa ſubalternè ducuntur; ſed in alia quædam plana vt ſuprà difficultate ſecundâ demonſtraui locum conſule.

Tertiò. *Sit* (inquit idem) *E F Axis Parabolæ.* At ſi E F fuerit Axis parabolæ:nequaquam poſſunt ſolida ex planis B & C in ſe directè & ordinatè ductis genita, in alia ſolida rectilinea illis æqualia per praxim ab eodem traditam Prop.4. reduci, vt innoteſcat (veluti innoteſcere neceſſe eſt) eorum ratio : Quod expoſui ſuprà difficult. primâ.

Scholium ſecundum.

Exponendum eſt hîc Lemma 3. quod, vt ad dicenda maximè neceſſarium Author affert pag,153. Quod claritatis gratiâ terminis propono Arithmeticis, & formâ enuncio propter eandem cauſam paulò diuerſâ. Eſt autem huiuſmodi.

Inter duas quantitates E & H, duæquæuis aliæ F & G interponantur.

Dico proportionem rationis E F ad rationem F H, eſſe ad proportionem rationis E G ad rationem G H; vt quantitas G ducta in ſe ad quantitatem F ductam item in ſe.

Præparatio.

Hæ rationes ita componantur, vt in hoc ſchemate cernitur. Rationis autem E F antecedens E ducatur in H, vt fiat K; & conſeq. F in F, hoc eſt in ſe, vt fiat L. Eodem modo, rationis E G antecedens

E ducatur

Digitized by Google

E ducatur in H, vt fiat iterum K; At conſeq. G ducatur in G, vt fiat Z. Denique tam duo conſequantes F, H; quàm duo G, H in ſe mutuò ducantur, vt fiant M & N.

Demonſtratio.

E	F	G	H
4	6	9	12
K 48	L 36	K 48	Z 81
E 4	F 6	E 4	G 9
F 6	H 12	C 9	H 12
M 72		N 108	

Duæ rationes E F, & F H ad æquales rationes K M, & L M reductæ ſunt: quarum idem eſt conſequens M. Ergo ita ſe habet ratio K M ad rationem L M, vt Antecedens K ſe habet ad Antecedentem L per Prop. 7. Lib. 1. Exam. Quadrat. hoc eſt, K L eſt proportio rationis K M ad rationem L M; ſiue rationis E F ad F H. Eodem modo K Z erit proportio rationis K N ad Z N, ſiue rationis E G ad rationem G H. Sed proportio K L ad proportionem K Z, cùm vtriuſque idem ſit Antecedens K; ita ſe habet, vt reciprocè huius conſequens Z ad illius conſequentem L per Prop. 8. Lib. 1. Exam. Eſt autem Z, quantitas G ducta in ſe; & L, quantitas F ducta in ſe. Ergo ita ſe habet proportio rationis E F ad rationem F H, ad proportionem rationis E G ad rationem G H; vt quantitas G ducta in ſe ad quantitatem F ductam in ſe; hoc eſt, G ducta in ſe ad F ductam in ſe, erit proportionalitas proportionis K L ad proportionem K Z. Quod erat demonſtrandum.

Annotatio.

In hoc ſuo Lemmate R.P. Aynſcom quatuor illas quantitates E, F, G, H ſupponit mixta quædam eſſe plana: vnde occaſio ſeſe mihi offerret opportuna rejiciendi, quod primâ parte capitis 6. de naturâ rationum pag. 22. aſſeruit contra ea, quæ à me definita fuerant Lib. 1. Prop. 2. parte 2. circa denominatores rationum ad quantitatem continuam pertinentium: quos dixeram ſemper eſſe in quacunque illius quantitatis ſpecie duas lineas rectas rationem ſimilem obſeruantes, quam haberent inter ſe propoſitæ quantitates, ſiue planæ, ſiue ſolidæ: nec illius Aſſertionis meæ fundamenta ſatis firma reticueram, quorum primum erat, denominatorem rationis cuiuſuis ſpeciei, cùm is ſit menſura omnium eiuſdem ſpeciei rationum quibuſuis terminis, ſiue planis, ſiue ſolidis, aut lineis etiam curuis expreſſarum, debere eſſe rationem in eâ ſpecie terminis ſimpliciſſimis, & maximè notis expreſſam quorum nullos ſimpliciores, notioréſque ſecundùm ſe lineis rectis eſt obſeruare; eóque nomine illud rationes denominandi offi-

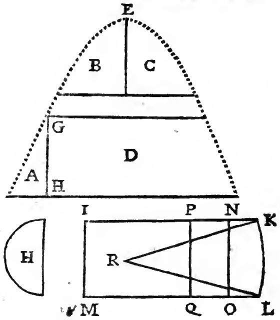
Digitized by Google

cium ad ipſas iure deferri debere: vt omnes ſummi, infimi hactenus detulêre Geometræ: qui rationes terminis vel planis, vel ſolidis conſtantes non niſi rectis lineis, vtpote notioribus, ac facilioribus exponunt. Nec alium huius rei teſtem, quàm ipſummet, aut præſtantiſſimum Geometram R.P. Gregorium ipſius præceptorem, qui tam multa, tamque eximia de rationibus ſolâ linearum rectarum ope adhibitâ tradidit, adduci volo: cenſet tamen id à me perperam aſſertum, cùm notæ nobis minùs non ſint tum planæ, tum ſolidæ quantitates rationem fundantes, nec minùs hæ, quàm lineæ rectæ, aptæ ſint denominatorum fungi munere. Quod, quàm verum ſit, Geometrarum eſto iudicium.

Ad alterum verò, quod citato loco Aſſertionis meæ argumentum adduxi, quid reſponderi queat (neque enim illius vel meminit. Idem Author) non ſatis conijcio. Dixi rationibus conuenire, vt inter ſe multiplicari, diuidi alijſque modis verſari poſſint, non ſecus quàm abſolutæ quantitates: At hoc neutiquam præſtari poteſt: niſi termini rationum inter planas, aut ſolidas quantitates intercedentium, ad lineas rectas priùs reuocentur huiuſmodi operationum capaces. Cuius teſtimonium aliunde, quàm ex hoc Lemmate ab ipſomet Quadraturarum interprete concinnato, luculentius peti non poteſt. Statuit enim ibidem quatuor illas quantitates E, F, G, H, eſſe mixtas planas ſuperficies: quarum duas medias F & G in ſe duci iubet. Verùm vtro ductûs genere? An eo quo plana ſuperficies alteri ſecundum latitudinem adaptata eandem decurrit, eóque fluxu ſolidum format? Id quidem ab eo ita concipi ſignificaret propoſita quantitatum illarum determinatio; cùm ad eandem omnes latitudinem ad huius generis ductam neceſſariam ab eo reuocentur. Sed, cùm citatum Lemma hoc ſuum probet Author per Prop. 84. Libri 8. operis Geom. quæ ad ſimplicem rationum ductum, ſiue multiplicationem ſpectat: haud dubium quin de hoc ſimplici ductu, non autem de altero per fluxum inito intelligi debeat. Vult ergo (nec aliud velle poteſt) vir doctiſſimus, vt harum ſuperficierum rationes terminis exprimantur, qui in ſe duci poſſint: qui alij eſſe nequeunt, quàm lineæ rectæ; quæ terminis illis planis ſubſtituantur eandem cum ipſis ſuperficiebus rationem ſeruantes. Hoc eſt, earum loco ipſarum denominatores aſſumantur. Atque hæc ſatis ad citatam illam aſſertionem meam de denominatoribus ſuo in robore tuendam per digreſſionem hîc dicta ſunto: cui cauſam præbuit ipſius aliter ſentientis Authoris Lemma hoc; quod non niſi per denominatores rationum, vt à me citato loco ſtatuti ſunt, explicari poteſt.

Scholium

Scholium Tertium.



G	V	H	Z
MKLO.	PKLQ.	H.	IKLM

Hoc in ſcholio exponenda venit Propoſitio 9. Quadraturarum interpretis, quâ velut gradu ſenſim pergit ad metã ſibi propoſitam, ad abſolutum ſcilicet hac quaſi nouâ ſemitâ attingendum Tetragoniſmum: quam accuratiùs proſequar velut Principium quaſi præcipuum, vnde deriuetur. Sic itaque habet pag. 157. ſeruatâ tamen formâ à me vſurpatâ ſcholio 2. proponendi Lemma illud 3.

Exponatur, inquit, *eadem Parabola, quæ prius* (quam attuli ſcholio 1.) *Sint autem tria ſegmenta NKLO, H, IKLM; quæ ducta in eandem altitudinem*) quæ eſt Latus Rectum) *facta ſunt æqualia Prop.* 8. *tribus ſolidis ex ductu ſubalterno planorum A, B, D, in ſeipſa genitis. Ad hæc, Sectori RKL æquale fiat ſegmentum P, K L Q.* Quod præſtabitur, ſi bifariam diuiſis RK, RL, per diuiſiones ducatur recta PQ vt docet Elementa.

Tria illa ſegmenta NKLO, H, IKLM eadem ſunt: quæ in diagrammate meo ſuperiùs ſæpe repetito, ſunt baſes cylindraceorum ſolidis E, F, G, H, ex ductu ſubalterno portionum parabolicarum AID, FLO, FLPS, AIN genitis æqualium: quæ vocari præcepi E, F, G, H: & eorum loco, cùm ſint eiuſdem altitudinis, quam metitur Latus Rectum Parabolarum, ipſas eorum baſes eandem cum ipſis cylindraceis rationem ſeruantes ſubſtitui. Differt autem primi & quarti cylindracei baſis E. & H. à me conſtitura à baſi H, quam

Quadra

Quadraturæ Interpres definiuit: quod ego eam ſemicirculum A Q I eſſe aſſeram: aſſerat ille eſſe ſemi-Ellipſim iuxta opinionem ſuam reiectam ſuperiùs, quâ ſibi perſuaſerat cylindracea illa inæqualis eſſe altitudinis: vnde fiebat; vt baſis illa primi & quarti cylindracei E & H; quæ ſemicirculus reuerà foret circa axem E F deſcriptus in eius ſchemate, in meo autem circa axem A I, in ſemi-Ellipſim circa eandem diametrum E F, aut apud me A I, mutaretur. Quod quidem annotaſſe oportuit; vt videas quibus tandem fundamentis nitatur hîc promotus Tetragoniſmus. Cæterùm baſis illa H, ſiue ſemi-circulus, ſiue ſemi-Ellipſis ſupponatur; eadem tamen demonſtratio ab eo allata æquè ſubſiſtit: quæ vt commodiùs proponatur.

Expedit vt vnico Charactere Indice ſingula hæc ſegmenta deſignentur. Segmentum igitur N K L O dicatur G; ſegmentum autem P K L Q æquale ſectori R K L, vocetur V; at ſegmentum I K L M appellabitur Z denique ſemicirculus H eandem retineat appellationem. Has autem appellationes hac in Tabellâ, memoriæ causâ intuere. His ita declaratis. Quid ex factâ ſuppoſitione concludat Author, audiamus.

Dico, inquit, ***notam eſſe proportionem rationis ſegmenti G ad ſegmentum V, ad rationem ſegmenti V ad ſegmentum Z.***

Ad huius concluſionis colligendam probationem ſupponit Author, etſi, vt oſtendi, non ſatis cautè, ita per ſcholium Lem. 2. determinatum eſſe circulum, cuius arcus ſit K L; vt ei ſit hic arcus commenſurabilis: quo fit vt ſector R K L, ſiue per conſtructionem, ſegmentum V ſit ſemicirculo commenſurabile; qui ſemicirculus iuxta conditiones in citato Lemmate appoſitas, eſt etiam ſemicirculo H commenſurabilis. *Vnde ſequitur*, vt ſubdit idem, *notam eſſe rationem ſegmenti V ad ſemicirculum maiorem, cuius arcus eſt K L; & exinde notam etiam eſſe rationem eiuſdem ſegmenti V, ad ſemicirculum H. Igitur etiam nota eſt ratio ſegmenti V ducti in ſe ad ſemicirculum H ductum in ſe* (expoſui in ſcholij præcedentis Annotatione: neque ductus hic accipiendus eſt, quaſi foret ductus plani in planum, vt verba ſonare videntur) *ſed vt V ductum in ſe, ad H ductum in ſe; ita eſt proportio rationis G H ad rationem H Z, ad proportionem rationis G V ad rationem V Z per Lem.* 3. quod expoſui ſcholio ſecundo.

Igitur nota eſt, (concludit ibidem Author) *ratio proportionis* (ſiue proportionalitas) *G H ad rationem H Z. Sed nota eſt proportio rationis G H ad rationem H Z* (*nam eadem eſt cum proportione ſolidorum A, B, D in ſe ordinatè per* 4. *huius*) *igitur & nota eſt proportio rationis G V ad rationem V Z.*

Vides,

Vides, opinor, vnde concludatur, quod propoſitum erat; notam ſcilicet eſſe proportionem rationis, quam habet ſegmentum G ad ſegmentum V ad rationem quam habet ſegmentum V ad ſegmentum Z. Id enim concluditur ex eo, quòd iuxta hoc ſchema proportio ſolidorum ex ſegmentis parabolicis B, A, D, C in ſe ſubalternè ductis genitorum, eadem ſit cum proportione ſolidorum ex eiſdem ſegmentis in ſe ordinatè ductis procreatorum. Hoc eſt, vt iiſdem terminis hîc vtar, quibus tum in Exam. Lib. 3. tum ſuprà vſus ſum iuxta ſchema ibidem à me delineatum: Quòd proportio M N rationis ſolidorum E, F ad rationem ſolidorum G, H, ex ductu ſubalterno ortorum; eadem dicatur cum proportione K L rationis ſolidorum A, B, ad rationem ſolidorum C, D ex ordinato ductu earundem portionum parabolicarum genitorum. Quod dici nullo modo poſſe citatis locis, euidentiſſimis Epilogiſmis demonſtraui. Cùm ergo hæc concluſio tam neceſſaria ſit ad hanc Quadraturæ methodum, vt abſque eius præſidio ſtare nullo modo poſſit; Quid de eâ ſentiendum ſit, Geometrarum eſto Iudicium.

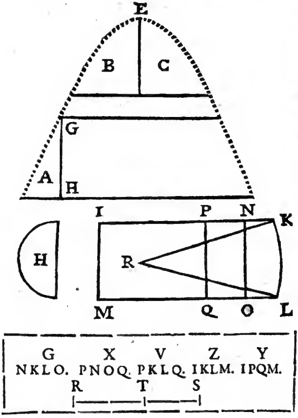
Scholium Quartum.

Ex propoſitione ſuâ 9. de quâ ſcholio præcedente actum eſt, deducit idem Quadraturarum interpres propoſitionem 10, quæ habetur pag. 158. Cùm ergo admitti non poſſit illa; neque admittenda eſt hæc: nec fuſiori ad id concludendum opus eſt Argumentatione. Verùm, quemadmodum in Examine oſtendi, etſi concederetur proportiones illæ duæ, K L, rationum A B, C D; & M N, rationum E F, & G H, reuerà eſſe æquales: nihilominùs ex alio capite Quadraturam non obtineri, vt hîc etiam tradidi: Idem etiam nunc concedamus; &, quod ex eâ conceſſione ſequitur, admittamus, nempe propoſitionem 9 veram eſſe, legitiméque probatam: Atque perpendamus, An ipſa etiam propoſitio 10 alio aliquo ſingulari vitio laboret; quod ipſam, &, quæ ex eâ ſequitur, Quadraturam admitti vetet. Ex eâ porrò conceſſione illud naſcetur commodi, vt omnis de implicatiſſimis illis argumentationibus diſputatio ceſſet: quas præſtantiſſimus Geometra R. P. Gregorius Lib. 10. Oper. Geom. Prop. 56. & aliis, Archimedeâ ſolertiâ, Herculeóque labore iniit; nec omiſit hic eius Auditor, & Interpres Prop. 3. Tractatûs ſui. Sic itaque habet dicta eius Propoſitio 10.

Iiſdem poſitis dico, inquit, *notam eſſe proportionem rationis ſegmenti G ad rectilineum P N O Q.* (quod deinceps vocabitur X) *ad rationem ſegmenti V ad rectilineum I P Q M* (quod vocetur Y.)

V *Demonſtra*

Demonſtratio.



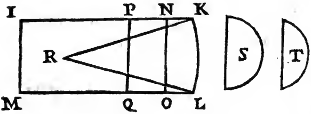
Per præcedentem Prop.9. nota eſt, inquit, *proportio rationis quam habet ſegmentum G ad ſegmentum V; ad rationem, quam habet ſegmentū V ad ſegmentum Z.* (Id ita habere ſupponi permiſi.) *Sit igitur ratio G ad V ad rationem V ad Z; vt ST ad SR. Nota igitur eſt ratio ST ad SR. Igitur & nota eſt ratio ST ad TR. Sed, vt ST ad TR; ita eſt ratio ſegmenti G ad reſiduum X, ad rationem ſegmenti V ad reſiduum Y per Lem.*4. (quod expoſui ſuprà difficult.4.) *Igitur proportio illarum rationum nota eſt.*

Hæc eſt huius propoſitionis à Quadraturæ promotore adducta quàm ſubtilis, tam manca probatio. Cùm enim Lemmati 4 tota nitatur, quod citatâ difficult. 4. falſum eſſe ſatis multis oſtendi; Quid cenſeas niſi falſam eſſe tam probationem, quam ipſam propoſitionem? Itaque habes in hac propoſitione nouum defectum; ex quo ſolo, cùm in hunc Tetragoniſmum proximè influat, ei creetur diſcrimen non mediocre; etſi eum ab omni alio hactenus demonſtrato tam multiplici lapſu, quo eius principia laborant, immunem eſſe concederemus.

Scholium Quintum.

Videamus tandem quomodo inſignis Quadraturarum interpres ex principiis ſuis, propoſitione præſertim proximo ſcholio diſcuſsâ (ſi vt

(ſi vt vera admitterentur) aliquid rectilineum curuilineo æquale, in quo ſitus eſt Tetragoniſmus, colligat.



G	V	Z	X	Y
NKLO.	PKLQ.	IKLM.	PNOQ.	IPQM.

Exponantur, inquit Author Prop. 11. pag. 158. *ſegmenta G, V, Z vnà cũ ſpatiis duobus rectilineis X, Y, & ſemicirculo S: qui per Lem.* 5 *pag.* 154. *traditum, factus ſit æqualis ſectori R K L, ſiue ſegmento V. Dico*, pergit idem, *notam eſſe rationem ſegmenti G ad reſiduum rectilineum X.*

Tum huius propoſitionis demonſtrationem inſtituit: quæ, quia paulò implicatior, obſcuriórque mihi viſa eſt; eius ſeruato ſenſu & ordine, eandem meo ſtylo exponendam cenſui hoc modo. Nota eſt proportio rationis ſegmenti G ad rectilineum X (tabellam vnà cum ſchemate Geometrico, cui illa reſpondet, habeto præ oculis) ad rationem ſegmenti V ad rectilineum Y per Prop. 10. ſcholio præcedenti diſcuſſam. (*Ecce vt citata propoſitio proximè influat, vt meminеram, in Tetragoniſmum.*) Sed proportio rationis G ad X ad rationem V ad Y, eadem eſt per 39. de Proport. cum proportione rationis G ad V ad rationem X ad Y. Igitur hæc etiam proportio rationis G ad V ad rationem X ad Y nota eſt. Fiat iam, vt Y, conſequens rationis X Y, ad ſuum Antecendum X: Ita conſequens V rationis G V, ſiue ſector R K L, aut ſemiculus S, ad ſemi-ellipſim T (quod quomodo fiat, Lem. 6. pag. 155. traditur.) Tunc erit per Prop. 13. de Proport. ratio ſegmenti G ad ſemi-ellipſim T, proportio rationis G ad V ad rationem X ad Y. Sed per Prop. 10, de quâ proximo ſcholio 4. actum eſt, nota eſt proportio rationis G, X, ad rationem V, Y (quæ eadem eſt oſtenſa per 39. de Proport. cum Proportione rationis G, V, ad rationem X, Y) Igitur nota eſt ratio ſegmenti G ad ſemi-ellipſim T. Sed ratio ſemi-ellipſis T per 191 de Ellipſi in Oper. Geometrico ad ſemicirculum S, nota eſt. Igitur nota etiam eſt ratio eiuſdem ſegmenti G ad ſemicirculum S, ſiue ſectorem R K L, aut ſegmentum V. Ergo denique nota erit ratio ſegmenti G ad reſiduum rectilineum X. Quod erat

Digitized by Google

demonſtrandum, inquit idem Quadraturæ fautor ratione autem rectilinei P N O Q ad mixtilineum N K L O repertâ & definitâ; haud difficile foret ipſum totum circulum in rectilineum commutare: quod operæ pretium non eſt pluribus exponere; cùm dicta illa ratio rectilinei ad mixtilineum non niſi ex falſis principiis, vt oſtenſum eſt, deducatur, adeóque non niſi falſam exhibere poſſit Quadraturam, quâ carere ſatius eſt, quàm potiri.

Anacephalæoſis omnium, quæ in poſtremæ huius Propoſitionis 34. probationem allata ſunt.

DVabus partibus conſtat hæc Propoſitio 34, in quâ quid de Quadraturâ à R. P. Aynſcom promotâ ſentiendum ſit, explicatur. In priore parte aſſeritur promotam, ſiue fuſiùs explicatam ſecundam Authoris Quadraturam admitti non debere ob rationes allatas, quibus ipſa ſecunda Quadratura ſuperiùs impugnata fuit. Quarum duæ ſunt præ cæteris inſignes. Prima eſt quia proportio K L (conſule figuram & tabellam ſuprà ſæpius adductam) rationum A B & C D, quas gignit ductus ordinatus; non eſt æqualis proportioni M N rationum E F & G H ex ductu ſubalterno genitarum, vt per numeros fusè declaraui tum hîc, tum aliàs in Examine Quadraturæ ſublatâ autem harum proportionum æqualitate, Quadraturam ipſam tolli neceſſe eſt. Secundò. Etſi duarum illarum proportionum æqualitas ſupponeretur: ex eâ tamen (vt oſtendi) non ſequeretur cognitio rationum E F, & G H ad Quadraturam omnino neceſſaria.

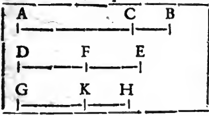
In poſteriore verò parte eiuſdem Propoſitionis 34. aſſertum eſt, eandem Quadraturam ob alias rationes nouas, quas offert ipſa Quadraturæ promotio, ſeu fuſior eius expoſitio ab eiuſdem interprete inſtituta; à Geometriâ vt legitimam agnoſci non poſſe. Earum ergo rationum inſigniores hîc rurſus refrico.

Prima habetur difficult. 1. ſuperiori. Aſſertum eſt à Quadraturæ Patrono ſolida cylindracea æqualia ſolidis ex ſegmentis A I D, F L O (figuram ibidem conſule) in ſe ductis ſubalternè habere diuerſas altitudines. Aſſertionem illam reieci: oſtendíque omnium huiuſmodi cylindraceorum eandem eſſe altitudinem, nempe Latus Rectum Parabolarum: vnde ſequitur; vt in varias conſtructiones deinceps allatas irrepſerit perturbatio, & in Quadraturam ipſam falſitas.

Secundam rationem expoſui difficult. 2. Eſt autem huiuſmodi. Vult Quadraturæ interpres eandem eſſe proportionem K L rationum A B, C D ex

CD ex ductu ordinato genitarum, cum proportione MN rationum rationum EF, GH quas ductus ſubalternus conſtituit: atque adeò notam eſſe proportionem MN, eò quòd nota fieri queat Proportio KL reductis ſolidis ex ſegmentis parabolicis AID, FLO, FSPL in ſe directè ductis in ſolida rectilinea; quæ cùm nota ſint; notæ fiant eorum rationes, ac deinceps rationum proportio KE. At oſtendi ex methodo, quam tradit nullo modo reduci poſſe ſolida illa ex ductibus ordinatis genita, in ſolida rectilinea iuxta determinationem, quam ſemper in hac Quadraturæ ſolutione iubet obſeruari. Ergo etiam ex hoc capite Quadratura hoc modo non poteſt obtineri.

Tertia ratio in tertiâ item difficult. exponitur. In eo autem ſita eſt: quòd ſupponat idem Quadraturæ patronus ſegmentum EFOV parabolicum in ſeipſum ſubalternè ductum generare ſolidum æquale cylindraceo, cuius baſis ſit EKRV (aſſume ſchema citatæ difficultatis.) At cylindraceum, cuius eſt baſis EKRV, non eſt æquale ſolido, quod fit ex ſegmento EFOV in ſeipſum ſubalternè ducto; ſed ei, quod fit ex ſegmento EEOV non in ſeipſum, ſed in ſegmentum EXPV parabolæ obuerſæ, cuius vertex eſt B. Binæ enim quælibet lineæ ad axem AB normales ſiue inter ſe parallelæ, quales ſunt EF & VO intercipiunt ex circulo, cuius diameter eſt AB; connectens vertices A & B parabolarum obuerſarum, ſegmentum EKRV: quod eſt baſis cylindracei ſolido æqualis ex duobus ſegmentis parabolicis EFOV, EXPV inter eaſdem lineas EF, VO interceptis in ſe mutuò ductis genito. Quæ duo ſegmenta parabolica, æqualia nunquam futura ſunt, niſi cùm duæ lineæ EK, VR erunt æquales: quo in ſolo caſu dici poterit alterutrum ſegmentum parabolicum in ſeipſum ſubalternè duci, eo quòd in alterum ſegmentum æquale ſibi obuerſum



ducatur: qualia ſunt ſegmenta EFOV, EGLV intercepta inter lineas æquales ES, & VT: quæ proinde in ſe ducta, ſiue, quod idem eſt; alterutrum in ſe ſubalternè ductum, ſolidum generant æquale cylindraceo, cuius baſis eſt planum mixtum ESTV. Conſule citatam illam difficultatem 3. citataque ibidem loca, vnde hauſta eſt hæc doctrina: & obſerua quàm longè à verâ Quadraturâ abducat hæc methodus.

Quarta ratio, quæ promotam hanc Quadraturam in vltimum diſcrimen vel ſola adducit, demonſtrata eſt difficultate 4. oſtenſum ſiquidem

quidem eſt à veritate planè alienam eſſe propoſitionem, quâ aſſeritur: ſi fuerit rationis B C ad B A, ad rationem E F ad E D proportio H K ad H G; fore H K ad K G proportionem rationis B C ad C A, ad rationem E F ad F D. Quod cùm ita ſit: nec tamen vllo modo poſſit, niſi id verum eſſe ſupponatur, colligi rectilineum mixtilineo æquale, vt apud Quadraturæ interpretem Prop. 11. Quadraturæ 2. colligitur; conſtat neque hanc ſecundam Quadraturam, neque duas inſequentes tertiam & quartam huic perſimiles ad exitum tam fœlicem, quàm optaretur à Geometriæ cultoribus, Geometriæque clariſſimi Luminis R.P. Gregorij à S. Vinc. obſeruantiſſimis, adhuc eſſe perductas.

Finis Libri Primi.

LIBER SECVNDVS.

Explicatur Anguli contactûs natura ex Euclidis, cæterorumque Geometrarum mente: alienáque de eo aliquot Recentiorum ſententia clarè ac euidenter refellitur.

Digitized by Google

LIBER SECVNDVS.

De Angulo contingentiæ.

PROPOSITIO I. *Theorema.*

QVo iure quis aſſeruerit quantitatem infinitè extenſam dari poſſe, eodem quantitatem infinitè diminutam poſſe dari debet admittere.

Demonſtratio.

Quantitatem infinitè diminutam, ſiue infinitè paruam hic voco quantitatem illam, quæ licèt ſæpius in infinitum repetita, aſſignatam quamlibet eiuſdem generis quãtitatem adæquare, ſiue exhaurire nunquam poteſt. Hanc ergo admitti ab eo neceſſariò debere aſſero, à quo admittitur quantitatem dari poſſe tam extenſam, vt aſſignata quælibet quantitas ſæpius in infinitum repetita eam nunquam adæquare queat. Huius prima quidem ratio ex eo deducitur, quòd quantitatis incrementum per multiplicationem ex æquo ſemper opponatur eiuſdem decremento per diuiſionem. Ecce quantitas A, ſi



ſibi addatur, ſiue per 2. multiplicetur; factáque, rurſus multiplicetur per 2, & ſic ſemper fiat, vt conſtituatur Geometrica progreſſio per rationem duplam extenſa (poſſet etiam per aliam quancumque rationem progreſſio conſtitui, per quam data quantitas A in infinitum augeretur) maior ſemper fiet in infinitum quantitas A per hanc continuam multiplicationem. At eadem quantitas A non minùs apta eſt in infinitum minui per diuiſionem continuam per 2 Inſtitutam, vt Geometrica rurſus progreſſio duplæ proportionis inſtituatur: cuius termini priores, ſiue radici A viciniores ſint poſteriorum ſemper duplici, atque ita minores ſemper

Digitized by Google

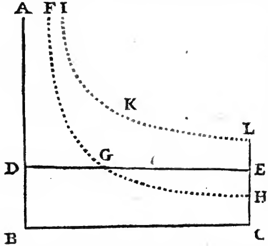
minores in infinitum ſint huius progreſſionis termini: ſicut priùs per multiplicationem maiores ſemper fiebant in infinitum. Vnde patet eandem quantitatem A non minùs aptam eſſe decreſcere per diuiſionem continuam, quàm per continuam multiplicationem augeri. Quòd ſi concipi poſſit quantitatem illam A, infinitam euaſiſſe per infinitas duplicationes, nec ita auctam poſſe vnquam adæquari per continuam repetitionem eiuſdem quantitatis A: eodem modo concipi poterit eandem quantitatem A per infinitas biſectiones infinitè paruam euaſiſſe; nec poſſe particulam huiuſmodi etiam infinities repetitam exhaurire quantitatem aſſignatam A: vnde infinitè parua meritò dici debeat.

At dices, ſucceſſiua illa quantitatis A tam duplicatio, quàm biſectio ad eius infinitatem tam per augmentum, quàm per decrementum aliquando peruentura concipi non poteſt. Reſpondeo non ægriùs concipi poſſe infinitas duplicationes quantitatis A, quàm ipſam eſſe infinitè auctam, vtrobique enim infinitas quædam concipienda reperitur. Deinde, cùm infinitum admittatur, & ſupponatur: poſt infinitum tempus, quale ab æterno eſſet elapſum; nonne duplicationes quantitatis A infinitas, quibus magnitudo genita foret infinita; totidémque eiuſdem biſectiones, quibus in particulam infinitè paruam euanuiſſet, concipere liceret æquè vtraſque abſolutas? Ergo etiam vtraſque infinitas inſtanti vnico (cùm iis eſſentialis non ſit ſucceſſio) abſolui, diuinâ ſaltem potentiâ, non ſine fundamento ſupponere licet. Tunc autem, vt quantitas haberetur infinita ex infinitis quantitatibus A ſimul additis conflata, ita etiam ex infinitis eiuſdem quantitatis diuiſionibus ſimultaneis haberetur particula infinitè parua, quæ repetita ſæpius & ſæpius nunquam poſſet totam quantitatem A adæquare. Quo ergo iure quis aſſeret dari poſſe quantitatem magnitudine infinitam; eodem paruitate infinitam quantitatem dari admittere debet, vt vult hæc propoſitio.

Secundò. Hoc idem poteſt euidenter colligi ex Theoremate quodam ſanè mirabili, quóve nullum in totâ Geometriâ reperiatur paradoxum omni opinione maius; quod proponit & demonſtrat ſubtiliſſimè ſuo modo R.P. Gregorius Lib. 6. Oper. Geom. Prop. 139. Eſt autem eiuſmodi.

Sint duæ lineæ B A, B C Aſymptoti Hyperbolæ F G H: duæ item D A, D E (quarum hæc parallela ſit lineæ B C) ſint Aſymptoti Hyperbolæ alterius I K L, priori & ſimilis & æqualis: ducatur autem quælibet C E parallela Aſymptoto B A, atque fiat parallelogrammum D C. Aſſe

D C. Aſſerit ſummus ille Geometra huic parallelogrammo D C æquari ſpatium inter duas Hyperbolas F G H, I K L interceptum, clauſum quidem ex vnâ parte lineâ H L; at ex alterâ parte versùs F & I infinitè porrectum, nec poſſe terminum vllum huic extenſioni præfiniri; quin præfinito ſpatio, & vtrimque ita clauſo oſtendatur parallelogrammum D C maius. Aliquid ſimile in ſolidis demonſtrant Cauallerius, & Torricellius non ignoti Geometræ: Sed his omiſſis, ſpatio illo Hyperbolico planniori ad rem meam vtor.



Itaque ſtatuto ſpatio illo Hyperbolico versùs F & I infinitè extenſo, quod æquale ſit Parallelogrammo D C: Si in eo poſt infinitam excurſionem, emenſámq; ſpatij hyperbolici infinitã longitudinem inchoatam à linea H L, in quâ ſpatium ex eâ parte terminatur; aſſignari concipiatur particula aliqua illius ſpatij, palmaris, exempli gratia, longitudinis; ea eſſe non poteſt niſi pars infinitè parua parallelogrammi D C, cùm eſſe non poſſit niſi pars infinitè parua ſpatij hyperbolici eidem parallelogrammo æqualis. Si enim aſſignata particula illa palmaris rursùs Hyperbolarum initium H L ſemper repeteretur in infinitum, nunquam longitudinem earum ab eâ particulâ inchoatam poſſet exhaurire, & adæquare; cùm ea longitudo infinita ſupponatur: multò minùs eiuſdem particulæ area, aream exæquaret ſpatij hyperbolici inter aſſumptam eandem particulam, & eius ſpatij initium H L interceptam. Nam ſingula ſpatia palmaria verſus initium H L eò ſemper ſunt maiora, quò magis ad initium accedunt, cùm eorum latitudo ſemper maior ſit: duæ ſiquidem hyperbolæ F G H I K K quò procurrunt longiùs, eò magis ad ſe mutuò accedunt, vt idem citato loco oſtendit Geometra. Ergo multò minùs particula parallelogrammi D C, quæ æqualis foret palmari illis ſpatio, exæquaret infinities repetita ipſum parallelogrammum D C: quod maius eſt ſpatio hyper-

 bolico

bolico inter aſſignatam in eo particulam palmarem, & initium H L; cùm ex toto ſpatio, cui eſt æquale parallelogrammum D C, dematur pars eius illa, quæ vltra particulam palmarem aſſignatam excurrit adhuc in infinitum. Conſtat ergo dari poſſe particulam paruitate infinitam parallelogrammi D C: ſi, provt fert propoſitio, concedatur hyperbolas F G H, & I K L in infinitam longitudinem abire poſſe; vt neceſſariò abire, probari manifeſtè videtur ex eo, quòd ſpatio in longitudinem infinitam extenſo æquale præbeatur parallelogrammum D C.

Objicies, quod paſſim aſſeri apud authores non vltimæ notæ reperire eſt. Nimirum quantitatem quamlibet, ſi infinities repetatur, in magnitudinem excreſcere infinitam, nec poſſe in quauis quãtitate aſſignari particulã eius vllam, à qua ſæpius repetitâ, adæquetur vel non excedatur: Item, Quantitatem nullam poſſe conſtare partibus æqualibus vni certæ infinitis non communicantibus, quales admittendæ forent in ſuperiori, verbi gratiâ, Parallelogrammo C D: in quo continerentur partes infinitæ, æquales palmari illi particulæ hyperbolici ſpatij. Reſpondetur. Cùm euidenter demonſtratum ſit à citatis Authoribus, quibus annumerari etiam debet Valliſius illic præter miſſus, in ſua Infinitorum Arithmeticâ; varias dari quantitates tam planas (qualis eſt illa à P. Gregorio obſeruata) quàm ſolidas, vt à Geometris Aliis adducuntur; quæ, cùm ſint longitudinis infinitæ; certè tamen & aſſignatæ, terminiſque notis vndique circumſcriptæ quantitati ſint æquales: Illud vtrumq;, quod objicitur quod tam abſurdũ hactenus viſum eſt, ſine vllo abſurdũ incurrendi periculo admitti neceſſarium eſſe. Conſtare nimirum quantitatẽ quamlibet partibus infinitis aliquotis, & non communicantibus: & (quod ex eo ſequitur) particulam dari, quæ infinities repetita & aſſumpta, magnitudinem infinitam non producat; ſed aſſignatam quamlibet quantitatẽ finitam. Si enim vna aliqua quantitas determinata, quale eſt parallelogrammum DC ſuperioris ſchematis, ęqualis ſit cuipiam alteri quantitati longitudinis infinitæ: etiam huic æqualis futura eſt quælibet alia quantitas, vel æqualis huic Parallelogrammo, vel aliam quamlibet cum illo Rationem obſeruans vt patet.

Cæterùm, hæc Parallelogrammi C D (de cæteris idem eſto iudicium) in infinitè protenſam ſuperficiem illam duabus Hyperbolis interceptam commutatio haud adeò mira ei videbitur; qui attenderit ſpatium illud hyperbolicum ea ratione fieri anguſtius, qua productius: adeò vt tunc futura ſit eius latitudo infinitè parua, quando ęiuſdem longitudo euaſerit infinitè magna. Vndè confirmatur

tur non leuiter adducta propoſitio. Poſitâ ſiquidem ſpatij longitudine infinitâ; infinitè paruam eius latitudinem poni neceſſe eſt: vt qui illam admiſerit, & hanc eum admittere oporteat. Simile quidpiam in Rectangulis obſeruare eſt. Nam Rectangulum quodlibet in aliud æquale commutari ex Elementis notiſſimum eſt: ſi, quâ ratione longitudo maior ei aſſignatur, eadem, minor eidem tribuatur latitudo. Adeò vt ſi longitudo aſſumeretur infinita, latitudo aſſumenda foret infinitè parua. Tam verum eſt, vt quo quis iure quantitatem infinitè extenſam dari aſſeruerit; eodem quantitatem infinitè paruam dari poſſe aſſerere debeat.

PROPOSITIO II. *Theor.*

INfiniti ad finitum, vel contrà, finiti ad Infinitum nulla Ratio poteſt obſeruari.

Demonſtratio.

Propoſitionem hanc tam claram per ſe non pauci cenſent, vt eam Principij loco habeant. Verùm, cum medio quo probetur, non careat, quidni Theorematibus annumeretur. Illud porro medium è definitione 5.lib.5.Elem. petitur: quâ conſtat neceſſarium eſſe ad hoc, vt duæ quantitates Rationem aliquam inter ſe habere dicantur, vt non tantùm eiuſdem ſint generis (quod definitione 3. iam ſtatuerat Geometra) ſed etiam, *vt multiplicatæ ſeſe mutuò ſuperare poſſint*. Cùm ergo finita quantitas, quacunque continuâ & ſucceſſiuâ multiplicatione initâ, quantitatem eiuſdem generis infinitam adæquare nunquam poſſit; ex eo concludere licet inter huiuſmodi quantitates finitam & infinitam, & ſi ſint generis eiuſdem, Rationem intercedere nullam poſſe.

Probatur ſecundò eadem Propoſitio. Si quantitas finita ad alteram infinitam haberet Rationem aliquam: eam Rationem eſſe, aut irrationalem oporteret. At neutra eſſe poteſt. Cum enim omnis rationalis Ratio reperiri tantùm poſſit inter quantitates commenſurabiles, quæ ſe habent vt numerus ad numerum per Prop. 5. lib. 10. Elem. quantitatis autem infinitæ pertium nullus poſſit ſtatui numerus (nullus enim creatur numerus niſi per continuam vnitatum Additionem; quæ, ſi vnitates fuerint multitudine infinitæ percurrendæ, abſolui nunquam poteſt) patet Rationem illam non poſſe eſſe Rationalem. Sed neque Irrationalis eſſe poteſt. Ea enim reperitur inter duas quantitates incommenſurabiles. At poteſt quidpiam ex earum alterâ detrahi, vel

alteri quidpiam addi; ita vt vel reliqua, vel conflata, fiat alteri quantitati commenſurabilis, & ita ſe habeat ad alteram, vt numerus ad numerum. Quod cùm ita ſit; ex quantitate finitâ quidpiam detrahatur, vt fiat infinitæ commenſurabilis: tunc Ratio finiti ad infinitum daretur, quæ Rationalis foret, Quod iam reiectum eſt. Cùm ergo finitas quantitas ad infinitam Rationem habere non poſſit, vel Rationalem, vel Irrationalem; nulláque Ratio dari poſſit, quæ vel rationalit non ſit, vel Irrationalis: ſequitur Rationem nullam eſſe poſſe inter finitum & infinitum. Quod erat probandum.

Obijcies. Cùm Propoſitione antecedente dictum ſit ſpatium hyperbolicum dari poſſe ſine fine protenſum: quod æquale ſit Parallelogrammo D C; quod ad aliud rectilineum Rationem habere poteſt: An infinitum ad illud etiam non habiturum eſt Rationem? Reſpondetur ſpatium quidem illud hyperbolicum infinitè protenſum Rationem habere ad aliud quodcumque finitis terminis circumſcriptum planum, non ſecus quàm Parallelogrammum C D ſuperioris ſchematis ſpatio illi hyperbolico æquale: longitudinem tamen illius, quæ infinita eſt, ad longitudinem vel Parallelogrammi C D, vel alterius cuiuſcunque plani terminati, Rationem non habere. Debet enim longitudo cum longitudine, & planum cum plano comparari, cùm quantitates, vt Rationem inter ſe habere dicantur, debeant eſſe eiuſdem generis per definit. 3. lib. 5. Elem.

PROPOSITIO III. *Theorema.*

NOn tantùm inter finitam & infinitam quantitatem nulla poteſt, vt proximè oſtenſum eſt, Ratio intercedere: ſed neque inter finitas quaſdam, aliaſque item finitas quantitates.

Demonſtratio.

Illas quidem ſolas quantitates, quæ ſint eiuſdem generis, decernit Euclides definit. 3. lib. 5. Rationis inter ſe capaces eſſe: non tamen eas omnes huiuſmodi, Rationem admittere declarat definit. 5. dum vult, vt vna ſæpius multiplicata alteram ſuperare poſſit: quâ quidem adhibitâ cautione, Rationis iure carere certum eſt duas quantitates, quarum vna finita ſit, altera infinita: Sed præterea alias deſignat quantitates, quæ finitæ cum ſint; nullam tamen Rationem inter ſe habere poſſunt: cuiuſmodi tunc erunt, cum vna ſæpiùs repetita, alteram adæquare non poterit. Quas reperiri poſſe ſatis declarat Geometra, dum illam

illam multiplicationem, vt certiſſimum Rationis inter quantitates intercedentis ſignum, aſſerit eſſe: cuius haud quaquam mentionem vllam feciſſet; ſi per eam ſolas quantitates deſignaſſet; quarum vna finita foret, altera infinita: clariùs enim eas in terminis, vt promptum erat, expreſſiſſet. Voluit ergo præter finitæ quantitatis ad infinitam, etiam finitæ ad finitam, habitudinem eâ definitione citatâ complecti. Quænam autem ſint quantitates eius generis finitæ, vt vna ad alteram Rationem habere nequeat, non alias ab Interpretibus adduci comperies: quàm contingentiæ Angulos ad Angulos Rectilineos, vel alios quoſdam mixtos, comparatos. De quibus prolixior deinceps habenda eſt diſputatio. Nunc interim certum ac ſtatutum ſit dari finitam quantitatem, aut (ſi minùs placet Angulos, quantitates appellare) quantitatis iure potientem: quæ ad aliam eiuſdem generis quantitatem finitam ex mente Geometræ, eiuſque Interpretibus Rationem habere non poſſit, vt hac Propoſitione aſſertum eſt. Quæ tunc euidentiùs conſtabit, cùm ipſas eius generis quantitates inferiùs exhibebuntur.

Objicit P. Aynſcom Prop. 4. Capitis 2. de natura rationum in Reſponſione ad Amicum, quem vocat, Geometram: cuius nomen inferiùs in Primâ, quam exponit, circuli Quadraturâ pag. 90. non ſine meritiſſimâ commendatione prodit: Illum enim amicum Geometram, non alium eſſe mihi conſtitit ex Ipſiuſmet Literis quàm quem vocat *R. P. Ioannem Baptiſtam Giattinum, virum in Philoſophicis & Theologicis ſolidè doctum: Latinæ, Græcæ, Hebraicæ, Arabicæ literaturæ bene peritum; in ſubtilitatibus Mathematicis oculatiſſimum.* Cui encomio eò libentiùs ſubſcribo, quò plura & euidentiora ab eodem edita ſunt harum omnium inſignium facultatum ſpecimina. In Reſponſione igitur ad obiectionem quandam à tanto viro quoad Angulos contingentiæ propoſitam: hæc habet. P. Aynſcom, quæ cum hac Propoſitione meâ non ſatis conuenire videntur. Inquit enim. *Suppono, inter duas magnitudines aliquam eſſe Rationem, idem eſſe ac duas magnitudines ſecundùm quantitatem poſſe comparari: Rurſum illas magnitudines ſecundùm quantitatem poſſe comparari, de quibus dici poteſt hæc maior, aut minor eſt illâ: vnde conſequens eſt, magnitudines illas iuxta defin. 5. lib. 5. Eucl. eiuſmodi eſſe, vt vna aliquoties ſumpta poſſit alteram æquare, vel ſuperare.*

At inquam Ego bonâ cum tanti Geometræ veniâ, ſi inter duas magnitudines aliquam eſſe Rationẽ idem eſt, ac duas magnitudines ſecundùm quantitatem poſſe comparari; Id eſt, vt Ipſemet exponit, de quibus dici poteſt: Hæc maior, aut minor eſt illâ; vnde neceſſariò ſequatur (vt Idem colligit) vt vna aliquoties ſumpta poſſit alteram æquare vel ſuperare.

perare. Si, inquam hæc ita ſe habeant. Quæro Quorſum Euclides poſtquam definit. 3. Rationem definiuiſſet eſſe habitudinem duarum magnitudinum eiuſdem generis ſecundùm quantitatem, hoc eſt, ſecundùm quod vna maior eſt, aut minor alterâ, aut ei æqualis; vnde conſequens eſſet, vt vna aliquoties ſumpta æquare vel ſuperare alteram poſſet, vt vult P. Aynſcom: quintâ illam definitionem adiunxiſſet, quâ declararet, quænam duæ quantitates eiuſdem generis Rationem inter ſe habere poſſent; eaſque ſolùm pronunciaret Rationis alicuius mutuæ eſſe capaces) quibus ea conditio conueniret, vt vna aliquoties ſumpta alteram poſſet æquare, vel ſuperare? Nunquid duarum quarumlibet quantitatum propoſitarum vna aut minor alterâ, aut ei æqualis eſſe poteſt? Atque adeò iuxta ſententiam & expoſitionem Patris Aynſcom nunquid earum vna aliquoties ſumpta alteram poteſt vel æquare, vel ſuperare? Ne igitur Geometricæ Parentem definitionem illam quintam definitioni tertiæ perperam (qui ne ſyllabam quidem perperam tradidiſſe eſt vnquam obſeruatus) appoſuiſſe cenſeamus: dicendum eſt aliud eſſe, duas magnitudines generis eiuſdem poſſe comparari ſecundùm quantitatem, ſiue ſecundùm exceſſum & defectum, aliud, vnam aliquoties ſumptam alteram poſſe æquare, vel ſuperare, atque adeò habere inter ſe Rationem. Poſſunt ſcilicet duæ quantitates eiuſdem generis ſecundùm quantitatem, hoc eſt, ſecundum maius & minus comparari, neque tamen Rationem habere inter ſe: neceſſarium quidem eſt, vt duæ magnitudines Rationem inter ſe habeant aliquam, vt ſint eiuſdem generis, & ſecundum quantitatem, hoc eſt, ſecundum maius & minus, aut æquale comparentur, vt exponit definitio 3. non ſtatim tamen vt conſtiterit duas magnitudines ita comparari poſſe, vnámque alterâ aut maiorem, aut minorem dici; conſtabit eas Rationem aliquam habere, niſi etiam conſtet iuxta definitionem quintam vnam aliquoties ſumptam æquare, vel ſuperare poſſe alteram. Et verò Quis ſiue P. Aynſcom, ſiue Alius negare poteſt quantitatem finitam minorem eſſe quantitate infinitâ, vel hanc illa maiorem; nullam tamen inter eas quantitates Rationem intereſſe fatentur omnes. Quare ne ſupponat laudatus Author *duas magnitudines aliquam habere Rationem, idem eſſe ac duas magnitudines ſecundùm quantitatem poſſe comparari, ſiue ſecundùm exceſſum & defectum; quo vna dicatur maior aut minor altera; vnde conſequatur magnitudines illas iuxta defin. 5. lib. 5. tales eſſe vt vna aliquoties ſumpta alteram poſſit æquare, vel ſuperare.* Id enim & ab Euclidis mente, eiuſque Interpretum omnium, & à verò alieniſſimum eſt; vt ex dictis

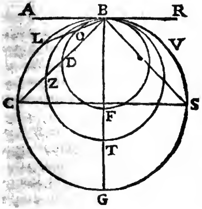
dictis patet, dicendiſque patebit. Certum itaque fixúmque ſit, Inter duas quaſuis quantitates finitas non ſemper intercedere Rationem. Quod hac Prop. aſſertum eſt.

PROPOSITIO IV. *Definitio.*

PLanus Angulus eſt duarum linearum in plano ſe mutuò tangentium, & non in directum iacentium alterius ad alteram inclinatio.

Expoſitio.

Hæc eſt ipſamet ab Euclide Anguli plani allata definitio lib. 1. defin. 8. huc aſſumpta, vtpote continens futuræ tractationis fundamentum. Duarum ergo cuiuſcunque generis linearum in plano ad vnum aliquod punctum concurrentium Inclinatio, Angulus à Geometrâ, eiuſque Interpretibus appellatur. Itaque ſiue duæ lineæ rectæ non in directum poſitæ ad vnum punctum conueniant; ſiue duæ curuæ, ſiue curua & recta, ſibi mutuò in puncto quomodocunque committantur ſe aut tangendo aut ſecando: Angulum verum & propriè dictum ex mente Euclidis, cæterorúmque nominis alicuius Geometrarum conſtituunt, vt ex locis eius aliquot facilè licet obſeruare. Nam Idem definit. 9. lib. 1. quaſi duo genera Angulorum diſtinguens, poſt ſtatutam Anguli definitionem, pronuntiat *Angulum Rectilineum, illum eſſe qui rectis lineis continetur.*



Quem ergo curuilineum (ſi eo deinceps perindè eguiſſet, vt Rectilineo) dicturus erat, niſi eum, qui curuis lineis conſtitueretur? Deinde, nónne celebri illâ Propoſitione 16. Libri 3. lineæ rectæ cum circulari concurſum, Angulum vocat; qualis eſt in appoſito ſchemate concurſus peripheriæ C L B, & rectæ lineæ A B ipſam peripheriam in B tangentis? Qualis item eſt concurſus eiuſdem peripheriæ C L B cum circuli diametro B G: quem vocat ſemicirculi Angulum; qui ſpecies eſt Anguli ſegmenti, quem defin. 6. Lib. 3. definierat eum eſſe, qui ſub rectâ lineâ & circuli

 periphe

peripheriâ comprehenditur: cuius alias ſpecies nominat Prop. 31. Lib. 3. dum ait Angulum maioris ſegmenti (ſegmenti ſcilicet maioris ſemicirculo) qualis eſt angulus C B V S, rectâ C B, & peripheriâ B V S contentus, maiorem eſſe Angulo recto: Angulum verò ſegmenti minoris, vt Angulum eadem rectâ C B, & arcu C L B comprehenſum, Angulo recto minorem aſſerit.

Ex his habes quid Geometriæ tum Parens tum Cultores de Angulo plano definierint. Vnus ab his deſciſcere viſus eſt Peletarius; qui contactus Angulum, quem ſcilicet linea recta A B cum arcu C L B, quem tangit in B, comprehendit; non Angulum; ſed nihilum eſſe ſomniauit, & ſtabilire conatus eſt. Sed pro eo ac merebantur, huiuſmodi ſomnia à clauio clauianâ, hoc eſt, maturâ, ſolidáque cenſurâ à veræ Geometriæ ſtatutis expuncta pridem fuere. Ex eo tamen, quòd mirere, non-nemo Academiæ Oxonienſis Matheſeos Profeſſor non imperitus Valliſius Peletarianarum hallucinationum patrocinium ſuſcepit: ſed hinc non abſcedemus quin euidenter pateat, quàm præſtet tutam tritámque à Maioribus veritatis viam incedere, nouámque per abrupta non tentare.

Eſto interim certum & conſtitutum, Euclidem hac Libri 1. definitione 8. non tantùm Angulum duabus rectis lineis in plano coëuntibus conſtantem voluiſſe complecti; ſed etiam Angulum quemlibet, quem recta linea peripheriæ circuli quouis modo occurrens, ſiue tangat, ſiue ſecet, comprehendit. Notum item eſto, ac definitum omnes Geometras tum Antiquos tum Recentiores veritatis & obſeruantiæ gratiâ Euclidis ſententiæ ſubſcripſiſſe. Quanquam Valliſius (quo ductus ſtudio, me latet, Ipſe viderit) aſſerere non dubitarit ad calcem Capitis 2. Diſquiſitionis de Angulo contactus, *Recentiorum aliquot magnos viros, & ex veteribus fortaſſe nonnullos de Angulo contactus ita locutos eſſe, ac ſi haberet Anguli quantitatem adeóque de Angulo ſemicirculi tanquam minori, quàm ſit Angulus rectus rectilineus. Sed Argumentis hac in re, inquit, agendum eſt non Authoritatibus.*

Quis ex Antiquis, Valliſi, quis ex Recentioribus præter Peletarium illum Clientem tuum) quorum copia tum horum, tum illorum tanta eſt, tantáque Euclidem Interpretandi facultas; de Angulo contactus, & circuli ſegmentorum aliter, quàm ipſemet Euclides locutus eſt? Quis in dubium reuocauit, quæ de eo ab Euclide fuiſſent conſtituta? A quo de eodem vel minima eſt inita diſceptatio? Vt dixeris Recentiorum aliquot, nonnullóſque Antiquorum tantùm, non autem omnes cum Euclide & ſenſiſſe, & locutos eſſe: neque ſtandum eorum Authori

Authoritati, ſed ipſis ſolis Argumentis & Rationibus. Quænam ſint illa tanti ponderis Argumenta tua: quibus, vt miſſo facto Euclide, eiuſque cultoribus, Pelectario ſtuderes, perſuaſus es; expendetur in ſequentibus. Ad quæ pergo.

PROPOSITIO V. *Principium.*

NVllus Angulus vera eſt Quantitatis ſpecies: veræ tamen quantitatis facultates Anguli omnes ſibi vendicant.

Expoſitio.

Cùm Angulus quilibet ſit duarum linearum coëuntium Inclinatio; quæ Inclinatio aliud non eſt, quàm quidam alterius ad alteram ſitus, & compoſitio: ſatis patet Angulum ad Quantitatem non pertinere, ſed ad ſitum: aut etiam, ſi magis lubeat, ad qualitatem: eò quod duæ quæcunque lineæ ſeſe in puncto concurrentes initium quoddam ſint figuræ; & verò interceptam ſuperficiem ita, aut ita modificent, aut figurent: figura autem quælibet, non ad quantitatem; ſed ad Qualitatis genus pertinet. Eſt ergo Angulus non Quantitas, ſed Quantitatis quidam tantùm modus, vt etiam Lib.2. Prop.27. Examinis Quadrag. expoſui.

Attamen. Quamuis Angulus nullus ad Quantitatis genus pertinere nullo modo poſſit: non ideò debet omni facultate; quæ quantitatis propria ſit, eíque primariò conueniat, priuari; eodem iure, ne dicam potiori, quo alia Entia non pauca illam ſibi vindicant quaſi ſibi cum Quantitate communem, vt ſuſcipiant magis & minus; quòd à quantitate abeſſe non poteſt. Sic enim motus, ſic tempus, ſic relationes quædam, ſic qualitates non paucæ magis & minùs ſuſcipere natæ ſunt. Quod dixi ad Angulos potiori iure pertinere propter maius ipſorum cum vera Quantitate commercium. Ipſorum enim quantitas (ſaltem Rectilineorum omnium) per veram quantitatem, arcus ſcilicet circulorum menſuratur. Eorundem materiale, lineæ videlicet Angulum conſtituentes, vera eſt quantitas. Non minor eorum Ratio in Geometriâ quàm linearum haberi poteſt; nec minùs eſt eorum cognitio neceſſaria, quàm eos continentium linearum. Quæ cùm per ſe pateant; etiam per ſe conſtat Angulos veræ quantitatis facultates ſibi vindicare, quarum contemplatio ad Geometriam ſpectet.

Obſeruandum porrò eſt. Etſi dixerim Angulos omnes, cuiuſuis ſcilicet generis, veræ quantitatis facultates ſibi vindicare; haud tamen id ita intelligendum eſſe, vt quilibet Angulus proprietates omnes

quantitatis ſortiri poſſit: quibuſdam enim omnes competent, non omnes competent aliis. Illud quidem certum, Angulis omnibus, vt oſtenſum eſt, proprietatem conuenire, quâ quantum quodlibet, quanto altero maius, vel minus, vel ei æquale dici poteſt. Quæ quomodo contingant, contemplandum eſt.

PROPOSITIO VI. *Theorema.*

QVilibet Angulus alium aliquem includere, vel ab eo includi poteſt; eóque nomine dici eodem maior, vel minor.

Demonſtratio.

Quod ad Angulos quidem Rectilineos pertinet: niſi tanquam Principium per ſe notum admittatur Angulum rectilineum, dici poſſe alterum item rectilineum Angulum includere; atque includentem incluſo eſſe maiorem: non video quodnam Principium notum per ſe in Geometriâ reperiatur; cum aliud nihil per illud afferatur, quàm totum eſſe parte maius, quo quid per ſe euidentius? Eo certè nemo vnus non paſſim vſus eſt hactenus Geometra poſt Geometriæ Parentem, vt primo & tertio Elementorum, & aliàs vbique, quoties occurrit Angulus per rectam lineam diuiſus, obſeruare eſt; toties enim Angulum diuiſum maiorem eſſe vtrouis per diuiſionem facto Angulo tanquam totum parte, abſque aliâ probatione ſupponit.

Nec mihi admodum probari poteſt Patris Aynſcom ſententia, cap. 2. Prop. 4. Quæſt. 4. de Nat. Rationum aſſerentis ita omnem quantitatis rationem ab Angulo quouis rectilineo alienam eſſe; *vt comparari inter ſe ſecundùm exceſſum & defectum nullo modo poſſint, niſi prout ſunt*, inquit, *terminati vel terminabiles per communem menſuram, quæ eſt arcus circularis. Vnde, cùm Euclides, cæterique Geometræ Angulum vnum rectilineum minorem maiorémue dicunt altero: nihil aliud volunt, quàm Angulum vnum, maiorem vel minorem intercipere arcum circuli, quàm alter in eodem circulo intercipiat.* Mihi inquam, non probatur hæc ſententia. Neque enim Angulorum menſura communis eſſe poteſt, arcus circularis; cùm menſuram omnem menſurato homogeneam eſſe neceſſe ſit: vt Angulus non niſi Angulo, & arcus non niſi arcu, & linea recta rectâ item lineâ menſuretur: omnis ſiquidem menſuratio non niſi per menſuræ applicationem inſtitui poteſt. At, quî hæc Applicatio

Applicatio abſoluatur, ſi heterogenea aſſumatur menſura? Deinde, cùm Euclides paſſim citatis locis concludit Angulum quempiam rectilineum alteri Angulo rectilineo, æqualem eſſe, aut eodem maiorem, vel minorem. An oſtendit (oſtendere neceſſarium erat) arcus ab his Angulis interceptos æquales eſſe; vel vnum altero maiorem eſſe, vel minorem? Cùm ne arcuum quidem vſpiam mentionem faciat, ſed includentis tantùm & incluſi Anguli: ex quâ incluſione colligatur tanquam ex Principio per ſe noto vnum altero eſſe maiorem.

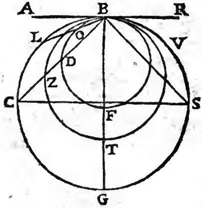
Denique, vt euidentiſſimè conſtet ex Euclide, Angulos rectilineos non arcubus, ſed Angulis eiuſdem rationis menſurari debere; eoſque inter ſe, non ratione arcuum, quos intercipiunt, ſed ratione ſuæ propriæ extenſionis, comparari: perpendatur Propoſitio 33. Lib. 6. Elem. quæ ita habet. *In æqualibus circulis Anguli eandem habent Rationem cum peripheriis, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant:* Inſuper verò *& ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt.* Cernis igitur vt Geometra tam Angulos, quàm ſectores eandem Rationem habere dicat, quam habent arcus, quibus inſiſtunt; nec vllam ſtatuat quoad Rationem, ſiue mutuam comparationem, inter Angulos & Sectores diſcrepantiam. Quemadmodum ergo Arcus, quibus ſectores conſtituuntur, non ſunt ſectorum menſura, ſed indicant tantùm quænam ſit Sectorum inter ſe Ratio: ita etiam ex mente Euclidis iidem arcus menſura non ſunt communis Angulorum; ſed eandem cum Angulis Rationem habere dicuntur, ſiue eandem ſecundùm quantitatem habitudinem: ita vt, licèt Anguli, non perinde vt ſectores, ſint veræ quantitates (ſunt enim ſectores planæ ſuperficies ad ſecundum quantitatis genus pertinentes) ſed quantitatis facultates obtineant, vt ſuprà declaratum eſt; non minùs tamen Rationem habeant inter ſe, quàm ſectores ipſi; & poſſit Angulus quilibet rectilineus, ad Angulum alterum item rectilineum comparari non tantùm quoad exceſſum & defectum genericum, ſiue maius & minus; ſed etiam quoad talem vel talem ſpecificum exceſſum, vel defectum: in quo Rationis eſſentia inter duas quantitates eiuſdem generis conſiſtit.

Vis aliud ſuper hac re Euclidis teſtimonium apertius? Conſule Propoſitionem 30. Lib. 3. Elem. In quâ Geometra modum tradit datam peripheriam bifariam ſecandi. Diſces euidenter ex demonſtratione, quam ſuæ conſtructionis affert, quàm ab eâ ſententiâ alienus ſit, vt velit Angulos inter ſe comparari non poſſe ſecundùm ſe; ſed eatenus tantùm; quia peripheriæ, quibus inſiſtunt, ſunt inter ſe com-

 parabiles

parab les. Demonſtrat enim datam peripheriam eſſe duas in partes æquales rectè diuiſam, eò quòd Anguli duo æquales (nempe recti) ad medium chordæ datam peripheriam ſubtendentis punctum per conſtructionem conſtituti ſint. Cauſa ergo æqualitatis duorum arcuum, in quos diuiſa eſt data peripheria; eſt ipſa Angulorum æqualitas, ac proinde prior omni arcuum æqualitate. Vt verè per ſe, nulla arcuum habitâ ratione, anguli ſint dicíque debeant æquales ab eo, qui nolit Geometriæ Parentem alicuius (quod abſit, vt abfuit hactenus) oſcitantiæ accuſare: idem enim per idem alioquin diceretur.

Statutum ergo fixúmque ſit non minùs angulos, quàm arcus inter ſe comparari poſſe, eſto per arcus eorum quantitas menſurari queat; adeóque Angulorum rectilineorum alios aliis eſſe maiores, alióſque in aliis, minores in maioribus includi poſſe. Quod cum de Angulis rectilineis probatum ſit, conſtat quid de curuilineis, mixtiſque Angulis (cùm non minùs, quàm rectilinei ſint duarum linearum inclinatio) dicendum ſit. Nihilominùs ſuper hac re Geometram conſulamus.



Vnde probat Euclides Prob. 16. Lib. 3. Angulum ſemicirculi C L B G in Superiori Diagrammate maiorem eſſe omni Angulo acuto, niſi ex eo, quòd Angulus ſemicirculi omnem Angulum acutum rectilineum amplectitur, & includit? Vnde Angulum contingentiæ C L B A omni acuto rectilineo eſſe minorem, niſi quia omnis acutus rectilineus Angulus illum continet? Propoſitione autem 31. eiuſdem Lib. 3. Vnde concludit Angulum C B V S maioris ſegmenti maiorem eſſe Angulo recto C B S, niſi quia hic ab illo includitur? contra verò Angulum S B V S minoris ſegmenti recto Angulo eſſe minorem; niſi quia rectus Angulus G B R Angulum illum minoris ſegmenti intra ſe complectitur?

Patet ergo quàm verum ſit Geometram, eiuſque Interpretes omnes (omnes enim ita ſunt loca citata interpretati) aſſerere Angulos Angulis aliis eſſe maiores, & alios ab aliis contineri, includíque poſſe: ac proinde inter ſe ſecundùm quantitatẽ, hoc eſt, ſecundũ exceſſum, & defectũ poſſe cõparari. Quò collimat hęc Propoſitio licèt de Angulorũ

ſolâ

ſolâ continentiâ mentionem faciat, cùm ex ea neceſſariò conſequatur iuxta ſtylum Euclidianum, exceſſus eorum, vel defectus ad inuicem.

Nec audiendi videntur Peletarius, eiuſque fautor Vallisius cap. 2. ſuæ de Angulo contactus diſquiſitionis. Dum aſſerunt nihil mirum, ſi Euclides Propoſitione illa celebri 16. Lib. 3. dixerit Angulum contactus minorem eſſe omni Angulo acuto rectilineo: cùm Angulus ille, nec Angulus ſit, nec quantus. Nec aliter, inquit Vallisius, ſenſiſſe Euclidem ex Euclide colligi poteſt. At verba ipſa Propoſitionis quæſo, Vallisi, recita. *Semicirculi quidem Angulus quouis Angulo acuto rectilineo maior eſt.* Perge, *reliquus autem*, quis reliquus? Equus Troianus? *reliquus autem*, Angulus contactus, *minor*. Ergo ex Euclide Angulus contactus, Angulus eſt; & quia ex eodem minor eſt quouis acuto Angulo rectilineo; ex eodem quoque quantus eſt, non autem nihil: abſurdiſſima enim foret, & à ſummo viro alieniſſima comparatio: quâ duorum Angulorum vnum, quem quantum ſupponeret, altero qui nihil reale foret, maiorem aſſereret, ac nihilo maiorem pronunciaret. Non erat, mihi crede, dialectices Præceptorum tam neſcius magnus Euclides, vt ignoraret Totius diuiſionem iniri non poſſe niſi in partes præexiſtentes, totúmque rurſus aptas conſtituere. At Totum, vt in diagrammate ſuperiori angulum rectum A B G, ſi diuidas in Totum, nempe Angulum ſemicirculi C L B G (hic enim ex vallisio æqualis eſt Angulo ipſi recto A B G) & in nihilum, nempe Angulum contactus C L B A: quid abſurdius committi poteſt? niſi fortè hoc ipſum dicas, vt dicit Vallisius, ab Euclide cõmiſſum. Verùm hîc de his ſatis, quę pluribus à Clauio cõtra Peletarium methodo ſolidiſſimâ, doctiſſimáque pertractata reperies.

Nec etiam omnino placet, quod aſſerit P. Aynſcom. cap. 2. Prop. 4. de Naturâ Rationum. *Nimirum Euclidem, dum ait ſemicirculi Angulum C L B G maiorem eſſe quouis acuto rectilineo Angulo, vt L B G; reliquum verò Angulum contactus C L B A quouis acuto minorem: nihil aliud velle, quàm quod priore Propoſitionis eiuſdem 16. Lib. 3. parte aſſeruerat: nempe, quòd inter contingentem A B, & peripheriam C L B, nulla recta cadere poſſit, quin circulum ſecet.* Hoc autem ideo aſſerit laudatus Auctor, vt occurrat obiectioni, quam fieri poſſe, nec ſine fundamento, arbitrabatur. Nimirum, cùm Euclides comparet ſecundùm quantitatem Angulum ſemicirculi, & angulum contingentiæ cum Angulo rectilineo acuto; hunc enim Angulo ſemicirculi minorem, angulo autem contingentiæ maiorem pronunciat: quæ comparatio eſt ſecundùm maius & minus, quod eſt proprium quantitatis. Ergo contrà quàm ipſe cum P. Gregorio ſentiat, Anguli tam rectilinei, quàm mixti, ſe-

miciruli,

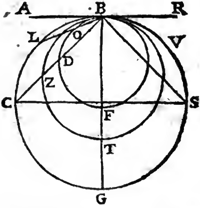
micirculi, & contactus, ſunt quanti ex mente Euclidis. Huic, inquam, obiectioni vt occurrat, aſſeruit ſecundam partem Propoſitionis, quâ ait Geometra Angulum contactus C L B A in ſchemate, eſſe minorem omni angulo rectilineo; à primâ parte eiuſdem Propoſitionis non eſſe diuerſam: eúmque tantùm velle inter tangentem A B, & peripheriam C L B, rectam lineam ad punctum B duci non poſſe.

At tantorum Geometrarum bonâ cum veniâ dicam Reſponſionem hanc admitti vix poſſe. Non poſſe, inquam, admitti ſecundam partem Propoſitionis illius 16. Lib. 3. eſſe ex mente Euclidis eandem cum priore. Cùm enim Euclides in ſecundâ parte inferat Angulum contactus minorem eſſe quouis Angulo acuto rectilineo, ex eo, quòd in priore parte oſtenſum eſſet inter contingentem A B & peripheriam C L B duci nullam poſſe rectam lineam ad punctum B; quin circulum ſecet (hoc enim Argumento probat primam illam partē) ex quo deinde per ſe conſequatur quemuis Angulum acutum, vt L B A, includere, ſiue excedere Angulum contactus CLBA, ſiue, quod idem eſt, hunc ſemper eſſe illo minorem: ſi hunc ſemper eſſe illo minorā (quæ eſt ſecunda pars Propoſitionis, quæ infertur) idem foret, ac nullam poſſe rectam lineam duci ad contactum B inter tangentem A B, & peripheriam C L B, ſiue quamcunque ductam lineam infra lineam tangentem A B, circulum ſecare; nonne nugatoria videretur Illatio illa? Inferretur enim nullam duci poſſe rectam lineam tangente A B inferiorem ad contactum B, quin circulum ſecet; ex eo quòd nulla duci poteſt recta linea tangente A B inferior ad contactum B, quin circulum ſecet. Rectè autem infertur Angulum contactus C L B A quouis acuto Angulo rectilineo L B A eſſe minorem; ex eo quòd nulla recta linea L B inter tangentem A B, & peripheriam C L B ad contactum B duci poſſit, quin circulum ſecet, ſiue Angulum conſtituat rectilineum, Angulum contactus C L B A includentem, ſiue Angulo contactus maiorem.

At inſtat citato loco P. Aynſcom. Cum in ſecundâ parte Propoſiſ nis aſſerit Euclides Angulum contactus quouis Angulo acuto rectilineo eſſe minorem: ita intelligi non poteſt, vt duos illos Angulos, Rectilineum & contactus, ſecundùm quantitatem comparet. Hæc enim comparatio exigit communem aliquam vtriuſque menſuram ſecundùm quam poſſit iniri comparatio: Sed nulla eſt in Geometriâ communis menſura inter Angulos Rectilineos, & mixtilineos; ergo nec vllum fundamentum eos inter ſe comparandi. Quod cùm ita ſit; cùm in ſecundâ parte Propoſitionis ſuæ Euclides aſſerit Angulum contactus quouis acuto Angulo rectilineo eſſe minorem; cùm omni

Angulos

Angulos illos ſecundùm quantitatem, ſiue ſecundùm maius & minus comparandi fundamento careat; alio aliquo ſenſu debet intelligi, iuxta quem nullam comparationem inter eos Angulos ſecundùm maius & minus fieri neceſſe ſit. At nullus aptior ſenſus occurrit, quàm vt dicatur Euclides, cùm aſſeruit in ſecundâ parte Propoſitionis ſemicirculi Angulum quouis Angulo acuto rectilineo eſſe maiorem, reliquum autem Angulum contactûs minorem; nihil aliud voluiſſe quàm in locum inter rectam lineam A B tangentem & peripheriam C L B comprehenſum alteram rectam lineam non cadere, vt habet pars prima Propoſitionis. Hæc eſt totius à citato Authore initæ ratiocinationis tota vis: quam ex dictis ſuperiùs infringere promptiſſimum eſt.



Nam etſi Anguli rectilinei, & mixtilinei omni prorſus communi menſurâ careant; nec proinde poſſint inter ſe comparari ſecundùm vllam Rationem ſiue rationalem, ſiue irrationalem; ad quam comparationem neceſſaria eſt quædam eiuſdem generis menſura, quæ vtrique applicari poſſit: vt per eam applicationem (quæ in Rationalibus præciſa eſt, in Irrationabus inadæquata) habitudo eorum Angulorum innoteſcat; quæ ipſamet eſt eorum Ratio. Tamen alia poteſt eorum Angulorum attendi comparatio ſecundùm quantitatem, ſiue ſecundùm maius & minus abſque omni prorſus menſurâ communi, quæ vtrique quantitati, velut vtrique homogenea, applicetur. Iuxta quam comparationem ſecundùm maius & minus in genere, dicetur Angulus rectilineus maior vel minor Angulo mixtilineo. Ea tamen maioritas & minoritas generica ad Rationem aliquam conſtituendam non ſufficit; vt pluribus Prop. 3. Superiori iuxta mentem Euclidis declaratum eſt: ſufficit tamen, vt quantum aliquod altero quanto maius dicatur, vt quantum infinitum finito maius rectè dicitur; cùm tamen inter infinitum & finitum nulla Ratio poſſit intercedere, ſicut nec vlla menſura vtrique communis.

 PROPOSITIO

PROPOSITIO VII. *Theorema.*

DVorum ſemicirculorum ſeſe interiùs tangentium Anguli ſunt inæquales: maiórque eſt Angulus ſemicirculi maioris, minoris ſemicirculi Angulo. At Angulus contactus maioris ſemicirculi minor eſt Angulo contactus minoris.

Demonſtratio.

Eſt hæc Propoſitio præcedentis tantùm corollarium: cuius veritas ex ipſâ conſtructione ſolâ euadit manifeſta. Sint ergo duo ſemicirculi G C B maior, & F D B minor ſeſe in B tangentes; ad quod punctum dirigitur per vtriuſque centrum acta diameter communis G B. Quia igitur Angulus G B L C maioris ſemicirculi, Angulum F B O D ſemicirculi minoris includit: hoc non poteſt non eſſe maior per Prop. proximè antecedentem. Quâ etiam conſtat Angulum contactus CLBA maioris ſemicirculi minorem eſſe Angulo contactus D O B A ſemicirculi minoris, hic enim illum includit. Duorum ergo ſemicirculorum interiùs ſeſe tangentium &c. Quod erat oſtendendum.

Scholium.

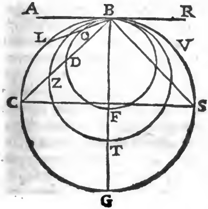
Huic meæ Propoſitioni toto conatu obſiſtunt duo clariſſimi Geometræ P. Gregorius, eiuſque Interpres P. Aynſcom. Quorum Ille Lib. 8. operis Geom. qui eſt de Proport. in explicatione Principij primi contendit nullum Angulum cuiuſcunque generis vllo modo quantum dici poſſe; niſi ſimul admittatur (quod abſurdiſſimum eſt) totum parti eſſe æquale, vnde, inquit, Principia Geometrica ſeſe deſtruerent: quæ cùm ſint per ſe notiſſima, omnis Angulis quibuſcunque deneganda eſt Quantitatis Ratio. Quomodo autem admiſſâ aliquâ Angulorum Quantitate futurum ſit, vt Geomatrica Principia, quibus nihil firmius, ſeſe deſtruant, exponit probatione ſanè acutâ, tantóque Geometrâ dignâ. Verùm Lib. 2. Prop. 27. Exam. Quadrat. non adeò ſtabilitam declaraui, vt admittenda videretur, cuius obiectionis meæ, eiuſque probationis ne mentionem quidem vllam fecit in ſuâ Quadraturum deductione P. Aynſcom: adeò vt hoc eius ſilentium conſenſus teſtimonium non immeritò viſum fuiſſet: niſi denuo eandem Ipſe adduxiſſet probationem quaſi integram & inconcuſſam; quâ P. Gregorius vſus fuerat ad Abſurdum illud, cuius memini, ex admiſſa Angulorum quantitate concludendum. Quare ego quam citato loco Examinis attuli, huius difficultatis ſolutionem denuo reponam

nam

Digitized by Google

nam non ſine nouæ alicuius confirmationis acceſſione: vt, ſi fas fuerit, hæc de Angulorum Quantitate momenti non leuis controuerſia dirimatur. Sic ergo Prop. 3. cap. 2. de Nat. Rationum ratiocinatur iuxta mentem P. Gregorij.

Duo ſemicirculi ſe tangant in B, in quo eoſdem tangat recta linea A B. Si igitur Anguli cenſentur quantitate aliquâ prediti; erit Angulus ſemicirculi C L B G maior Angulo minoris ſemicirculi D O B F; hic enim in eo includitur: quo eodem iure Angulus contactus D O B A maior erit Angulo contactus C L B A. Sed & Anguli illi duo contactus, & duo ſemicirculorum Anguli æquales oſtenduntur hoc modo. Diuiſâ bifariam in C ſemicirculi maioris peripheriâ, ducatur recta B D. Rurſus, diuiſo arcu C B bifariam in L, ducatur recta B L, & ſic tertiò, & deinceps diuiſis bifariam arcubus, rectæ lineæ per diuiſionum puncta à puncto B emittantur: hæ lineæ, vt arcus bifariam diuiſi fuere, ita Angulos rectilineos, quos tangens A B cum illis lineis continet, bifariam diuident; vt Angulum A B G bifariam diuidit recta B C; at recta B L bifariam rurſus diuidit Angulum A B C & ita deinceps.



His poſitis. Conſtat tam ex Angulo ſemicirculi C L B G, quàm ex Angulo ſemicirculi D O B F, demi Angulum C B G; qui cùm ſit æqualis Angulo C B A, qui maior eſt tam Angulo ſegmenti C L B C, quàm Angulo ſegmenti D O B D, vtpote includens incluſo. Dempto Angulo C B G ex Angulis ſemicirculorum, demitur ex iis plus quàm dimidium. Et rurſus eodem modo, ſi demätur Angulus L B C (qui æqualis eſt Angulo L B A) ex Angulo ſegmenti C L B C, & ex Angulo ſegmenti D O B D; plus quàm dimidium ex vtroque demitur: cùm demätur Angulus æqualis Angulo L B A, qni maior eſt Angulis ſegmentorum L B, O B reliquorum. Quæ ſubtractio angulorum rectilineorum ex Angulis ſegmentorum per arcuum perpetuam biſectionem cum poſſit in infinitum continuarì: conſtat ex duobus ſemicirculorum propoſitis Angulis C L B G, D O B F demi poſſe partes æquales in infinitum, non minores dimidio

Z 2 Angulis

Angulis ſegmentorum ſingulorum. Ergo per Propoſitionem 1. quam cap. 2. de Naturâ Rat. affert P. Aynſcom velut Corollarium Propoſitionis 116. Libri 2. Oper. Geomet. æquales ſunt Anguli ſemicirculorum C L B G, D O B F. Quibus ſublatis ex Angulo recto A B G, ſequitur Angulos etiam contactus A B L C, A B O D eſſe æquales. Cum ergo ſi Angulis Quantitatis ius aliquod concedatur, Anguli duorum inæqualium ſemicirculorum æquales ſint, vt proximè oſtenſum eſt; & ſint inæquales, eò quòd Angulus maioris ſemicirculi C L B G, includat Angulum D O B F ſemicirculi minoris: quod foret abſurdiſſimum; abſurdiſſimum etiam eſſe neceſſe eſt illud, vnde hoc ſequitur, Aſſerere nimirum Angulos quantitate non carere.

Hæc eſt Ratiocinatio, quâ citati Geometræ peritiſſimi probaſſe ſibi videntur nullos Angulos quantos eſſe poſſe. Verùm difficultates patitur vix, ac ne vix quidem ſoluendas tam hæc Aſſertio noua, quàm eius allata probatio. Ac in primis certum ac per ſe notum Principium apud Geometras hactenus habitum eſt, Angulos reuera quantos eſſe: Quid enim in Geometricis crebriùs perſonat, quàm Angulos Angulis æquales? Angulos Angulis maiores, aut minores? Conſulantur ipſa prima Geometriæ Elementa: In iis, quis appellatur Angulus rectus, niſi qui deinceps ſibi appoſitum æqualem Angulum nanciſcitur? quis acutus, niſi qui recto minor: quis obtuſus, niſi recto maior eſt? At æqualitas, exceſſus, & defectus inter Angulos quomodo reperiri poſſunt, ſi quantitate careant, cùm hæ ſint quantitatis paſſiones maximè propriæ. Ad hæc. Quis tot inter ac tantos Geometras, qui ab ipſa Geometriâ partâ floruerunt, fuit aliquando repertus, qui Principium hoc tanquam certum & euidens non ſuppoſuerit, adeóque manifeſtum, vt ne eius quidem mentionem faciendam cenſuerit. Quod cùm ita ſit. Quid de Aſſertione, quâ Anguli quantitate carere dicuntur; quid de eiuſdem Aſſertionis probatione aliud cenſeatur, quàm quod à Geometris dici non raro contingit? eam ſcilicet impoſſibilem eſſe & abſurdam: cùm ex ea abſurdum quid, & impoſſibile conſequatur, quippe quòd Principiis per ſe notis opponatur.

Nunc porrò quæras quonam vitio elegantiſſima iuxtà ac ſubtiliſſima Argumentatio illa laboret? Illud Lib. 2. Examinis Quadrat. Prop. 27. apertiſſimè declaraui. Atque vtinam illa mea ſolutio Patri Aynſcom veniſſet in mentem, quando ad ea, quæ à me contra hanc P. Gregorij de Angulorum quantitate ſententiam obiiciebantur, parabat reſponſionem: vel enim mihi fuiſſet aſſenſus: vel ſaltem aliquid de nouo protuliſſet, vnde, quæ citato loco à me allata ſunt, confirmare liceret.

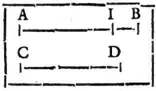
ceret. Dixi igitur ibidem, in eo paralogiſmum committi; Quod Author operis Geometrici, dum partes dimidio Angulorum tum ſemicirculi, tum deinceps reliquorum ſegmentorum, non minores demi iuberet; id lineis rectis, B C, B L &c. perfici vellet: nec ab eâ mente factus eſt alienus P. Aynſcom. Verùm, pace vtriuſque dicam, id ſanè ex æquo non præcipitur. Cùm enim in mixtilineis verſemur, cur partes illas Angulorum dimidio maiores, per curuas lineas auferendi facultas mihi denegetur? Deinde, ſi abſque omni effugio intentum velis colligere, Aduerſarij arbitrio iniri debet omnis illa ſubtractio Angulorum dimidio non minorum, hoc enim ad eum ius pertinet: quo Ego nunc iterum hîc vti volo. Volo ſcilicet ex Angulo ſemicirculi C L B G partem dimidio illius maiorem demere deſcripto circulo in B reliquos tangente, & inter vtrumque poſito, qualis eſt B Z T: dematur itaque ſemicirculi Angulus T Z B T ex ſemicirculi Angulo G C B G, cuius dimidio ille maior eſt (cùm Angulus rectilineus C B G, quo maior eſt angulus T Z B T, maior ſit dimidio eiuſdem anguli ſemicirculi G C B G) hoc poſito. Quâ ratione demi poterit ex ſemicirculi Angulo F D B F Angulus T Z B T, maior ſcilicet ex minore? Cùm ergo demi non poſſint ex vtriuſque ſemicirculi Angulis GCBG, F D B F æquales Anguli dimidio maiores, vt exigit Propoſitio 1. cap. 2. de Naturâ Rat. vel Prop. 116. Lib. 2. Oper. Geom. haud quaquam colligi poterit per citatas Propoſitiones, æquales eſſe duos ſemicirculorum Angulos G C B G, F D B F; neque quod ex eo ſequebatur abſurdum, æquales ſcilicet eſſe eos Angulos vt probabatur; & inæquales, vt ſupponebatur, dum quanti ſupponebantur Anguli. Certum igitur eſt, ac manifeſtum & duorum inæqualium ſemicirculorum Angulos, & duos item contactus Angulos, quos linea inæquales circulos tangens conſtituit, inæquales eſſe iuxta duas proximè antecedentes Propoſitiones: neque ex iis vllum conſequi vel impoſſibile, vel abſurdum. Quod idem inferius confirmabitur, nec paulò euidentiùs exponetur, cùm Valliſio reſpondebitur, Angulos contactus nulla conſtare quantitate ſuadere quoque conanti.

Digitized by Google

PROPOSITIO VIII. *Theorema.*

DVæ magnitudines inæquales, quarum diſcrimen tale eſt, vt quantumlibet multiplicatum, neutram poſſit vel ſuperare, vel adæquare: nullam inter ſe Rationem habere poſſunt.

Demonſtratio.



Duæ ſint magnitudines inæquales, A B maior, & C D minor; ſit autem I B exceſſus maioris ſupra minorem huiuſmodi, vt in infinitum multiplicatus neutram earum poſſit ſuperare vel adæquare: qualis foret, ſi, vt Prop. 3. explicatum eſt, ſupponeretur eſſe earum quantitatum particula paruitate infinita. Dico magnitudines A B, C D nullam inter ſe rationem habere poſſe. Si quam enim haberent, ea neceſſariò foret, aut Rationalis, aut Irrationalis. Sed neutra eſſe poteſt. Non Rationalis; cùm enim hæc reperiatur tantùm inter magnitudines, quæ ſe habent vt numerus ad numerum: numerus autem quilibet altero quouis maior hunc non niſi numero ſuperare poſſit: exceſſus I B ad vtramque quantitatem A B, C D ſe haberet, vt numerus ad numerum. Sed numerus quilibet alium quemlibet per multiplicationem aptus eſt ſuperare. Ergo contra ſuppoſitionem, exceſſus I B ſuperare, vel adæquare poteſt vtramque magnitudinem A B & C D.

Neque etiam dici poteſt Rationem A B ad C D eſſe Irrationalem. Nam, cùm ea Ratio reperiatur tantùm inter quantitates, quarum nulla eſt communis menſura: exceſſus I B maioris ſupra minorem, neutram metietur (forent alioquì contra ſuppoſitionem magnitudines A B, C D inter ſe commenſurabiles) demi tamen ex eo quidpiam nihil vetat, quo dempto vtrique commenſurabilis euadat. Tunc verò reliqua facta ex A B ad minorem C D, Rationem habebit rationalem, & vt numerus ad numerum; & exceſſus earum, qui minor eſt poſt ſubtractionem illam, quàm I B, numerus quidam erit: qui multiplicatus excedet, vel adæquabit ipſam C D numero expreſſam. Ergo multò magis totus exceſſus I B multiplicatus excedet vtramque A B & C D quod eſt abſurdum, & contra ſuppoſitionem. Cùm itaque nec Rationalis, nec Irrationalis inter magnitudines A B, & C D

Ratio

Digitized by Google

Ratio intercedere poſſit;intercedere nulla poteſt : cum Rationem omnem aut Rationalem, aut Irrationalem,eſſe neceſſe ſit.Quare duæ magnitudines inæquales,quarum diſcrimen &c. Quod erat probandum.

Scholium.

Propoſitionis huius veritas ex eo etiam conſtare poteſt, & quidem, vt videtur à priori; cuius iam aliquoties contigit mentionem fieri. Quia ſcilicet Ratio, ſiue habitudo inter duas quantitates mutuam quandam dicit menſuram, qua vna alteri vel æqualis dici poſſit; vel, ſi vnam alterâ maiorem eſſe conſtet, tantò, aut tanto maior innoteſcat. Hoc enim ipſum eſt, quod Eucl. defin. 5. Lib. 5. exigit, præter id, quod defin. 3. ad Rationes conſtituendas neceſſarium eſſe pronunciarat: vt ſcilicet magnitudines eiuſdem generis forent, & ſecundùm quantitatem, hoc eſt, ſecundùm maius & minus, aut æquale conferrentur in genere: quod ſufficit vt vna dicatur maior vel minor alterâ. At vt tanto vel tanto maior,aut minor vna,quàm altera ſtatuatur;& vt certa inter eas maioritatis, & minoritatis habitudo, ſiue Ratio definiatur; neceſſe eſt, vt quædam inter duas magnitudines menſura intercedat: quâ in ſpecie tanta vel tanta maioritas vnius, vel alterius minoritas conſtet. Quòd ſi omnis ratio menſuræ ab huiuſmodi quantitatibus ſit aliena, hoc eſt, ſi vna ſæpius repetita alteram ſuperare, vel æquare nequeat, in quo ſita eſt menſuræ applicatio; nullam habere poſſunt magnitudines huiuſmodi Rationem iuxta defin. 5. Lib. 5. citatam,licèt vna dici poſſit maior alterâ.At eodem modo omnis menſuræ ratio tollitur inter duas magnitudines eiuſdem licèt generis, ſi earum differentia vtcunque multiplicata neutram poſſit ſuperare, nec quidem adæquare. Hoc enim in caſu etſi noueris duarum quantitatum alteram reliquâ eſſe maiorem; quâ tamen ſui parte maior ſit, nequaquam pronuncies: cùm exceſſus ille nulla vnquam pars eſſe poſſit earum quantitatum determinatæ denominationis, ſiue ſpeciei: eſto conſtet eum vtriuſque partem eſſe, cùm vtráque quantitate ſit reuerà minor. Quæ indeterminatio omnem præſcindit Rationem, dum omnem menſuræ modum reſpuit ad Rationem aliquam conſtituendam neceſſarium.

Corollarium 1.

Ex hac, & Propoſitione 3. euidenter conſtat ad quas pertineat magnitudines tum Poſtulatum Libri 10. Euclidis, tum eiuſdem Libri Propoſitio 1. vtrumque enim iis ſolùm magnitudinibus conuenire poteſt, iiſque ſolùm applicat Geometriæ Parens, quæ Rationem aliquam inter ſe habere poſſunt. Dum enim eo Poſtulato concedi peti-

tu

tur *quamlibet magnitudinem toties poſſe multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiuſdem generis excedat.* An non manifeſtum eſt multiplicatam illam magnitudinem, magnitudinem ex eâ multiplicatione conflatam metiri? & ex ea ſæpius repetitâ menſuræ applicatione certam, & determinatam habitudinem inter quantitatem multiplicatam, & ex multiplicatione genitam, conſtitui, quæ Ratio dicitur? ſimiliter Cùm primâ illâ Propoſitione Lib. 10. aſſeritur *duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi à maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quàm dimidium, & hoc ſemper fiat: relinqui tandem quandam magnitudinem, quæ minor erit propoſitâ minore magnitudine.* Haud quaquam ſupponit Eucl. duarum propoſitarum inæqualium magnitudinum minorem huiuſmodi, vt non poſſit ſæpius repetita æquare, vel ſuperare maiorem: vt patet ex Præparatione ad Propoſitionis huius demonſtrationem neceſſariâ. In eâ ſiquidem iuxta Poſtulatum paulò ante adductum, minorem magnitudinem toties iubet aſſumi, donec magnitudinem conſtituat maiorem alterâ datarum magnitudinum, quæ maior eſt. Ergo ex mente Euclidis minor data magnitudo illa alteram maiorem, iure multò potiori ſuperare poterit, ſi ſæpius repetatur. De iis ergo ſolis magnitudinibus agit Eucl. quæ Rationem inter ſe habere natæ ſunt: & quas defin. 5. Lib. 5. eâ appoſitâ conditione determinauit, vt poſſent multiplicatæ ſeſe mutuò ſuperare.

Ex his reſponderi facilè poſſet non tam Peletario (huic enim Clauius Clauio dignâ reſponſione cumulatè ſatisfecit) quàm Valliſio; qui Peletarij veſtigiis inſiſtens, aut Euclidem in apertam contradictionem lapſum eſſe; aut Angulos contactus carere quantitate pronunciauit. Verùm præſtat omnia, quæ vndique colligit in Peletarij ſui defenſionem non tam numero, quàm pondere exigua Argumenta in vnum ſimul locum, quem ſuo tempore adibo, referre: vt in illud vnum impenſâ tunc operâ, & apertiùs proponantur, & excutiantur accuratius.

Corollarium 2.

Conſtat præterea ex hac eâdem, & tertiâ Propoſitione nihil verius aſſeri poſſe, quàm quod apud R.P. Aynſcom cap. 2. de Nat. Rat. Prop. 4. aſſeruit vir doctiſſimus, quem tacito nomine Amicum Geometram appellat: cuius ſententia cùm ſummi ſit apud me ponderis, iiſque, quæ de Angulis hactenus à me allata ſunt, vel ſunt in poſterum afferenda, adeò ſit accommodata; nec ea, nec eius nomen hîc à me prætermitti debent. Is eſt R. P. Ioan. Bapt. Giattenus à me iam ſuprà citatus:

tatus: qui apud dictum Authorem ſic fatur. *Propoſitio 116. de Progreſſionibus in opere Geom. non eſt vera vniuerſaliter. Quia innititur Propoſitione 1. Lib. 10. Euclidis in eo ſenſu, in quo non dixit Eucl. in quem etiam errorem incidit Peletarius, vt optimè obſeruauit Clauius in 19. lib. 3. ea enim Propoſitio ſolùm valet quoties quantitates ſunt tales, vt vna ſæpius repetita alteram æquet. At angulus contingentiæ, vt demonſtrat Eucl. cùm ſit minor quolibet angulo rectilineo minoritate diuerſa rationis; non poteſt æquare rectilineum. Quare quando aſſumitur in probatione dictæ propoſitionis, quòd ſi auferantur partes non minores dimidio tandem deuenitur ad aliquid minus; nego hoc poſſe fieri, niſi quantitates ſint tales, vt illud minus ſit auferibile per eam diuiſionem à maiori, quod non euenit in caſu præſenti.* Et alia, quæ addit in eam ſententiam accommodatiſſima, quæ ex eius ſcripto recitat P. Aynſcom, vt ea deinde reiiciat; ſed non ſatis firmo, vt ex ſuperioribus conſtare videtur, cum fundamento.

Nam nihil verius, vt hic oſtendi, quàm Propoſitionem 1. Lib. 10. Elementorum ad eas ſolùm quantitates pertinere, quos ſeſe mutuò ſuperare poſſunt, ſi multiplicentur; quæque iuxtà def. 5. Lib. 5. Rationem aliquam inter ſe habere natæ ſunt. Quod nec Angulis contactus ad Angulos rectilineos relatis conuenit, nec duobus quibuſuis Angulis ſegmentorum inter ſe comparatis. Quorum diſcrimen (quod eſt Angulus duabus peripheriis ſeſe tangentibus comprehenſus) ſæpius repetitum neutrum poteſt ſuperare vel adæquare; eorúmque propterea mutuam habitudinem, eo quòd indefinitæ ſit menſuræ, omni Rationis iure & facultate priuat: idq; ſolùm iiſdem Angulis confert, vt alter altero maior dici queat. Debuit ergo Propoſitio illa 116. de Progreſſ. quæ vniuerſaliter proponitur, ad eas reſtringi magnitudines, quæ rationem inter ſe habere poſſunt, & tum ab eâ, tum à Corollario à P. Gregorio ibidem collecto, & à P. Ayſcom cap. 2. Prop. 1. repetito, quantitates excipi: quarum diſcrimen ſæpius repetitum neutram poteſt ſuperare, vel æquare: cuiuſmodi ſunt duorum quorumlibet ſemicirculorum Anguli, & ſi quæ ſunt aliæ eius generis quantitates, de quibus Propoſitio 1. Lib. 10. intelligi non poteſt; nec proinde, quæ ex eâ deducitur, Propoſitio 116. de Progreſſ. Quod facilè tum à P. Gregorio, tum ab eius interprete P. Aynſcom admiſſum fuiſſet: niſi certò fuiſſet ipſis perſuaſum (quod Propoſitio 3. & Propoſitio proximè expoſitâ falſum demonſtraui) duas quaſlibet magnitudines, quibus competeret inter ſe comparari ſecundùm maius & minus, eo ipſo Rationem aliquam inter ſe habere: & quia, quæ Rationem aliquam habent, debent per definit. 5. Lib. 5. ſeſe mutuò ſu-

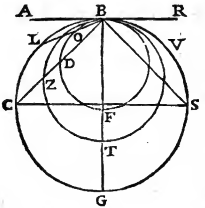
perare (ita enim debet illa definitio, vt definitiones omnes ſolent, conuerti) ſi ſæpius repetantur: ideo etiam cenſuere duabus quibuſlibet propoſitis magnitudinibus, quarum vna diceretur maior, vel minor alterâ; dici perinde debere, ſi multiplicarentur, ſeſe mutuò ſuperare poſſe; adeóque iiſdem applicari poſſe, tum Propoſitionem 1. Lib. 10. tum Propoſitionem 116. de Progreſſ. quæ ex eâ colligitur.

Atque hoc eſt inter quantitates inæquales diſcrimen: quòd ſolidiſſimus Clauius contra Peletarium agens obſeruauit; cùm, vt P. Aynſcom refert, aſſerit Angulos contingentiæ & ſemicirculorum ita inæquales eſſe, vt maioritas & minoritas ſint diuerſi generis quoad Rationem, à maioritate & minoritate earum quantitatum inæqualium, quæ poſſunt multiplicatæ ſeſe ſuperare, & iuxta defin. 5. Lib. 5. Rationem habere inter ſe. At hæc Clauij diſtinctio minimè placuit Patri Aynſcom. ait enim cap. 2. pag. 12. *malè aſſeri angulum contactûs eſſe minorem quouis Angulo acuto rectilineo minoritate diuerſæ rationis ſiue ſpeciei. Quis enim neget lineas rectas, & curuas eſſe eiuſdem ſpeciei? item plana rectilinea, & curuilinea eiuſdem eſſe rationis, cùm comparari inter ſe poſſint? Atqui anguli omnes cùm ſint eſſentialiter duarum linearum inclinatio, quæ lineæ qualeſcunque ſint, ſpecie non differunt: in eâdem quoque manent ſpecie inclinationes æque ac ipſæ lineæ, quarum ſunt inclinationes. Quod ſi verum eſt; non poteſt angulus cõtingentiæ dici minor angulo acuto rectilineo minoritate diuerſæ ſpeciei* &c. Verùm, neq; Clauius, neque Giattinus, neq; Leotaudus (ſi tantis viris hic adiungi mereatur) aſſerent vnquam lineas, vel curuas, vel rectas, aut plana curuilinea & rectilinea, à quibus, & in quibus anguli conſtituuntur, genere differre. Neque iidem aſſerent vnquam Inclinationem linearum curuarum generis eſſe diuerſi ab Inclinatione linearum rectarum quoad ſitum, ad quod Prædicamentum pertinet quæuis linearum quarumcunque Inclinatio. Neque etiam aſſerturi ſunt maiorem harum linearum Inclinationem cum minori earumdem Inclinatione non poſſe comparari ſecundùm maius & minus. Negaturi tamen ſunt Inclinationes omnes eiuſdem eſſe generis quoad Rationem. Aliud enim eſt Inclinationis genus; cùm inter maiorem & minorem Inclinationem Ratio quædam intercedit; cum ſcilicet minor Inclinatio multiplicata maiorem poteſt excedere, quales ſunt linearum rectarum Inclinationes omnes, ſiue Anguli omnes rectilinei; vt def. 5. Lib. 5. declaratur. Aliud, cùm duæ Inclinationes inæquales nullam inter ſe Rationem habere poſſunt: cùm ſcilicet minor quomodocunque multiplicata maiorem attingere nunquam poteſt: quo in caſu per eandem defin. 5. Lib. 5. omni Rationis inter ſe

habendæ

habendæ facultate excidunt, vt iam non ſemel declaratum eſt. Nec verò, vbi de Inclinationum, vel Rationum genere, vel ſpecie agitur, attendenda eſt ſpecies linearum inclinatarum, aut genus: cùm eæ ad quantitatem pertineant; dicique poſſint ſecundùm quantitatem homogeneæ: Inclinationes verò pertineant ad ſitum: qui propriis ſuis non caret, & generibus, & ſpeciebus non ſecus quàm figuræ; etſi ad eandem ſpeciem pertineant. Quoad quantitatem, vt Triangulum, Quadratum, Circulus &c. ſunt eiuſdem generis quantitatis ſunt enim planæ ſuperficies: tamen quoad terminationem & circumſcriptionem, diuerſæ ſunt ſpeciei: Triangulum enim ſpecie differt à Quadrato: Quadratum à Circulo &c. Eodem modo Angulos duos planos, ſi præciſè ſpectentur lineæ, quibus conſtituuntur, omnes eiuſdem generis, ſiue homogeneos eſſe, dicemus: at ſi Ratio eorum ſpectetur, ſpecie differre comperientur, generiſque eſſe diuerſi: & alios quidem dicemus Rationem aliquam habere inter ſe, alios nullam. Quare labori parcere poterat Vallifius, quo ſeſe diuexauit; vt contra Clauium aſſerentem Angulos rectilineos alterius eſſe ſpeciei, quàm curuilineos quoad Rationem, oſtenderet eſſe homogeneos ex eo quòd quantitates, quibus conſtituuntur, homogeneæ ſint; homogeneæ item ſint quantitatum Inclinationes: Attendi enim debent Anguli quoad Rationem. Quæ Relationis genus quoddam eſt tum à quantitate, tum à ſitu (ad quem Inclinatio linearum Angulum conſtituentium pertinet) longè alienum. Atque hæc eſt, Vallifi, ἑτερογένεια illa, quàm neque Clauium oſtendere, neque te ſomniare poſſe aſſeris. Crediderim. Neque enim maturæ, ſanæque Euclidis Interpretationes (qualis eſt hæc celeberrimæ illius definitionis 5. Lib. 5.) ſomniando occurrunt, vel oſcitando. Quomodo autem eam Clauius, Giatinuſque oſtendant, euidenter opinor, declaraui; ex quibus colligas, etſi Angulis contingentiæ ſua tribuatur quantitas, nullo modo irreconciliabiles eſſe definitiones tertiam & quintam Lib. 5. Euclidis; vt cum Sauilio, quem refers, arbitraris.

Dicat fortaſſe non-nemo (ne quid omittam) ſingularem quempiam Angulum contactûs, vt in ſuperiori ſchemate Angulum A B L C, toties poſſe repeti, vt Angulorum tanta multitudo coaceruetur; vt ſimul ſumpta, etſi ex eâ Angulus vnicus non coaleſcat, ſuperet Angulum quempiam rectilineum, vt Angulum A B L. Ergo Angulus ille contactûs, & Angulus rectilineus A B L Rationem inter ſe habere poſſunt: neque enim minùs obſeruatur conditio definitione 5. lib. 5. requiſita, etſi Anguli omnes contactûs in vnum

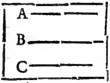


non coeant Angulum, qui ſuperet, vel æquet Angulum rectilineum; ſufficit enim vt tota ſimul eorum Angulorum contactuum multitudo etſi diſcreta, maior ſit Angulo rectilineo ABL. Reſpondeo tantam vim Angulorum contactûs (quod admirationem moueat) coaceruari nunquam poſſe, vt vel minimum Angulum rectilineum A B L poſſit æquare. Ratio eſt, quia, cùm Angulus A B L ſit in Infinitum diuiſibilis; poſſibile eſt illum diuidi in tot Angulos rectilineos, quot Anguli contactûs coaceruati ſunt. Tunc autem certum eſt ſingulos illos Angulos partiales rectilineos maiores eſſe ſingulis Angulis contactus. Ergo totus Angulus A B L rectilineus maior eſt omnibus ſimul ſumptis Angulis illis contactûs: quod concipi poteſt ægriùs, quàm demonſtrari.

PROPOSITIO IX. *Theorema.*

PRopoſitis tribus magnitudinibus, ſi prima ad ſecundam Rationem habeat; habeat autem ſecunda Rationem ad tertiam: prima quoque ad tertiam habebit Rationem; imò & ad compoſitam ex ſecundâ & tertiâ.

Demonſtratio.

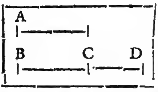


Sint magnitudines tres A, B, C: quarum prima A dicatur Rationem habere ad ſecundam B; hæc verò Rationem habeat ad tertiam C. Dico primam A Rationem quoque habere ad tertiam C. Nam cùm prima A Rationem habeat ad ſecundam B; poterunt A & B multiplicatæ ſeſe mutuò ſuperare per conuerſam definit. 5. Lib. 5. eodem modo ſeſe ſuperare poterunt B, C. Si igitur contingat tam primam A, quàm tertiam C eſſe ſecundâ B minores: cùm A multiplicata ſuperet B, potiori iure ſuperabit tertiam C minorem ſecundâ B. In hoc ergo caſu per citatam definit. A & C Rationem inter ſe habebunt. Quòd ſi maior ſupponatur, quàm ſecunda B. cùm

cùm B multiplicata poſſit ſuperare C maiorem (Rationem enim habent B & C ex ſuppoſitione) poſſit autem A multiplicata ſuperare B, atque adeò omnem multiplicem eiuſdem B; quæ multiplex ſuperare iam ſupponitur tertiam C: etiam A eandem C ſuperare poterit. Ergo & Rationem aliquam cum illâ habere. Eodem modo, quolibet alio in caſu; vt ſi B minor foret quàm A, & C minor, aut maior quàm B; ſemper oſtendentur A & C multiplicatæ ſeſe mutuo ſuperare poſſe; atque adeò Rationem aliquam inter ſe habere, vt vult prior Propoſitionis pars.

Quòd autem eadem prima magnitudo A ad compoſitam ex ſecunda B, & tertia C, Rationem habeat eâdem ſeruatâ ſuppoſitione, manifeſtum eſt. Nam A, ſi minor eſt, quàm B & C, multiplicata ſuperare poteſt tam B, quàm C. Si itaque multiplex quantitatis A ſuperans B addatur ad multiplicem eiuſdem A ſuperantem C; fiet multiplex primæ A maior duabus ſimul quantitatibus B & C: ad quas propterea ſimul compoſitas Rationem habebit. Eodem modo, quocumque alio in caſu, ſiue A alterutrâ, aut vtráque B & C maior ponatur, Rationem ad compoſitam ex vtráque habere demonſtrabitur ope definitionis illius 5. Lib. 5. Elem. Quare propoſitis tribus magnitudinibus &c. Quod erat probandum.

Corollarium.



Hinc etiam colligi poteſt: quòd ſi magnitudo aliqua A Rationem habeat ad aliam magnitudinem B D: quæ diuidatur in C in duas partes quarum vna ad alteram Rationem habeat: eandem etiam magnitudinem A Rationem habere ad vtramque partem B C & C D. Tunc enim tres erunt quantitates A, B D, & B C, aut C D ſeruantes hypotheſim huius Propoſitionis.

PROPOSITIO X. *Theorema.*

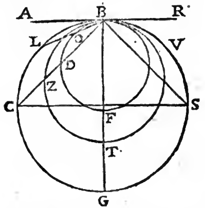
Anguli ſegmentorum ſimilium nullam inter ſe Rationem habere poſſunt.

Demonſtratio.

Hanc Propoſitionem, eiuſque probationem obiter ſuperiùs attigi Coroll. 2. Propoſitionis 8. ſed præſtat Idem in ordinem Propoſitionum reponere; vt tota hæc Angulorum contemplatio tradatur ordinatior,

Digitized by Google

& abſolutior. Quoad Angulos ſemicirculorum duorum inæqualium, vt B C G, B D F (qui ſunt ſegmenta quædam ſimilia) ſatis fusè decertatum eſt, & ſatis euidenter oſtenſum Angulos huiuſmodi nullam habere poſſe Rationem inter ſe.



Sed nec alia ſegmenta ſimilia vllam habent propter eandem cauſam. In eodem enim Diagrammate, in quo duo circuli B C G, B D F ſe tangunt in B, recta B C quæcunque à contactu B intra circulos ducta ex vtroque circulo abſcindit ſegmenta ſimilia tam BLC, BOD; quàm B G C, B F D, vt ex Prop.32.& defin.10. Lib.3. Element. facilè colligitur ductâ rectâ A B circulos in eodem puncto B tangente: ſunt enim in alterius ſegmentis vtriuſque circuli Anguli æquales à linea B C ſecante cum tangente B A conſtituti, ex quo per citatam definit. concluduntur dicta ſegmenta eſſe ſimilia. Quibus poſitis. Cùm circuli maioris ſegmenti Angulus C L B C, minoris circuli ſegmenti Angulum D O B D ſuperet Angulo C L B O D duabus peripheriis circulorum ſeſe in B tangentium comprehenſo, eiuſque Anguli nulla iniri poſſit repetitio tam multiplex, vt Angulum tandem efficiat vel æqualem, vel maiorem Angulo ſegmentorum, vt ſuprà pluribus explicatum eſt: concludendum eſt per def.5. Lib.5. duos illos ſimilium ſegmentorum Angulos nullam inter ſe Rationem habere poſſe. Quâ eadem de cauſa nec ſegmentorum ſimilium B G C, B F D ſemicirculo maiorum Anguli Rationem habere poſſunt: cùm eorum exceſſus ſit Angulus contactûs eorundem circulorum. Anguli ergo ſegmentorum ſimilium &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPO

PROPOSITIO XI. *Theorema.*

ANguli duorum ſegmentorum inæqualium eiuſdem circuli: & Anguli ſegmentorum diſſimilium ad diuerſos circulos pertinentium, Rationem inter ſe habere non poſſunt,

Demonſtratio.

Primus caſus ad duo ſegmenta eiuſdem circuli ſpectans, ita probatur. In eodem Diagrammate linea B C circulum B C G in duo ſegmenta inæqualia diſpeſcit, vnum ſemicirculo maius, alterum minus: maioris Angulus eſt C B G C; minoris autem C B L C. Dico hoſce duos Angulos nullam habere Rationem inter ſe. Habeant enim ſi fieri poteſt Rationem aliquam. Applicetur in circulo recta B S æqualis rectæ B C: quæ per Prop. 24. Lib. 3. Elem. abſcindet ſegmentum B V S æquale ſegmento B L C; erúntque proinde Anguli eorum æquales, ita vt Angulus rectilineus C B S ſit exceſſus, quo Angulus C B V S maioris ſegmenti ſuperat Angulum C B L C, ſiue ei æqualem S B V S minoris ſegmenti. Ergo Angulus C B L C minoris ſegmenti, ſicut & Angulus C B G C maioris ſegmenti ad hunc Angulum rectilineum C B S Rationem aliquam habent. Si enim neuter horum Angulorum minoris, maioriſque ſegmenti ad hunc Angulum rectilineum C B S, quo inter ſe differunt duorum ſegmentorum Anguli, aliquam Rationem habere poſſet: neque etiam inter ſe Rationem aliquam haberent duo Anguli ſegmentorum contra ſuppoſitionem. Debet enim vtraque duarum magnitudinum inter ſe Rationem habentium ad differentiam, quâ inter ſe diſcrepant, Rationem habere, vt ſuprà explicatum eſt: ſi enim diſcrimen illud neque certum, neque determinatum eſt; quî poterit eſſe habitudo inter eas quantitates certa & determinata; qualis ad Rationem conſtituendam exigitur. At ſi ſegmenti C L B C Angulus Rationem habet ad Angulum rectilineum C B S: etiam idem ſegmenti Angulus C L B C Rationem habebit ad Angulum rectilineum C B A; ad quem Angulus rectilineus C B S Rationem habet per Propoſitio 9. At hoc abſurdum eſt. Nam Angulus C B A rectilineus Superat ſegmenti angulum C B L C angulo contactus: qui multiplicatus non poteſt æquare eundem Angulum C B L C. Quare nec idem Angulus Rationem vllam habere poteſt

teſt ad Angulum C B S G alterius ſegmenti circuli eiuſdem, vt habet primus caſus.

Secundus autem caſus ita probatur. Sit Segmentum B O D circuli vnius,& ſegmentum BSGC circuli alterius. Dico Angulum DOBD, ad Angulum S V B C nullam habere Rationem. Si quam enim habeat: negari non poteſt Angulum quempiam rectilineum, ad alterum Angulum rectilineum Rationem eandem habere poſſe; quam habet Angulus ſegmenti DOBD ad angulum ſegmenti SVB C; hæc enim neceſſariò eſt Rationalis vel Irrationalis: cuius vtriuſq; capaces ſunt Anguli rectilinei Sit ergo Angulus rectilineus A B L ad Angulum rectilineum L B S; vt Angulus D O B D ſegmenti ad Angulum S V B C alterius ſegmenti. Ergo permutando. Ita erit Angulus A BL rectilineus ad Angulū ſegmenti D O B D; vt Angulus rectilineus L B S ad Angulum S V B C ſegmenti. Ergo Ratio aliqua eſſe poteſt inter Angulos rectilineos, & Angulos ſegmentorum circularium. Quod eſt abſurdum, vt ex probatione prioris caſus colligitur. Si enim Angulus ſegmenti D O B D ad rectilineum angulum A B L Rationem habere dicatur aliquam: aliquam etiam Rationem habere dicendus eſt ad rectilineum Angulum A B C; qui ipſum ſegmenti D O B D angulum ſuperat Angulo contactûs A B O D. Quod antè reiectum eſt. Ergo Anguli duorum ſegmentorum &c. Quod erat probandum.

PROPOSITIO XII. *Theorema.*

DVo arcus duorum circulorum æqualium in eandem partem caui ſe interſecantes, Angulum continent curuilineum ei rectilineo æqualem; qui continetur à circulorum diametris per ſectionem emiſſis.

Expoſitio.

Duo circuli æquales ſeſe mutuò ſecent in puncto A: à quo per eorum contra B & C emittantur diametri A D, A E dico Angulum curuilineum ad A conſtitutum; quem continent arcus A F, A G in eandem partem caui (vel, ſi mauis, in eandem partem conuexi) æqualem eſſe Angulo rectilineo D A E à diametris A D, A E circulorum comprehenſo.

Demonſtratio.

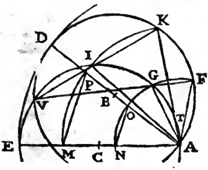
Cùm duo circuli æquales ponantur: erunt duo ſemicirculorum Anguli D A F, E A G æquales. Dempto igitur communi Angulo mixto

mixto G A B (aliàs communis hic angulus, aut alius quilibet etiam mixtus addendus addendus foret, prout Angulus D A E maior, aut minor fuerit) quem arcus A G, & linea recta A B continent, ab vtroque Angulo ſemicirculorum: remanet Angulus curuilineus G A F, arcubus A G, A F comprehenſus, æqualis angulo rectilineo D A E, quem ad ſectionem A circulorum conſtituunt eorundem circulorum diametri. Quare. Duo arcus duorum circulorum &c. Quon erat probandum.

PROPOSITIO XIII. *Theorema.*

Iiſdem poſitis ſi centro A, in quo ſe circuli interſecant, circuli quicunque deſcribantur: dummodo circulos ſe in A ſecantes interſecent, vt eos interſecant K I, F G; aut tangant, vt D E (qui vnicus duci poteſt, cuius radius eſt diameter A D, vel A E ſe ſecantium circulorum) ſimiles erunt omnes arcus F G, K I, D E inter peripherias in eandem partem cauas intercepti: erunt autem æquales arcubus inter diametros A D, A E interceptis.

Demonſtratio.



Emittantur è puncto A ad circulorum ſectiones lineæ rectæ A F, A G; item A K, A I. Quoniam igitur tam duæ lineæ A K, A I; quàm duæ A F, A G ſunt inter ſe æquales: tam duæ A K, A I; quàm duæ A F, A G, abſcindent ex circulis æqualibus ſe in A ſecantibus ſegmenta æqualia per Prop. 23. Lib. 3. Elem. Cùm igitur ſegmentum K F A æquale ſit ſegmento I G A: erunt eorum ſegmentorum Anguli ad A. æquales. Si igitur ab hoc vtroque Angulo ſegmentorum dematur Angulus ſegmenti T A (in aliis caſibus erit hic angulus interdum addendus vtrique ſegmento) vtrique communis: reliquus fiet Angulus curuilineus K F A G I, ſiue arcubus A K, A I contentus, æqualis Angulo rectilineo K A I. Similiter. Cùm Anguli ſegmentorum A F,

A G æqualium ſint æquales: ſi iis addatur Angulus mixtus G A F, arcu G T A & rectâ lineâ F A contentus: fiet rurſus Angulus curuilineus F A G arcubus A G, A F comprehenſus, æqualis Angulo rectilineo G A F. Sed idem Angulus curuilineus oſtenſus iam eſt æqualis Angulo rectilineo K A I. Ergo duo Anguli rectilinei K A I, F A G ſunt æquales. Ergo duo arcus I K, G F ſunt ſimiles. Quod cùm de arcu quolibet inter duos arcus ſe in A ſecantes in eandem partem cauos eodem modo demonſtrari queat: conſtat veram eſſe priorem Propoſitionis partem.

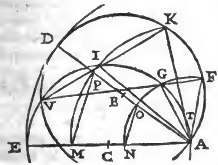
Nec minùs clara eſt eiuſdem Proproſitionis pars ſecunda, nimirum arcus K I, F G inter peripherias circulorum ſeſe in A ſecantium interceptos, quos omnes inter ſe ſimiles eſſe proximè demonſtraui, æquales eſſe arcubus ſingulos ſingulis P M, O N inter circulorum diametros è puncto A emiſſas interceptis. Nam oſtenſum eſt præcedenti Theoremate Angulum curuilineum G A F æqualem eſſe Angulo rectilineo D A E inter diametros intercepto. Cùm ergo eidem Angulo curuilineo G A F oſtenſus ſit Angulus G A F rectilineus æqualis: erit Angulus rectilineus G A F Angulo DAE æqualis. Ergo arcus G F erit æqualis arcui O N. Eodem modo arcus K I æqualis oſtendetur arcui P M, & cæteri quicunque quibuſcunque cæteris. Nec diſpar erit ratio arcûs D E centro A deſcripti: qui vtrumque circulum tangit, vnum in D, alterum in E. Patet enim arcum D E inter peripherias A K D, AIE in eandem partem cauas interceptum non tantùm ſimilem eſſe arcubus KI, FG &c. vt habet prima pars Propoſitiônis: ſed etiam æqualem eſſe arcui D E, hoc eſt, ipſummet ſibi ipſi inter diametros A D, A E intercepto. Quare. Iiſdem poſitis, ſi centro A, in quo &c. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Vt apertiùs adhuc exponatur arcuum illorum I K, G F &c. ſimilitudo, quos peripheriæ A K D, A I E in eandem partem cauæ, intercipiunt; & æqualitas etiam arcuum I K, P M; G F, O N, nec non æqualitas Angulorum rectilinei D A E, & curuilinei à peripheriis K F A, I G A ſeſe in A ſecantibus comprehenſi; Imò vt hæc tota Propoſitio curuis aliis quibuſcunque lineis applicetur: concipiatur diameter A E cum ſibi adiacente ſemicirculo ſuo A I E (perinde foret ſi loco ſemicirculi, aut Ellipſis, aut Parabola, aut alia quæuis curua linea aſſumeretur) circa immotum eius extremum punctum A circumduci; donec ad priſtinum locũ, vnde diſceſſerat, reſtituta fuerit vnà cum ſemicirculo: qui & ipſe priſtinum locum occupaturus eſt. Hoc ergò

in

in motu obſeruare eſt omnia, & ſingula ſemicirculi puncta circulum deſcribere, maiorem, vel minorem; provt magis, vel minùs diſtant à centro A. Vt punctum I circulum deſcribit MIK integrum, & abſolutum cùm diameter AE emenſo toto circuitu reſtituitur ad locum ipſum AE, vnde primò diſceſſerat. Punctum etiam G circulum ſuum eodem motu, eodémque temporis ſpatio deſcribit, ſed minorem, eò quod G à centro A minùs diſtet quàm I. Cùm ergo puncta tam remotiora à communi centro A, quàm eidem propiora eodem temporis ſpatio ſuas conuerſiones abſoluant, & in priſtinum locum reſtituantur: manifeſtum eſt eadem omnia puncta ſingulis temporis partibus proportionales ſuorum circulorum partes decurrere, adeóque arcus ſimiles emetiri. Vndè luce clarius euadit, quod primâ fronte fidem ſuperare videbatur, arcus omnes centro A deſcriptos, & inter duas peripherias AKD, AIE in eandem partem cauas interceptos, quales ſunt IK, GF, eſſe ſemper ſimiles: vnde ſequatur, vt Anguli ad centrum A ipſis inſiſtentes ſint æquales; æquales autem ſint omnes Angulo DAE à diametris AD, AE contento; eò quòd eodem motu diameter AE tranſlata ſit in diametrum AD; quo I ad K, & G ad F peruenêre: Iidem verò omnes Anguli rectilinei ſint æquales Angulo curuilineo; quem ad A conſtituunt peripheriæ KFA, IGA in eandem partem cauæ ſeſe in A interſecantes: eò quòd ſingula ſegmenta, eorúmque Anguli eodem motu ad alia, & alia loca progrediantur non ſecus quàm ipſi ſemicirculi. Ex quibus planum fit, quomodo Angulus rectilineus habeatur Angulo curuilineo æqualis conſtituto à duabus curuis lineis æqualibus, & ſimilibus, cuiuſcumque fuerint curuitatis, vt ſuprà ſupponebam.



PROPOSITIO XIV. *Definitio.*

Dvarum linearum cuiuſcunque generis, concurrentium Inclinatio, ęqualis, vniformis, aut homogenea Dicitur ea; in qua ſi duo quęlibet puncta in lineis concurrentibus ęqualiter

ter à concurſu diſtantia deſignentur; eorum ab inuicem receſſus, receſſui vtriuſque à puncto concurſûs eſt proportionalis. Vnde patet quænam linearum Inclinatio, Inæqualis, anomala, aut heterogenea dicenda ſit.

Expoſitio.

In eodem diagrammate duæ lineæ rectæ A D, A E concurrunt in A, & quandam inter ſe Inclinationem habent, ſiue Angulum continent. Si igitur puncta omnia vtriuſque æqualiter à concurſu diſſita, (cuiuſmodi ſunt P & M, item O & N) eâ ratione inter ſe diſtent, quâ diſtant à concurſu A: hoc eſt, ſi linea P A ad lineam P M (hæc enim metitur duorum punctorum P & M diſtantiam) eandem Rationem habeat; quam habet O A ad rectam O N: eáque Ratio quibuſcunque deſignatis punctis in lineis A D, A E, ſemper obſeruetur: dicetur hæc duarum linearum A D, A E Inclinatio æqualis, regularis, homo genea.

Eodem modo. Si in Peripheriis A K D, A I E in A concurrentibus puncta quælibet: æqualiter à concurſu A diſtantia deſignentur, qualia ſunt K & I, item F & G; & linea A K ſiue A I eandem Rationem habeat ad rectam I K diſtantiam punctorum I, K, metientem, quam habet A F vel A G ad rectam G F inter G & F interiectam; hoc eſt, lineæ I A, I K ſint duabus lineis G A, G F proportionales; idque ductis quibuſcunque lineis ſemper contingat: dicetur Inclinatio duorum arcuum A F K, A G I ſeſe in A ſecantium; æqualis regularis, & homologa.

Quòd ſi lineæ I A, I K proportionales non ſint duabus lineis G A, G F; anomala, irregularis, & inæqualis erit earum Inclinatio.

Scholium.

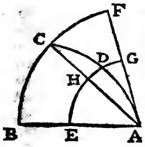
Duæ ergo ſunt Inclinationum regularium ſpecies. Prima pertinet ad rectas lineas: in quibus lineæ proportionales communem habent angulum A; à quo eductæ lineæ rectæ in infinitum produci poſſunt eâdem ſeruatâ Inclinatione, ſiue angulo ad concurſum A conſtituto. Altera pertinet ad lineas curuas quaſlibet, in quibus Angulus quidem curuilineus in concurſu A conſtitutus, idem ſemper eſt: at Anguli rectilinei ei æquales, quique lateribus clauduntur proportionalibus, ſunt, ſemper diuerſi. Ita vides duos Angulos I A K, G A F Angulum communem ad A non retinere; retinere tamen ſemper æqualem: quo fit, vt Inclinatio illa dici ſemper poſſit homologa, & regularis.

Hic porrò obſerua (quanquam ad rem meam minimè pertinere videatur

videatur) eximiam horum circulorum æqualium ſe mutuo ſecantium proprietatem, quæ eſt huiuſmodi. Si lineæ IK, GF producantur, coibunt omnes in altera circulorum communi ſectione V, ſectioni A oppoſitæ. Ratio eſt; quia Anguli AKI, AFG ſunt æquales. Ergo ſunt per Prop. 21. Lib. 3. Elem. in eodem ſegmento circuli AKD. Ergo duæ lineæ KI, FG concurrunt in aliquo puncto peripheriæ AKD. Rurſus. Cùm Anguli AGF, AIK ſint æquales; æquales ſunt etiam deinceps poſiti AGV, AIV. Ergo lineæ FG, KI productæ coibunt per citatam Prop. in aliquo puncto peripheriæ AIE. Cùm ergo coeant in eodem puncto vtriuſque peripheriæ: eas in puncto vtrique peripheriæ communi, quod aliud non eſt quàm ſectio communis V, conuenire neceſſe eſt. Ex quo præterea ſequitur lineas omnes VIK, VGF è puncto V emiſſas, abſcindere ex duobus circulis arcus AF, AG; item AK, AI æqules. Sed hæc, etſi iucunda, minùs ad rem. Ad rem ergo.

PROPOSITIO XV. *Theorema.*

NVllæ duæ lineæ, quarum vna ſit curua, altera recta; vel diuerſæ ſint curuitatis, ſeſe mutuò interſecantes: Inclinationem habent æqualem, homogeneam, aut regularem, ſed incertam & anomalam.

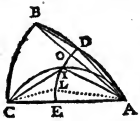


Demonſtratio.

Primò. Linea recta AB, & curua ADC ſe interſecent in A; curuitas verò ſit ad rectam AB conuerſa; deſcribantur quilibet arcus BC, ED; tum ducatur recta AC ad punctum C, in quo arcus quiſpiam ſecat curuam lineam ADC. Cùm ergo arcus BC, EH ſint ſimiles; erunt arcus BC, & ED diſſimiles. Atque eodem modo arcus omnes centro A deſcriptos, & inter rectam lineam AB, & curuam ADC interceptos, diſſimiles eſſe demonſtrabitur, qui arcus cùm ſint menſura inclinationis harum duarum linearum curuæ & rectæ: anomalam illam eſſe arguunt, & ſingulorum punctorum diuerſam. Quod ex eo etiam concludi poteſt: quòd ductis lineis BC, & ED; non ſunt BC, BA, duabus ED, EA proportionales; nec vllæ aliæ poſſunt eſſe proportiona-

 les.

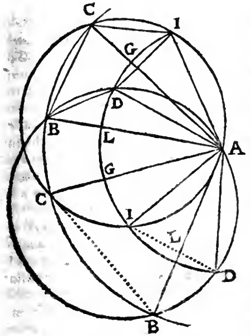
les. Nam eas inter rectas A B, A C intercipi neceſſe eſt. Ergo per Prop. 14. Anomala, & inæqualis eſt harum linearum mutua Inclinatio: ita vt ſingula puncta ſuam propriam & peculiarem habeant Inclinationem. Nec aliter oſtendetur Inclinatio lineæ rectæ, & curuæ eſſe inæqualis & anomala; quando curuam lineam à rectâ auerſam eſſe contigerit: cuiuſmodi ſunt eadem curua A D C, & recta A G F. Nam arcus F C, G H, ſunt ſimiles. Ergo F C, G D diſſimiles eſſe neceſſe eſt. Nulla ergo recta linea cum curua in puncto concurrens, ſiue eam ſecet, ſiue tangat; Inclinationem ad eam habere poteſt certam, & regularem, ſiue ſed ſemper eandem; ſed ſemper diuerſam, & inæqualem & anomalam. Vt habet pars prima Propoſitionis ad lineas rectam & curuam pertinens.



Secundò igitur. Sint duæ curruæ lineæ, diuerſæ curuitatis A D B, A I C, ſeſe in A, vel tangentes, vel ſecantes. Sint, exempli gratiâ, arcus duorum circulorum inæqualium (quod enim in circulis oſtendetur, ad lineas alias curuas applicabitur facilè: præter quàm quod præ cæteris curuis lineis circularium hîc habenda eſt ratio.) Ac primò ſeſe tangant in A: quo centro duo arcus quicunque deſcribantur, qui circulos ſeſe tangentes ſecent in B, D, & I C. Oſtendi debet arcus B C, arcui D I diſſimilis: hinc enim deinde colligemus, vt patebit, anomalam eſſe horum circulorum Inclinationem. Ductis ergo lineis A D, A I, & A B, A C: quia æquales ſunt lineæ A B, A C; auferent ex circulis ſeſe tangentibus in A ſegmenta diſſimilia, maiuſque erit ſegmentum A I C minoris circuli; quàm vt ſimile ſit ſegmento A D B maioris circuli. Ergo Angulus A I C in ſegmento A I C maior eſt Angulo A D B in ſegmento A D B: vnde fit vt ſtatuto ſuper baſe A C (quæ æqualis eſt rectæ A B) triangulo A L C æquali, triangulo A D B Angulus D per 21. Lib. 1. Elem. cadat intra triangulum A I C. Atque adeò Angulus I A C maior erit angulo L A C, ſiue D A B. Quod cùm ita ſit. Si ad angulum communem O A I addantur inæquales Anguli D A O, I A E; fiet angulus D A I minor, quàm Angulus O A E, ſiue B A C. Ergo etiam arcus D I per Prop. 27. Lib. 3. Elem. minor erit arcu O E: qui cùm ſimilis ſit arcui B C: arcus D I minor erit, quàm vt ſimilis eſſe poſſit arcui B C. Eoque modo ſemper oſtendentur arcus remotiores inter duas peripherias ſeſe tangentes in A intercepti; ſemper eſſe proprioribus puncto contactûs A, maiores.

Ad

ad hæc cùm Angulus D A I minor ſit oſtenſus Angulo B A C; maior erit Ratio lateris A D, ſiue A I (quæ eſt diſtantia punctorum D & I à puncto contactûs A) ab baſim D I, trianguli D A I, ſiue ad diſtantiam punctorum D, I: quàm ſit Ratio lateris A B, vel A C, ſiue diſtantiæ punctorum B & C à puncto A, ad baſim B C trianguli B A C, quæ metitur diſtantiam punctorum B C inter ſe. Ergo per Prop. 14. præcedentem, inæqualis eſt, & anomala Inclinatio duarum peripheriarum A D B, A I C ſeſe tangentium in A, vt aſſeritur in hac Propoſitione.



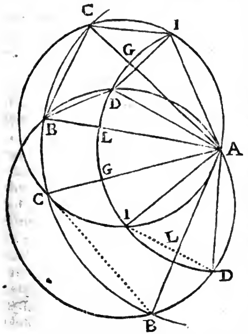
Quòd ſi duo circuli inæquales A I C, A D B ſe mutuò interſecent in A: eorum mutuam Inclinationem eodem ferè modo Inæqualem eſſe, & Anomalam probabimus, quo illud probatum eſt proximè, cùm ſeſe tangunt circuli. Hic tamen quia duplex fit Angulus curuilineus ad verticem A, dum duo ſe ſecant circuli; de vtroque Idem oſtendetur eodem ferè modo. Centro igitur A circuli deſcribantur B C, D I ſecantes peripherias A I C, A D B, tam quando minoris circuli ſegmentum A I C extat extra maiorem circulum A D B; quàm quando intra eundem includitur: qui ſunt duo caſus vtcunque diuerſi. Deinde ducantur lineæ A I, A D; & A C, A B; ducantur etiam rectæ C B, I D: illæ metiuntur diſtantiam punctorum C, B, & I, D à puncto A concurſûs: hæ metiuntur diſtantiam eorundem punctorum ab inuicem: atque has diſtantias oſtendendum eſt proportionales non eſſe. Quod ita abſoluitur. Recta A C æqualis rectæ A B abſcindit ex circulo minorem ſegmentum A I C; quod maius eſt, quàm vt ſimile ſit ſegmento A D B abſciſſo ex maiore circulo.

Digitized by Google

culo. Ergo Angulus A I C (ductâ rectâ I C) in ſegmento A I C maior eſt Angulo A D B in ſegmento A D B. Ergo ſi ſuper A C tanquam baſe ſtatuatur triangulum A D B: ſtatuetur Angulus A D B intra triangulum A I C per Prop. 21. Lib. 1. Elem. Ergo Angulus C A I maior erit Angulo B A D. Iam, cùm circuli minoris ſegmentum A I C extra circulum maiorem ponitur, addantur duo inæquales Anguli C A I, B A D ad communem Angulum D A G, fiet angulus D A I maior angulò G A L, ſiue C A B. Ergo arcus I D maior erit arcu G L: cùm autem arcus G L ſimilis ſit arcui B C: maior erit arcus I D quã vt ſimilis ſit arcui C B: maiórque erit Ratio Lateris A B, ſiue A C (quod eſt diſtantia puncti concurſûs A à punctis circulorum C & B) ad baſim B C, quàm lateris A I, ſiue A D ad baſim I D, trianguli I A D: ſunt autem rectæ C B, I D diſtantiæ punctorum C, B & I, D. Ergo diſtantiæ A C, A I à puncto A proportionales non ſunt diſtantiis punctorum C, B, & I D. Ergo per Prop. 14. Anomala eſt inclinatio duarum ſeſe in A ſecantiũ peripheriarũ A I C, A D B, in eo caſu; in quo circuli minoris ſegmentum extra maiorem circulũ cadit. At, quando ſegmentum minoris circuli intra maiorem circulum cadit; ita abſoluetur demonſtratio, aſſumptâ eiuſdem diagrammatis alterâ parte, iiſdem Characteribus inſignitâ oſtenſum eſt Angulum C A I maiorem eſſe Angulo B A D. Ergo addito communi Angulo I A L, maior erit Angulus C A L, vel G A L, Angulo I A D. Sed Angulus G A L eſt idem cum Angulo C A B. Ergo arcus C B maior eſt, quàm vt ſimilis ſit arcui I D; & Ratio A C, vel A B diſtantiæ punctorum C, B à ſectione A circulorum ad rectam C B minor eſt, quàm Ratio A I, vel A D diſtantiæ punctorum I, D, à circulorum ſectione A ad rectam I D: quæ eſt diſtantia inter puncta I & D. Ergo Inclinatio duarum peripheriarum A I C A I D concurrentium in A, cùm circuli minoris ſegmentum intra maiorem circulum cadit, ſiue, cùm eius conuexum, circuli maioris concauum reſpicit, inæqualis eſt & Anomala. Cùm ergo ſiue inæqualium circulorum peripheriæ ſe tangant, ſiue ſe interſecent, punctorum earum omnium diſtantiæ à puncto concurſûs, & diſtantiæ eorundem ab inuicem nunquam ſint proportionales: incerta, inæqualis, & anomala eſt earum peripheriarum Inclinatio.

Denique in eodem Schemate oſtendetur Inclinationem; quam inter ſe obſeruant duæ peripheriæ A D B, A I C ad ſe inuicem conuerſæ; quarum ſcilicet cauum vtrumque ſibi mutuò reſpondet & obiicitur, inæqualem eſſe, & anomalam ſiue ſe ſecantes circuli æquales fuerint, ſiue inæquales. Si enim ductæ concipiantur rectæ lineæ B C,

D I;



D I; L G. In triangulo D A I minor eſt ratio Lateris A D, vel A I ad baſim D I; quàm Lateris A L vel A G ad baſim L G trianguli L A G. Sed vt A L ad L G; ita A B ad B C: minor eſt ergo Ratio A D ad D I, hoc eſt, diſtantiæ punctorum D, I, à concurſu A, ad diſtantiam ab inuicem eorumdem punctorum D, I; quàm ſit Ratio A B ad B C, ſiue diſtantię punctorum B, C, ab Interſectione A, ad diſtantiam eorundẽ punctorum B, C, ab inuicem. Inæqualis ergo eſt, & anomala hæc Inclinatio interna horum duorũ ſiue æqualium, ſiue inæqualium circulorum. Idem oſtendi poteſt de Inclinatione externâ; quam iidem ſiue æquales, ſiue inæquales circuli obſeruant, dum vtriuſque circuli conuexum ſibi reſpondet. Vera ergo eſt quouis caſu propoſito ſtatuta Propoſitio.

PROPOSITIO XVI. *Theorema.*

NVllus angulus diuerſæ ſpeciei lineis comprehenſus, ad alium quemuis angulum Rationem vllam habere poteſt.

Demonſtratio.

Cùm duo quælibet Quanta, vt Rationem ad inuicem aliquam habere dici queant, certæ, fixæ, ac determinatæ quantitatis, ac menſuræ eſſe debeant: vt ſcilicet innoteſcat, dum inter ſe comparantur, eorum habitudo; æqualitas nimirum, ſi æqualia eſſe contigerit, aut inæqualitas certâ ac definitâ maioritate, aut minoritate conſtituta

Cc (neque

(neque enim quanta quælibet inæqualia, Rationis iure potiuntur, vt non ſemel in ſuperioribus declaratum eſt) Angulus autem lineis diuerſæ ſpeciei comprehenſus, ſiue duarum linearum diuerſæ ſpeciei concurrentium inclinatio, nullius ſit certæ ac definitæ menſuræ, vt Prop. proximè antecedente oſtenſum eſt: quam Angulus huiuſmodi ad alium quemcunque Angulum, ſiue eiuſdem, ſiue diuerſæ ſpeciei lineis conſtitutum Rationem habere queat? Nullus ergo Angulus diuerſæ ſpeciei lineis &c. Quod erat probandum.

Scholium non leue.

Non leue, inquam, imò grauiſſimum ſcholium: in quo & omnium, quæ hactenus allata fuere, breuem Anacephalæoſim inire; & ex eis (poſtremis præſertim Propoſitionibus) Angulorum de quibus agimus, naturam non-nihil adhuc enucleatiùs exponere; ac denique difficultates, non paucas, quas obiici, vel contigit, vel contingere demum poteſt, euidenter ſoluere, & mature præuertere propoſitum ſit.

Primò ergo certum, ac ſtatutum eſto, quod à nullo non admiſſum eſt hactenus Geometrâ, duarum ſcilicet quarumcunque linearum ſiue rectarum, ſiue generis cuiuſcunque curuarum concurrentium Inclinationem, ſiue ad ſe inuicem ſitum, verè ac propriè & eſſe, & dici Angulum; & vt reale quidpiam admitti debere, velut Prop. 4. declaratum eſt.

Secundò. Anguli ad nullam quidem ueræ quantitatis ſpeciem pertinent; neque enim lineæ ſunt, vel ſuperficies, aut corpus; eoſque ſibi vindicat vel Qualitatis prædicamentum, ſi ſuperficiei Anguli lateribus terminatæ & figuratæ habeatur ratio; vel Prædicamentum ſitûs, ſi ipſa ſola ſpectetur laterum concurrentium Inclinatio: Attamen non proinde carent omnibus quantitatiuis facultatibus. Quis enim negauit hactenus Angulum Angulo eſſe poſſe maiorem, vel minorem, aut ei æqualem; dum magis, vel minùs, aut æque obliqua ſtatuitur laterum eos comprehendentium Inclinatio? At hæ ſunt quantitatis affectiones: quibus non Anguli ſolùm gaudent; ſed etiam Entia alia non pauca, quæ ad Quantitatem perinde vt Anguli non pertinent. Nunquid enim grauitas grauitate maior, minórve rectè dici poteſt; maius aut minus pondus; maius aut minus tempus? & cætera huiuſmodi, quæ maius & minus, non ſecùs quàm veræ quantitatis ſpecies nata ſunt ſuſcipere. Conſule Prop. 5. & 6. Libri huius, aut Prop. 17. Lib. 2. Examinis mei Quadrat. Quæ verò his opponi poſſe viſa ſunt Andreæ Tacqueto noſtro inferiùs & referam, & reiiciam.

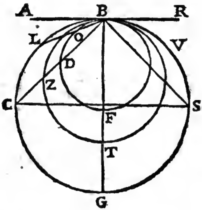
Tertiò.

Tertiò. Expoſui, idque Prop 2. quomodo, quáve de cauſâ quantitatis finitæ ad infinitam nulla ſit Ratio: etſi quædam ſit illius ad hanc ſecundùm quantitatem habitudo, ſcilicet ſecundùm maius & minus; quod præciſè non ſufficit ad eam duarum quantitatum relationem, quæ Ratio dici debeat: præter hanc enim habitudinem duarum magnitudinum ſecundum quantitatem, quam Eucl. def. 3. Lib. 5. requirit; aliam conditionem neceſſariam aſſerit def. 5. vt ſcilicet duæ magnitudines tales ſint, vt multiplicatæ ſeſe poſſint ſuperare, hoc eſt, vt vna alteri applicata, & quoties opus erit, repetita veluti eius menſura eam poſſit ædæquare, vel excedere; adeò vt ad hoc vt vna magnitudo ad aliam habere Rationem dicatur, neceſſe ſit, vt vna aliquoties repetita alteram metiatur præciſè, ſi eius foret aliquota; vel certè metiatur magnitudinem ipſâ alterâ maiorem. Quòd ſi conſtiterit duarum magnitudinum vnam non poſſe alteram, vel aliam ipſâ maiorem metiri; ſiue id contingat, quia illa finita eſt, hæc verò infinita; ſiue quia vna eius eſt naturæ. vt alteri tanquam menſura applicari non poſſit: conſtabit etiam huiuſmodi magnitudines, licèt ſint ambæ finitæ, & eiuſdem generis, omni rationem aliquam habendi iure carere: quod duabus poſtremis Propoſitionibus demonſtratum eſt circa Angulos lineis heterogeneis comprehenſos: quarum inclinatio nuſquam vna eadémque eſt, ſed in infinitum perpetuò minor, quò propiùs ad earum concurſum acceditur: hæc autem inclinatio tam multiplex, ad alterius inclinationis menſuram, quæ vnica & certa eſſe debet, inepta eſt; nec eſt magis apta, vt quamuis aliam menſuram admittat; adeóque nullius ad aliam quamlibet Inclinationem rationis capax eſſe poteſt. Eſto ſit (quod ſemper repeto) eâ maior, vel minor. At verò ſi ambo Anguli, lateribus, vel rectis, vel curuis curuitatis æqualis, & in eandem partem poſitæ, contineantur; nihil obſtat, quò minùs Rationem inter ſe habere poſſint: alter enim alterum excedere multiplicatus poteſt, ſiue ipſum metiri, aut alium ipſo maiorem, vt ad Rationem conſtituendam exigitur.

Hæc quanquam certa, & hoc toto Libro declarata, & confirmata omni dubitationis periculo vacare videantur: poſtquam præſertim oſtenſũ eſt á me tum hîc Prop. 5. & 7. tum Prop. 27. Lib. 2. Exam. Quadrat. nihil abſurdi contra Principia Geometrica committi, vt rebantur Greg. à S. Vinc. eiuſque Interpretes Aynſcom clarus vterque Geometra, ſi quodam Quantitatis Iure donentur Anguli quibuſcúnque lateribus comprehenſi. Attamen Andreas Tacquetus noſtræ & ipſe Societatis, cuius induſtriâ ſingulari gemmis rariſſimis è Cylindricis

& Annularibus expiſcatis ditatus eſt Geometriæ Theſaurus: hic, inquam, alio ex capite iure omni quantitatis carere cenſet Angulos omnes. Deficiat hæc mea exercitatio, ſi earum rationum non meminero, quæ Geometram non vulgarem in eam ſententiam adduxerunt. Duplicem ab eo afferri obſeruo in ſcholio Propoſitionis 16. Lib. 3. Elementorum; altera eſt à poſteriori deducta, altera à priori. Vtramque perpendo.

Prior itaque ab eo colligitur ex abſurdis, & impoſſibilibus, quæ conſequuntur, ſi angulos quantos eſſe aſſeratur. Abſurda illa & impoſſibilia non alia adducit, quàm Paradoxa illa à Geometris non paucis nec nominis obſcuri ex citatâ Prop. 16. Lib. 3. Eucl. deduci ſolita: quæ fallacia aſſerit, ac planè incomprehenſibilia. Primum ac ſecundum in ipſo textu propoſitionis illius 16. Lib. 3. Eucl. habentur, quanquam ſubdubitet Tacquetus ab alio Aliquo ea ad Euclidem addita fuiſſe: ſed, vt mihi quidem videtur, gratis dubitat, & ne Geometriæ Parenti aduerſari credatur: cùm omnes tum Græci tum Latini codices hiſce conſtent, nec vnus (cùm eorum tantus ſit numerus) Euclidis Interpres ea omiſerit hactenus.



Primum ergo ex Euclide petitum Paradoxum citato Authori incomprehenſibile viſum, ita habet. *Angulus contingentiæ A B L eſt omni angulo acuto minor.*

Secundum. *Angulus ſemicirculi L B G eſt omni angulo acuto maior.* Hoc ex priore probato, vel prius ex iſto ſecundo per ſe, vt patet, conſequitur: vt vnicum cenſeri poſſit.

Tertium. *Angulus quicunque rectilineus infinitos angulos contactûs cõtinet, eiſq; maior eſt infinities.*

Quartum. *Angulus contactûs A B L eſt vera pars anguli recti A B G: nequit tamen vllâ ſui multiplicatione ſuum totum adæquare, ac proinde infinita æqualia addita non efficiunt Infinitum.*

Quintum. *Tranſitur à minori ad maius, & per omnia media neque tamen per æqualia.* Si enim recta B G immoto eius extremo B fluere concipiatur per ſemicirculum G C B ſemper angulum acutum cum diametro B G conſtituet, quamdiu non peruenerit ad tangentem B A,

hoc

hoc eſt, minorem angulo C L B G ſemicirculi: at, cùm primùm cum B A coaluerit, cum eâdem B G conſtituet angulum rectum, hoc eſt; maiorem angulo C L B G ſemicirculi. Ergo eidem æqualem nunquam conſtituit.

Atque ea ſunt Paradoxa illa, quæ mentis humanæ captum, omnémque probabilitatis ſpeciem ſuperare aſſerit laudatus Author: vt propterea non niſi ex aliquo abſurdo, falſóque Principio deduci concludat: quod aliud inquit, eſſe non poteſt, quàm quòd Anguli quanti eſſe ſupponantur: hoc enim poſito Angulos alios aliis eſſe maiores minoréſve, aut inter ſe æquales fateri neceſſe eſt; ac deinceps ex eâ Quantitatis affectione conſequi illa Rationi repugnantia Paradoxa: quæ omnia, vbi angulos quantitate carere conceperis, concipies euaneſcere. Si enim quanti non ſunt anguli, infert idem, nec vnus alteri æqualis dici poterit, vel eius vlla pars, aut eundem ſupêrare poſſe, quantumlibet multiplicatus: eodémque iure Angulus contactûs haudquaquã dici poterit pars Anguli recti, ſicut nec Angulus ſemicirculi, aut hic maior omni angulo acuto, & ille minor: vnde reliqua illa immania Paradoxa à Geometris collecta ſunt. Ea ſiquidem Prædicata ad ſola Quanta pertinent, & ex ſolâ Quantitate emanare manifeſtum eſt.

Quòd autem Anguli quanti non ſint (Authoris mentem fideliter, haud item verba refero) quanquam Paradoxa illa à ratione omnino aliena, quæ poſitâ eorum quantitate per ſe neceſſariò conſequuntur, ſatis perſuadent: Rationem tamen à priori promptum eſt aperire. Eam offert ipſa Anguli Euclidiana definitio 8. Lib. 1. Angulus eſt duarum linearum ſe tangentium, & non in directum iacentium alterius ad alteram Inclinatio. Sed Inclinatio duarum linearum non eſt Quantitas, ſed modus tantùm Quantitatis, quam lineæ concurrentes includunt & determinant. Præterea eam Inclinationem, aut lineam eſſe, aut ſuperficiem, aut Corpus neceſſe foret: at horum nihil eam eſſe conſtat. Ergo Angulum nullum, eſſe Quantum.

Quòd ſi obiicias neminem vnum ex tanto numero Geometram hactenus extitiſſe: qui, cùm de Angulis habetur ſermo, eis quantitatem tribuere non videatur: paſſim enim angulus angulo maior, aut minor dicitur; ſecatur in partes duas, tres &c. iuxta datam quamcunque Rationem: quæ & alia ſimilia quantitatẽ ſapiunt, nec niſi de quanto poſſunt enunciari. Reſpondet Tacquetus Geometras non propriè, ſed analogicè loqui; idémque eſſe angulos dicere æquales & inæquales, & dicere ſimiles eſſe, ac diſſimiles. Angulus enim, inquit, eſt duarum linearum Inclinatio, quæ cùm non ſit quantitas, ſed quantitatis

tantùm modus; ſi vna cum alterâ conferatur, genita relatio non æqualitatis dicetur, aut inæqualitatis, quæ ex ſolis quantitatiuis gigni poteſt; ſed ſimilitudinis, aut diſſimilitudinis: dicentur autem propriè anguli illi ſimiles, qui mutuò impoſitis eorum lateribus ſibi congruunt: impropriè verò dicerentur æquales, & inæquales. Eodem modo, cùm Angulus dicitur alterius anguli duplus, triplus &c. haud ita accipiendum eſt quaſi vnus alterum bis, ter &c. contineat, id enim quantitatiuorum proprium eſt: ſed ita, vt angulus vnus ductâ vnâ, aut duplici &c. lineâ in duas, vel tres Inclinationes ſimiles diuidatur. Hæc & his ſimilia adducit idem Author, quibus probet ſolennem illum de Angulis, quaſi forent quanti, loquendi morem Geometrarum, in ſenſum poſſe adduci ſuum, adeóque nihil ponderis ad quantitatem angulis aſſerendam ex eo poſſe peti.

Hæc ſunt à doctiſſimo Geometrâ ſuæ de Angulis ſententiæ ipſi cum Gregorio à S. Vinc. & Franc. Aynſcom communis peculiaria fundamenta: quæ iuxta Inſtitutum à me perpendi neceſſe nunc eſt. A proximè propoſito initium facio.

Aſſero itaque Geometras retro omnes ita de angulis locutos, vt non niſi contra eorum apertam ſententiam, quam obſeruare ac venerari par eſt, ius quoddam quantitatis ipſis denegari poſſit. Nam præterquàm quôd nihil æqualitate & inæqualitate angulorum frequentius repetitur, nullâ, quam obſeruarim, eorum ſimilitudinis aut diſſimilitudinis factâ mentione: caſus quoſdam obſeruare eſt, in quibus ipſa vera eorum æqualitas & inæqualitas, quæ quantitatiuorum tantùm proprietas eſt, neceſſariò deſignatur, omni præciſâ ſimilitudinis & diſſimilitudinis analogiâ. Vnam, omnium inſtar, Propoſitionem 33. Libri 6. Eucl. lubet exhibere: in quâ anguli ſiue ad centrum, ſiue ad circumferentiam, rationem eandem habere dicuntur, quam habent arcus, quibus inſiſtunt. Ergo Anguli, non ſecùs quàm arcus, qui ſunt veræ quantitates, habent inter ſe rationem, hoc eſt, habitudinem quandam ſecundùm quantitatem iuxta defin. 3. Lib. 5. Elem. aliquo ergo quantitatis iure gaudent. Ad hæc cùm omnis ſimilitudo diſcrimen aliquod inter res, quæ ſimiles dicuntur, ſemper ſupponat (neque enim ſublato omni diſcrimine ſimilitudo foret, ſed identitas aut æqualitas) nullum autem diſcrimen obſeruare liceat inter duos angulos, quorum latera ſibi mutuò impoſita congruunt; non rectè, meâ quidem ſententiâ, illi anguli ſimiles dicuntur ab Authore eximio, quorum latera impoſita ſibi mutuò congruunt: rectiùs dixeris eos, aut eoſdem eſſe, aut æquales. Quemadmodum duo arcus eiuſdem

eiuſdem circuli, qui ſibi mutuò impoſiti congruunt, nequaquam ſimiles dici debent; ſed iidem, aut æquales; ob defectum ſcilicet diſcriminis alicuius; quo ſublato tollitur ratio ſimilitudinis, & ſtatuitur ratio æqualitatis aut identitatis: rectè verò ac propriè arcus ſimilis dicentur illi, qui in circulis inæqualibus eodem centro deſcriptis à duobus radiis quibuſcunque intercipiuntur; neque enim carent diſcrimine (inæqualitate nimirum) ad ſimilitudinem neceſſario. Ergo, inferat aliquis, nulli vnquam anguli ſimiles dici debent: nam duo quicunque anguli, ſi ſuperpoſiti congruunt, æquales ſunt; ſi non congruunt, ſunt inæquales, nec eandem habent ad quatuor angulos rectos rationem, vnde ſimiles dici queant; ſecùs quàm in circulis contingat: in quibus arcus ſimiles dicuntur, qui ad totam ſuam peripheriam habent eandem rationem. Illationem illam, ægrè licèt, eò quòd viri doctiſſimi ſententiæ planè ſit oppoſita, eamque labefactet; Ego admitto, admittétque quiſquis ratiocinationem paulò antè allatam pro merito perpendet.

Rationem nunc contemplemur ex ipſa Anguli definitione, atque adeò à priori à clariſſimo Geometrâ allatam, quâ Angulorum quantitas ei viſa eſt euidenter impugnari. Angulus eſt duarum linearum ſeſe tangentium & non indirectum iacentium Inclinatio, vt habetur Lib. 1. defin. 8. Elem. Sed Inclinatio, inquit, duarum linearum non eſt quantitas: ergo nec Angulus quantitas eſſe poteſt. Ergo nec quantitatis Prædicata vlla, vt æquale, & inæquale, maius & minus, pars & totum, Angulis poſſunt conuenire: ſimilitudo tamen & diſſimilitudo, ſi eos inter ſe comparari contingat, iis competit: ſimiles autem ſunt, ſi impoſita latera congruunt, ſin ſecùs, diſſimiles; nec vnus alterius pars niſi analogicè vocabitur. Huic Argumento tum hic, tum aliàs in examine Quadrat. vt ſuperiùs memini, abundè factum eſt ſatis. Admiſſum, aſſertúmque non ſemel iam eſt à me nullum Angulum, ſiue Inclinationem duarum linearum eſſe quantitatem, ſed pertinere tum ad qualitatem, tum ad ſitum diuerſâ ratione, vt haud ita multò antè expoſui; omni tamen non carere quantitatis proprietate, ſicut nec alia multa Entia ad varia Prædicamenta pertinentia. Quare Angulus dicitur maximè propriè Angulus pars, & vnus æqualis alteri, vel inæqualis, quin imò, vt oſtendi, non niſi impropriè, & analogicè vnus alteri ſimilis dici poſſe videtur: quod Authoris huius ſententiæ opponitur è diametro.

Reſtat Argumentum è Paradoxis illis ſuperiùs memoratis petitum: quæ, quia humanę mentis aciē ludere viſa ſunt inſigni huic Geometrę, ipſum

Ipſum in eam adduxerunt opinionem, vt Angulos omnes omni carere quantitatis ratione iudicarit: nullus enim modus ad ea de medio tollenda; & Principij, vnde naſcuntur, fallaciam declinandam eidem occurrit expeditior. At verò, etſi hæc admiranda planè ſunt, vt alia non pauca quantitatis arcana, eóque magis humanæ mentis hebetudo dolenda; quò denſiores tenebras in rebus patitur, quibus nihil magis obuium ſenſibus occurrit: haud ideò tamen vt inania, aut falſa condemnanda, cùm ratiocinatione tam euidenti è Principiis colligantur certiſſimis. Nunquid vnus aliquis Geometra in dubium reuocauit hactenus partem illam Propoſitionis 16. Lib. 3. Euclidis quâ probatur inter lineam tangentem A B (in fig. eâdem) & peripheriam C L B aliam duci non poſſe rectam lineam, quin circulum ſecet? At hoc admiſſo, vt non poteſt non admitti, ea omnia Paradoxa pari iure admitti neceſſe eſt, quippe quæ ex eo per ſe conſequuntur manifeſtiſſimè, vt patet ex ipſo Euclide; qui vbi probauit inter tangentem A B, & peripheriam C L B cadere non poſſe aliam rectam, collegit per Axioma, quod Includens Incluſo maius ſit, *Angulum mixtum A B L minorem eſſe omni angulo acuto; & angulum ſemicirculi L B G omni acuto maiorem.* Neque enim, vt ſuprà contendi, niſi gratis dici poteſt hæc duo Corollaria ad Euclidem adiecta fuiſſe ab alio quopiam Geometrâ, ſicut nec adiecta ad Propoſitionem 31. eiuſdem Libri 3. cenſenda ſunt hæc alia duo ex eodem Axiomate collecta. *Angulus maioris ſegmenti recto quidem maior eſt; minoris autem ſegmenti angulus, minor eſt recto.* Fuere ſemper Geometriæ cultores erga Geometriæ Parentem obſeruantiores, quàm vt eius opus tam abſolutum quoquo modo temerare non vererentur. Quod ergo aſſeruit ac demonſtrauit Euclides, quod omnes grauiſſimi eius Interpretes approbauere: haud fallaciæ cuipiam obnoxium eſſe; haud aliquid, quod à Principiis lumine naturali, ac per ſe notis ſit alienum ex eo conſequi æſtimandum eſt. Nec verò adeò mentis humanæ facultatem ſuperant hæc duo ab ipſo Euclide propoſita Paradoxa, à quibus cætera deducuntur; vt poſthabita omni ea percipiendi ſpe in ſolâ ipſorum admiratione conquieſcat. Quis enim curuum cum recto congruere nunquam poſſe non percipiat euidenter? At, ſi attendas, nihil eo obſcurius proponitur; cùm Angulus contactûs omni acuto Rectilineo minor eſſe dicitur. Rem, etſi ex ſuperioribus iam ſatis pateat euidenter, quoad eius obſcuritas patietur, exponam.

Angulus contactûs A B L (in eadem fig.) Angulus quidem eſt, eò quòd duabus lineis rectâ B A, & circulari B L concurrentibus contineatur:

neatur: quarum vtraque in ſuâs ſpecie ſimplex eſt, ac regulariſſima. Attamen ſi inclinatio vnius ad alteram perpendatur, nihil magis anomalum, aut irregulare reperias; ſemper enim quò propiùs ad concurſum B accedunt, eò minorem ſortiuntur inclinationem; nulláque poteſt tam parua aſſignari, quin minor in eodem angulo contactûs poſſit exhiberi: omnes ſiquidem poſſibiles inclinationes habere nata eſt linea circularis, aut alia quælibet curua cum tangente lineâ rectâ. Quemadmodum igitur linea curua partibus conſtat quantitatiuis eiuſmodi, vt nulla ſit minima, ſiue vltima, & quâ minor dari non poſſit (aliàs pars illa minimè foret quantitas, nec veram quantitatem componere apta) ita etiam nulla eſt eius ad tangentem rectam lineam inclinatio minima, & vltima, aut quâ minor dari non poſſit; actu tamen omnino omnes continet. Obſeruandum eſt præterea, ab eodem puncto, in quo linea recta curuam tangit, aliam rectam duci non poſſe infra tangentem, quæ infra curuam non cadat; ita vt curua inter vtramque media intercedat: quod quidem ab Euclide quoad lineam circularem demonſtratum eſt euidenter; idem tamen non minùs euidenter verum eſſe conſtat in curuis quibuſlibet, quas, quà concauæ ſunt, à rectâ deflectere neceſſe eſt.

Hæc qui attentiùs perpenderit, nullam maiorem præ aliis circa Quantitatem occurrere ſolitis, difficultatem in hac de angulis diſertatione, eiuſque ſolutione eum paſſurum exiſtimo. Illa quidem certè Paradoxa ſuperiùs allata, admiratione digniſſima, attamen nec à veritate aliena, nec à falſo Principio deducta cenſeri debent: illud enim eſt vnicum, quòd nimirũ Angulus contactûs omni acuto rectilineo minor ſit: quod ab Euclide ipſo demonſtratũ eſt; & anomala illa ſuperiùs explicata curruæ cuiuſuis ad rectam tangentẽ minor ſemper in infinitum Inclinatio oſtendit apertiſſimè. Hoc autem poſito conſtat *Angulum ſemicirculi maiorem eſſe omni angulo acuto*, hoc eſt, omni angulo, qui recto minor ſit. Quia ſcilicet eius à recto differentia, angulus contactûs, minor eſt quouis angulo rectilineo acuto. Ergò reliquus, nempe angulus ſemicirculi, acuto quouis maior eſt. Quod eſt Paradoxum ſecundum. Tertium autem quòd *Angulus quicunque rectilineus infinitos angulos contactûs contineat* quid abſurdi aſſerit? cum angulus contactûs infinitè paruus, & infinities infinitè paruo minor exiſtat, non ſecùs quàm lineæ curuæ pars infinitè parua, & infinities infinitè minor ad punctum concurſûs cum rectâ lineâ tangente conſtituitur. Quartum, quòd *Angulus contactûs vera pars ſit Anguli recti, nec tamen poſſit vllâ ſui multiplicatione ſuum totum adæquare, ac proinde infinita*

æqualia non efficiant infinitum, vix differt à tertio. Eſt ſanè pars anguli recti: quia ſi eo multetur angulus rectus fit reliquus angulus ſemicirculi recto minor. Nec abſurdum eſt Infinitos angulos contactûs non efficere angulum infinitum, ſicut pars quantitatis palmaris infinitè parua iuxta Prop. 1. infinities ſumpta non efficeret quantitatem infinitam; ſed vel palmarem, aut etiam palmari minorem. Quintum denique ita habet. *Tranſitur à minori ad maius, & per omnia media, neque tamen per æqualia.* Par quidem in hoc cum cæteris admirationis cauſa latet, at minimè maior difficultas: Nam, vt ex eodem cum cæteris Principio deducitur; ita ex eodem eius cum cæteris veritas eluceſcit. Dum enim recta B G eiuſdem ſchematis ſuperioris, immoto eius extremo B ferri concipitur per ambitum G C L B, donec ad Tangentem B A perueniat, & cum eâ coaleſcat: conſtituit ipſa quidem omnes poſſibiles Inclinationes tam cum rectâ B G, quàm cum Tangente B A, quæ rectis lineis continentur: atque adeò dato cuiuis angulo acuto rectilineo æqualem alicubi exhibebit; nec dici poterit eadem recta BG ſic fluens, tranſire à minori angulo quàm ſic datus ille, ad angulum eodem maiorem, quin aſſeri perinde poſſit, eidem æqualem conſtituere. At verò, ſi angulus mixtus ex rectâ & curuâ lineâ datus ſit, qualis eſt angulus ſemicirculi G B L, vel alius quilibet angulus ſegmenti maioris, ſiue minoris, haud quaquam ei æqualem exhibitura eſt fluens linea B G per ambitum lineæ curuæ, exempli gratiâ G C L B; quandiu enim B G recta curuam decurrit, ab illa refugit huius ſinus: ſed vbi primùm totam curuam emenſa fuerit, & cum B A coaluerit; angulum rectum A B G maiorem agulo ſemicirculi G B L conſtituat neceſſe eſt: quia, vt ſuprà oſtenſum eſt, aliqua ſemper eſt licèt anomala, lineæ tangentis B A cum arcu B L Inclinatio: quæ eſt complementum ad angulum ſemicirculi G B L, vt fiat rectus angulus G B A. Denique huius Paradoxi non adeò occultum videtur eſſe fundamentum; cùm aliud non ſit, quàm quod recta linea cum curua B L C ne minimo quidem ſpatio congruere poſſit, vt cum rectâ B G eundem angulum vtraque conſtituat.

Cùm ergo ea ſit hactenus expoſita Angulorum cauſa; vt ex quodam quantitatis Iure ipſis conceſſo non modò nihil à lumine naturali alienum, ſed nec adeò ipſi abſtruſum conſequatur; quin faciliùs quàm alia non pauca in quantitate occurrere ſolita, concipi poſſit: quod ius ſi iiſdem denegetur, grauiora quæque ac maximè neceſſaria tot Geometriæ luminum monumenta, quibus hanc diſciplinam nobiliſſimam nobis pepererunt, analogico, æquiuoco, & vt oſtendi, oppoſito ſen-

ſu

ſu accipienda ſint non ſine graui tot tantorúmque Authorum iniuriâ, rerum confuſione, diſpendióque Geometriæ ſtudioſorum: haud quaquam veteri, veráque de Angulorum propria quantitate ſententia omiſſa, recentiorem hanc licèt Geometris non vulgaribus, quibuſcum hactenus diſputatum eſt, acceptiſſimam opinionem vt amplecterer adduci potui. Quam mentem meam non mediocriter ſtabiliuit Vallſiſij Geometræ alioqui non imperiti diſquiſitio de Angulo contactûs: in qua Peletarij pridem reiecta Placita nouis Argumentis reſtituere conatur; ſed quibus diſcere liceat quanti ſit periculi Antiquorum faſtiditis Principiis noua comminiſci. Quod vt conſtet euidenter; nihilque, quod occurrerit, omittam, quando id ago, huius generis angulorum naturæ explanandæ vtile, ſingula laudati Authoris Argumenta, licèt ea ferè ex dictis diſſoluere promptum ſit, excutere, è re fore viſum eſt.

ARGVMENTVM PRIMVM.

Q*Vo Valliſius Angulum contingentiæ oppugnat.*

Non conſtat de Angulo contactûs Euclidis ſententia: quare ad eum nec ſtatuendum, nec reiiciendum, quidquam confert eius Authoritas: nec ab eo dirempta eſt hæc controuerſia, nec ex eo dirimi poteſt. Ita ſentit cap. 2. citatus Author.

Reſponſio.

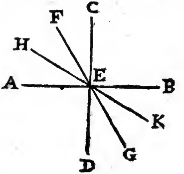
Aut Anguli contingentiæ realitas vera, & poſitiua ex Euclide conſtat: aut ex Euclide nihil vnquam certi, & manifeſti conſtare poteſt. Angulum contactûs, Angulum vocat Euclides. Angulum contactûs cum Angulo rectilineo acuto comparat Eucl. Angulum contactûs partem eſſe Anguli recti, cuius altera pars ſit Angulus ſemicirculi aſſerit idem Euclides. Si Angulus eſt ex Euclide Angulus contactûs; ex Euclide reale quidpiam eſt ſitus ſcilicet duarum linearum inclinatarum mutuò concurrentium. Si ab Euclide cum poſitiuo angulo rectilineo acuto comparetur; & ipſum ab Euclide cenſeri poſitiuum neceſſe eſt. Si idem Angulus contactûs pars ab Euclide dicatur Anguli recti, qui realis eſt, & ipſe ab eodem realis dici debet; niſi grauiſſimum Geometriæ Parentem hoc in Argumento nugatum eſſe & ineptiiſſe præter debitam ei obſeruantiam aſſeramus. Conſule, quæ Prop. 4. 5. & aliis, in hanc rem allata ſunt, & fuſiùs explicata: quæ hîc perperam repetantur.

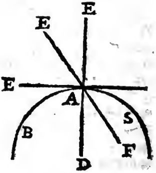
Digitized by Google

ARGVMENTVM SECVNDVM.

V*Alliſij aduerſus Angulum contingentiæ.*

Argumentum hoc à Peletario primùm excogitatum eſt : quod quidem à Clauio eſt euidenti ratiocinatione longiùs reiectum, non ita tamen, vt ab oculis Valliſij illud ſubduxerit; cúmque, quamuis, vt ipſe fatetur cap.4. extremo, non ignoraret hanc Peletarij ſententiam ægriùs antehac aſſenſum inueniſſe, ab eo reſumendo non tantùm deterruerit; ſed animos etiam eidem feciſſe videatur, idem, ſi fas foret, reſtituendi, confirmandíque: adeò vt aſſerat hoc in Argumento *veram & genuinam Anguli contactûs cauſam contineri, adeóque à priori demonſtrari.* Hanc ergo cauſam, hanc à priori demonſtrationem ex ore Valliſij audiamus; & deinceps, vt par fuerit, excipiamus.





Duabus, inquit cap.4. ex mente Peletarij, *A B C D lineis ſe mutuò ſecantibus in E ad angulos, rectos; ſi intelligatur recta C D, puncto E fixo circumuolui: vbi peruenerit ad ſitum F G, ex angulis rectis fiunt obliqui: qui fient adhuc magis obliqui, cùm peruentum fuerit ad ſitum H K, & ſic deinceps donec perueniatur ad A B; tunc enim ceſſabit interſectio, & ſimul angulus euaneſcet: quoniam non iam inclinabitur ad rectam A B, ſed in ipſâ iacebit immerſa. Neque ſecus eſt in curuo. Si enim D E per centrum circuli acta & peripheriam ſecans in A, ſuper eo circumducatur, fient anguli continuè varij cum peripheriâ, donec ceſſante ſectione, linea E D facta ſit E K: atque iam linea E D, vel E K non inclinata intelligitur, ſed immerſa in ipſâ peripheriâ B A C, quantum ad angulum attinet, non aliter quàm ſi ipſa B A C eſſet linea recta.*

Hæc

Hæc quaſi ex Peletario refert Vallisius. Quibus quid idem addit de ſuo? ecce. *Illud, credo, vult Peletarius. Rectam E D cùm peruentum* eſt, ad ſitum E K, non iam inclinari ad peripheriam, ſed ſuper *ipſam* ἀκλινῶς *iacere, & coincidere cum ipſâ, eò vſque* (nota) *dum peripheria ſupponitur eandem Inclinationem retinere, quam habuit in ipſo puncto A.* Tum paucis interiectis. *Ipſius peripheriæ inclinatio, quæ in puncto A nulla erat: cùm primùm ab ipſo A receſſum eſt, fit aliqua.*

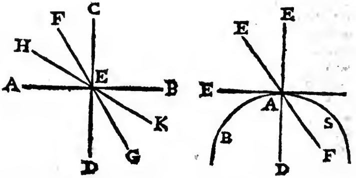
Idem cap. 3. ex ſuâ ipſius mente, ſuiſque verbis poſt alia quædam iis non abſimilia, ſubiungit. *Angulus quem facit ea peripheria B A cum diametro A D, non æſtimandus eſt ſecundùm inclinationem, quam habet peripheria à puncto A remotior: ſed ſecundùm illam, quàm habet perimeter in ſui particulâ contiguâ, ſeu potiùs in ipſo puncto A concurſûs.* Hæc eſt Vallisij oratio de ſemicirculi Angulo differentis. Quibus ſimilia adducit cap. 6. de Angulo contactûs in hæc verba. *Ego nego peripheriam B A, & rectam tangentem E K ad ſe inclinari ſaltem quoad punctum concurſûs A, coincidunt enim, non inclinantur. Sed & cum Peletario affirmo eas ſolùm lineas inclinari in puncto concurſûs; quæ, ſi producantur, ſe mutuò ſecabunt.* Hæc citatis locis Vallisius ex quibus, cùm quædam ſibi minùs cohærentia aſſerantur, vix percipiatur vtriuſque huius Authoris de Angulis contactûs, & ſemicirculi ſententia, eiuſque declaratio.

Reſponſio.

Miror ſanè cur apud Vallisium tantæ fuerit Authoritatis, ac venerationis Peletarius: vt *cùm Peletario maluerit affirmare*, vt proximè retuli, *eas ſolùm lineas inclinari in puncto concurſûs, quæ, ſi producantur, ſe mutuò ſecabunt*: quàm cum Euclide ſentire duas quaſlibet lineas quomodocunque concurrentes, mutuò inclinari; ſiue, quod idem eſt, Angulum conſtituere: quàm cum Eucl. Prop. 16. Lib. 3. Angulum vocare angulũ contactûs: quàm cum Eucl. definit. 8. Lib. 1. Angulum definire, Inclinationem duarum quarumlibet linearum ſe mutuò tangentium, & non in directum iacentium. An non ſe tangunt in ſuperiori figurâ, recta A E, & perimeter A B? An in directum iacent? An non agnouit ipſe Vallisius, vt ex eius oratione cap. 3. conſtat, eâ voce vſum eſſe Euclidem (conſultò ſcilicet, vt decebat Geometriæ Parentem) quæ cuilibet duarum linearum concurrentiæ, ſiue ſe tantùm tangerent, ſiue ſecarent, æquè conueniret? Eſt nimirum Angulus apud Eucl. Lib. 1. definit. 8. duarum linearum ἁπτομένων κλίσις ſeſe tangentium Inclinatio: vt perperam velint Peletarius, & qui eius partes tuetur, Vallisius, ad Angulum conſtituendum neceſſariam eſſe linearum

 ſectionem,

ſectionem, nec tactum ſolum ad id ſatis eſſe. Quod vt aſſeruerint, poſterior præſertim; qui priorem à Clauio egregiè exceptum non ignorabat; cauſa non potuit non grauiſſima occurriſſe. Quam haud aliam eſſe cenſeo, quàm eam, quam ait Vall. veram & genuinam eſſe, & à priori naturam Anguli contactûs & ſemicirculi demonſtrare. Quænam porrò ea eſſe poteſt, tam occulta, vt Euclidem, cæteróſque eius Alumnos hactenus latuerit, Ecce, eam profert Vall. & quidem non aliam, quàm quæ à Peletario allata fuerat. Eſt autem huiuſmodi.



In Superiori diagrammate linea C D ad alteram A B perpendicularis in puncto E, circa illud immotum conuertatur, donec ad ipſam A B perueniat: tunc nullum ampliùs angulum cum ipſa efficiet, ait Vall. Ergo etiam, infert idem, recta E D per centrum circuli ducta, & eius perimetrum ſecans in A, ſi circa punctum A immotum conuertatur donec ad tangentem E K peruenerit: tunc nullum angulum conſtituet cum (caueat Vall. quid dicturus ſit) cum perimetro A B, inquit: at cum perimetro non coincidit conuerſa E D, ſed cum recta E K? perinde eſt, reſpondet; coincidit enim conuerſa E D cum perimetro B A ſecundùm punctum A. At num etiam obliqua E A per A tranſiens, cum perimetro B A ſecundùm punctum A coincidit? Ergo nullum etiam Anguſum recta E A, vel alia quælibet recta per A tranſiens, cum perimetro B A conſtituet. Idne admiſſurus eſt Vall. Vt admittat porrò neceſſe eſt; ſi quo in in caſu linearum coincidentia ſecundùm punctum ſufficiat ad angulum de medio tollendum; neceſſariáque minimè ſit linearum ipſarum coaleſcentia, qualem exigit eius Argumentum. Ait enim, tunc euaneſcit Angulus in priori figurâ cùm conuerſa recta C D circa punctum E fixum, peruenit ad rectam

ctam A B, & cum ea coaleſcit. Ergo etiam in ſecundâ figurâ euaneſcet Angulus, cùm recta E D conuerſa circa punctum A fixum perueniet ad perimetrum B A, & cum ea coaleſcet (id enim exigit Argumentum hoc à ſimili deductum.) At quandonam recta cum curuâ lineâ coalitura eſt? dicat Vall. tum demum enim & Angulum ſemicirculi recto angulo rectilineo æqualem, & Angulum contactûs nihil eſſe cum ipſo nullus non cenſebit Geometra. En igitur vt hæc allata ſimilitudo *veram eſt genuinam rei cauſam* (cur Angulus contactûs nihil ſit) *contineat, adeóque à priori demonſtret?* Sed paucis adhuc hîc lubet Vallisium conuenire.

Quæro itaque quo ſenſu hæc eius verba poſſint intelligi? *Linea E K ἀκλινῶς ſuper ipſam peripheriam B A S iacet, & cum ipſa coincidit eò vſque dum peripheria ſupponitur eandem inclinationem retinere, quam habuit in ipſo puncto A.* Tum ibidẽ ſubdit. *Ipſius peripheriæ inclinatio quæ in puncto A nulla erat, cùm primùm ab ipſo receſſũ eſt, fit aliqua.* Linea ergo E K recta aliquò vſque cum peripheria conincidit, hoc eſt, non in ſolo puncto A contactûs coincidit, ſed per aliquod ſpatiũ. Ergo per aliquod ſpatiũ rectum curuũ eſt; & curuũ rectum. En in terminis contradictio. Vis aliam? ecce appertiſſimam. *Peripheria B A S coincidit cum rectâ E K eò vſque dum peripheria ſupponitur eandem Inclinationẽ retinere, quã habuit in ipſo puncto A.* Retinet ergo peripheria *eò vſque dum*, id eſt, per aliquod ſpatiũ *quam habuit in ipſo puncto A.* At his quomodo cohærent quæ ferè immediatè ſequuntur. *Ipſius peripheriæ Inclinatio, quæ in puncto A nulla erat.* Eſt ergo aliqua peripheriæ Inclinatio in puncto A; & in puncto A nulla eſt peripheriæ Inclinatio. Quæ duæ Propoſitiones ſibi in terminis contradictoriè opponuntur. Ad hæc. Quæro ex Vallisio quænam poſſit eſſe peripheriæ Inclinatio ad lineam tangentem in ipſo puncto A; quæ aliquò vſque retineri ſupponatur? An ſupponit punctum A partes habere? ſine illis enim Inclinatio nulla eſſe poteſt. At ſi punctum dicatur partes habere; dicatur neceſſe eſt, punctum non eſſe punctum. En ergo tertiam adhuc contradictionem. Denique ecce vt veritatis ſplendor caligine obrui tam denſa nunquam poſſit, quin emicet. Quibus enim apertioribus verbis, vel Clauius, vel Alius quiſpiam Angulorum contactûs, & ſemicirculi Aſſertor vti poſſet ad eorum conſtitutionem; quàm quibus vſus eſt Vallisius? *Peripheria,* inquit, *inclinatio, quæ in puncto A nulla erat, cum primùm ab ipſo receſſum eſt, fit aliqua,* ad lineam videlicet E K tangentem, aut etiam ad diametrum A D: inclinatio enim vnius lineæ non niſi ad alteram haberi dicíque poteſt. Ergo fit Angulus ad punctum concursûs A à peripheria

ria BA & linea tangente EA contentus: quid enim aliud eſt inclinatio aliqua peripheriæ cùm primùm receſſum eſt à puncto A? Rurſus, cùm fiat aliqua peripheriæ inclinatio ad tangentem E A vel ſi mauis à tangente EA declinatio, cùm primùm à puncto A concursûs receſſum eſt: ſequitur neceſſariò contra Vall. Angulũ ſemicirculi DAB eſſe Angulo recto DAE minorem: declinat enim peripheria B A, vt aſſerit Vall. à recta tangente EA, ſtatim vt à puncto A receſsũ eſt. Ergo etiã ex Vall. cùm primùm à puncto A receſſum eſt, fit aliquis peripheriæ B A acceſſus ad diametrum AD: quo acceſſu minuitur Angulus rectus DAE: quo fit vt Angulus DAB ſemicirculi minor euadat Angulo recto DAE. Quo nihil verius, nihil conſultius à Valliſio dici poterat. Sed ecce, vt huic à ſe ſtabilitæ veritati tenebras offundat. Hæc à me ex ipſo ſuprà recitata ſunt verba. *Ego nego peripheriam B A, & rectam tangentem E K ad ſe inclinari ſaltem quoad punctum concurſus A.* Hic omiſſa ſuperiùs obſeruata, quam commiſit Valliſius, contradictione; id ſolùm nunc quæro, quî intelligi poſſit peripheriam B A, & tangentem E K non inclinari quoad punctum concurſus. Enim verò cuius inclinationis punctum A concursûs cum partibus careat, capax eſſe poteſt, vt dicatur in noſtro caſu nullam in eo fieri inclinationem? Ergo in alio aliquo caſu inclinationem aliquam in puncto fieri fatendum foret: ſcilicet fatendum aliquas puncti partes ab aliis eiuſdem puncti partibus abſcedere; aliter enim quæuis inclinatio concipi non poteſt, cum ſit vnius ad alterum. At quodnam tandem puncti genus, iſtud eſſet, quod partes haberet?

Ex his, quæ paulò fuſiùs proſequi libuit eò quòd, vt aiebat Vall. veram & genuinam rei cauſam continerent, & à priori demonſtrarent, cumulatè factum ſatis reor Argumento huic à Pelatario quidem primùm allato, ac deinde à Valliſio repetito: à qua repetitione abſtinuiſſet haud dubiè ſi grauem à Clauio datam aduerſus Peletarium Reſponſionem attentiùs perpendiſſet. Ad alia quædam tranſeo ab eodem propoſita Argumenta.

ARGVMENTVM TERTIVM.

Q*Vo Valliſius Angulum contactûs impugnat.*

Angulum contactûs configere conatus eſt Peletarius petito ex ipſius Euclidis pharetra iaculo: quod idem validiùs torquere fatagit cap. 5. diſquiſitionis ſuæ Valliſius adſcito etiam Archimedis brachio in hunc ergo

ergo ſenſum agit. Si Angulus contactûs quantus eſt, & poſitiuus: ei æqualis, aut etiam minor dari poteſt Angulus rectilineus. Sed hoc abſurdum eſt. Ergo Angulus contactûs quantus non eſt, ſed imaginarius. Minor clara eſt ex Prop. 16. Lib. 3. Elem. quâ conſtat Angulum cõtactûs eſſe omni angulo acuto rectilineo minorem. Maior autem clara eſt, inquiunt, ex Prop. 1. Lib. 10. Euclidis. Nam per hanc Propoſitionem ſi Angulo contactûs, & Angulo rectilineo propoſitis, dematur ſemper, vt demi nihil vetat, ex Angulo rectilineo dimidium, aut pluſquam dimidium; relinquetur tandem Angulus rectilineus maior Angulo contactûs propoſito. Item aſſerit Archimedes Prop. 2. lib. 1. de ſphera & Cylin. *Datis duabus magnitudinibus inæqualibus poſſibile eſſe duas rectas definire: quarum minor ad maiorem, habeat minorem Rationem, quàm habet magnitudo minor ad maiorem.* Itaque propoſitis duobus Angulis inæqualibus Angulo ſcilicet rectilineo maiore, & Angulo contactûs minore, poſſibile eſt duas rectas definire: quarum minor ad maiorem minorem habeat Rationem, quàm Angulus contactûs ad Angulum rectilineum. Sed quam Rationem habet linea minor ad maiorẽ, eandem habere poteſt Angulus quiſpiam rectilineus ad Angulum rectilineum maiorem datum. Hoc enim vt Principium per ſe notum à Geometris paſſim vſurpatur. Quod ſi verum eſt, vt verum eſſe nemo non fatebitur: poterit dari Angulus rectilineus quiſpiam Angulo contactûs minor. Vt enim Angulus rectilineus ad Angulum Rectilineum datum, minorem habeat Rationem, quàm Angulus contactûs ad eundem datum Angulum rectilineum: neceſſe eſt, vt Angulus rectilineus minor ſit Angulo contactûs, per Prop. 8. Lib. 5. Eucl. vt ſcilicet minorem habeat Rationem ad Angulum rectilineum poſitum; quàm ad eundem habet Angulus contactûs. Ecce igitur vt dari poſſit Angulus rectilineus Angulo contactûs, minor. His Euclidis & Archimedis præſidiis fretus Vall. quibus firmiora vix reperias, quaſi de victoria ſibi, ſuóque Peletario parta ſecurus Hoſtem prouocat audaciùs. Quid inquit, Clauius ad hæc? Clauio digna, Valliſi, quæ minùs bene à te percepta, in tui gratiam rurſus adducam: hanc enim difficultatem dilui ſuperiùs Prop. 8. eiuſque Cor. quam momenti non inanis eſſe oportet; cùm ea ſola clariſſimi Geometræ P. Gregorius, & P. Aynſcom perſuaſi à Clauio, ab Euclide, à cæteris magni nominis Geometris deſciuêre.

Reſponſio.

Huic Argumento iam ſuprà, vt proximè memini, reſpondi ex mente Clauij, Prop. ſcilicet 8. Sed ex eo Reſponſioni illi non parua

Ee facta

facta eſt tum lucis, tum firmitatis acceſſio ex Propoſitione 16. eiuſque Corollario. Dixi igitur cum Clauio, & euidenter oſtendi Propoſitionem 1. Lib. 10. Elem. non niſi de magnitudinibus intelligi debere, quæ Rationem inter ſe habere ſunt natæ: quas Eucl. definit. 5. Lib. 5. declarauit: quę ſcilicet multiplicatę ſeſe mutuò ſuperare poſſunt. In cuius aſſertionis fidem conſulendam monui eiuſdem Propoſitionis Libri 10. demonſtrationem, in quâ adhibet Geometra quantitates ſolas, quæ multiplicatæ ſeſe ſuperant; & verò præparationem ad demonſtrandum adhibet; quæ multiplicationem minoris quantitatis ſupponit donec reuerà maior ſuperetur. Vide, quæ ſuprà fuſiùs in hanc rem adduxi Prop. 8. eiuſque Coroll. Quibus addenda ſunt quæ Prop. 16. & Corollario ex eâ deducto declarata, probatáque ſunt nimirum Angulos quoſlibet mixtos, & quàm plurimos ſimpliciter curuilineos; omnes ſcilicet iis exceptis, quos excipi debere docui Prop. 12. qui ſcilicet curuis continentur lineis eiuſdem curuitatis; adeóque Angulis rectilineis ſunt æquales; nullam Rationem ad alium quemquam angulum habere poſſe: non ſolùm quia eorum differentia eſt aliquis Angulus contactûs, vel ad eam per ratiocinationem poteſt adduci vt Prop. 11. factum eſt (quibus in caſibus omnis præſcinditur Rationis modus, per defin. 5. Elem.) Sed etiam quia in Angulis huiuſmodi vel mixtis, vel ſimpliciter curuis curuitatis inæqualis, Inclinatio anomala eſt, & indeterminata; vtpote ſemper minor, quò ad punctum concurſûs propiùs acceditur: quæ indeterminatio Angulos eius generis ad alios quoſuis Rationem aliquam habere non patitur certam & determinatam: quod tamen non obſtat. quin Anguli huiuſmodi alij aliis maiores dici debeant; cùm alij alios includant. Quas porrò Aſſertiones ex verâ definitionum 3. & 5. Libri 5. Euclidis Interpretatione ſuperiùs adductâ, & apertiſſimè probatâ, in ſuperioribus collegi.

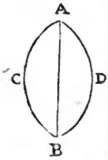
Habes igitur, Vallisi, quàm rectè, & eruditè ſuo more Clauius aſſerat Angulos omnes, etſi homogeneos in genere Anguli, ſiue ſitûs duarum linearum concurrentium; tamen quoad Rationem non eſſe generis eiuſdem omnes. Etſi enim omnes Anguli, vt Rationem aliquam inter ſe habeant, eiuſdem generis quantitatis eſſe debeant, debeant ſcilicet eſſe Anguli iuxta definitionem 3. Libri 5. non tamen ſequitur omnes Angulos Rationem inter ſe habere poſſe iuxta definitionem 5. Lib. 5. quam, vt ſuperiùs iam monui, nemo aſſerat ab Euclide perperam, & abſque neceſſitate definitioni tertiæ adiunctam fuiſſe; ſed vt quantitates eiuſdem generis in duas ſpecies quoad Rationem diſtingueret: quarum vna eas quantitates eiuſdem generis comple

complecteretur, quæ Rationem habere poſſent inter ſe: ad alteram pertinerent quantitates eiuſdem itidem generis, quæ rationem inter ſe habere non poſſent: ad quarum quantitatum ſpeciem (ad quam vix aliæ præter Angulos, quantitates pertineant) Angulos contingentiæ Clauius conſultiſſimè reuocauit, *eoſque diuerſi generis, ſiue ſpeciei quoad Rationem* ab Angulis Rationis capacibus eſſe pronunciauit: non tamen negauit inter eos eſſe poſſe alios aliis maiores, vel minores: ad hoc enim neceſſarium non eſt, quemadmodum neceſſarium eſt ad Rationem aliquam certam conſtituendam, vt quanta vel quanta ſit maioritas, vel minoritas determinetur: quî enim maioritas, vel minoritas illius quantitatis præ aliâ, determinata eſſe poſſit: cuius quantitas ipſa omnem reſpuit determinationem? hæc autem indeterminatio oritur, vt ſuprà cum ſententiam P. Aynſcom expenderem Prop. 16. ex anomalâ arcûs ad rectam lineam, vel alium arcum curuitatis inæqualis, inclinatione, ſiue vario & indeterminato ſingularum partium æqualiter à concurſu diſſitarum receſſu ab inuicem.

Quid igitur tam multis diſſeruit Valliſius cap. 5. 6. 7. vt contra Clauium probaret Angulos tam contingentiæ, quàm alios quoſcunque mixtos, aut curuilineos eiuſdem generis eſſe ſecundùm quantitatem (id enim vnum omnia ad vnum eius probant Argumenta) cùm id fatentem haberet Authorem grauiſſimum. Probatum oportebat eos Angulos eiuſdem eſſe generis *ſecundùm Rationem*, quod negauerat Clauius iuxta mentem Euclidis definit. 5. Lib. 5. eiuſque Interpretum omnium: quorum communis conſenſus, & in primis erga Euclidem obſeruantia deterrere debuerat à graui illa in tantum Geometriæ Parentem, eiuſque cultores ferenda cenſura, quam ad calcem capitis 8. pronunciat, & à Sauilio aliàs conceptam refert: quem ait *ſenſiſſe definitionem 3. & 5. Libri 5. irreconciliabiles eſſe.* Tum ſubiungit dignam eo Iudice ſententiam. *Et quidem ego idem prorſus ſentio* (cum Sauilio ſcilicet) *nempe ſi ſtatuatur Angulum contactûs veram Anguli quantitatem habere* (id porrò ſtatuit idem Euclides vt euidenter ſuprà Prop. 6. declaratum eſt) *definitiones illas duas ſimul veras eſſe non poſſe. At ſi concedatur Angulum illum, Angulum eſſe tantùm imaginarium: neque inter ſe pugnabunt illa duæ definitiones; neque cum Propoſitione 16. Libri 3 Elem. neque cum 1. Libri 10. aut cum aliâ quauis, quam vel apud Euclidem, vel Archimedem vel alios vſpiam extare, ſcio.* Sic tamen habeto, Vallisi, neque tibi contra Euclidem, & apertam veritatem conceſſum iri à Geometriæ ſcholâ, Angulum contactûs eſſe imaginarium; neque propterea deſinere veriſſimas eſſe definitiones illas tertiam, & quin-

tam Libri 5. Elem. neque, vel ſecum ambas, aut cum Prop. 16. Lib. 3. aut cum 1. Lib. 10. aut aliâ quauis apud Euclidem, vel Archimedem pugnaturas.

Ad illud verò, quod ex Prop. 2. Lib. 1. de ſphærâ & Cylin. petitur Argumentum, quid reponi debeat; ex dictis poteſt facilè colligi. Archimedes enim, non ſecùs quàm Euclides, vt ex ipſis verbis patet, de quantitatibus loquitur: quæ Rationem inter ſe habere poſſunt: quæ ſcilicet iuxta celebrem illam definitionem 5. Lib. 5. Elem. multiplicatæ ſeſe poſſunt ſuperare, vel quarum quantitas determinata eſt quoad Rationem. Quod nec Angulis contactûs, nec cæteris, quos deſignaui, conuenire poteſt. Obiicit demum Vall. cap. 4. ſint duo eiuſdem circuli quæcunque ſegmenta æqualia communi lineæ A B adiacentia, & angulum curuilineum C A D conſtituentia. Quid clariùs quàm hunc Angulum C A D Rationem habere duplam ad Angulum mixtum C A B ſegmenti, & ſi arcûs C A ad lineam rectam A B inclinatio anomala ſit, & indeterminata? Quod idem in aliis Angulis multis obſeruare eſt. Ergo malè ius Rationem aliquam habendi, ſaltem duplam, denegatur Angulis omnibus mixtilineis, & Angulis quibuſcunque curuilineis, quos cõtinent lineæ curuæ curuitatis inæqualis.



Reſpondeo Angulum curuilineum C A D ad Angulum C A B ſegmenti, eodem nomine Rationem habere duplam: quo tres Anguli Angulo C A B æquales, ad eundem C A B Rationem habent triplam; & quatuor, quadruplam &c. Tres autem Anguli ita Rationem haberent triplam ad eorum vnum, non vt ſunt quantitas vna continua, ſed vt ſunt Entia tria, ſeu tres vnitates diſtinctæ, quæ ad ens vnum, ſiue vnitatem Rationem habent triplam, vt numerus ſcilicet 3. ad 1. Quæ Ratio pertinet ad quantitatem diſcretam aptam numerare quaſcunque vnitates quarumlibet Entitatum, quæ materiale tantùm ſunt numeri. Atque ita Angulus C A D dicetur Rationem habere duplam ad Angulum C A B: vt in abſtracto numerus 2. ad 1. Rationem habet duplam. Eſt enim per accidens, quòd duorum ſegmentorum Anguli C A B, D A B ita poſſint ſibi mutuò applicari, vt vnicum Angulum C A D conſtituant: ſi enim ex natura ſua, & vt eſt Angulus, Rationem duplam haberet Angulus C A D ad Angulum C A B; alius angulus ad eundem habere poſſet eodem iure triplam, quadruplam, aut quamcunque aliam.

Ex

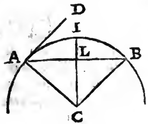
Ex dictis igitur habetur vera ſolutio Argumenti ex Euclide & Archimede petiti contra Angulos nullius Rationis capaces: quod quidem Ego, vt ſuprà monui, in hac materia potiſſimum cenſeo nihilominùs alia quædam ab eodem Valliſio adducta non omittam in maiorem eorum, quæ hactenus deduxi, confirmationem.

ARGVMENTVM QVARTVM.

A *Valliſio excogitatum aduerſus Angulum contactûs.*

Argumentum hoc proponit Vall. cap. 12. ſuæ Anguli contactûs diſquiſitionis in hunc omnino ſenſum paucioribus, nec paulò clarioribus comprehenſum.

Quod eſt omni poſitiuâ quantitate minus, illud eſt non quantum. Sed Angulus contactûs eſt omni poſitiuo Angulo minor. Ergo Angulus contactûs non eſt quantus, hoc eſt, imaginarius ſolùm eſt, merúmque ac purum nihil. Maior tam vera eſt, quàm veræ ſunt demonſtrationes innumeræ, quæ tum ab Euclide Lib. 12. tum paſſim ab Archimede Lib. de dimenſione circuli, de Quadratura Parabolæ, & alibi, tum ab aliis per exhauſtiones inſtitui ſolent. Hoc ſiquidem demonſtrationum genus ex eo totam concludendi vim habet: quòd Polygonorum tam inſcriptorum circulo, aut aliis figuris quàm circumſcriptorum differentia à circulo, aliiſve figuris minor eſt quauis propoſita quantitate. Hinc enim fit, vt ea differentia quanta non ſit, adeóque nihil: quo poſito colligitur circulus (idem de reliquis figuris eſto iudicium) eſſe æqualis alteri figuræ, vt triangulo rectangulo à radio & perimetro circulari, comprehenſo. Minor ergo tantùm probanda ſupereſt, nempe Angulum contactûs omni poſitiuo Angulo eſſe minorem. En quomodo id probet Vall. Angulus contactûs eſt differentia Anguli recti ab Angulo ſemicirculi. Sed hæc differentia eſt omni poſitiuo angulo minor. Ergo Angulus contactûs eſt omni poſitiuo Angulo minor. Per ſe patet maior. Minor ergo probatur. Sit Polygoni cuiuſdam circulo inſcripti latûs AB: quod bifariam per diametrum, atque adeò ad Angulos

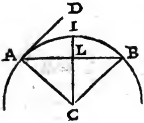


rectos ſecetur in L; iungatúrque radius CA. Ergo Angulus CAL

 erit

erit recto minor, eiuſque à recto differentia erit Angulus A C L. Quo fit, vt Angulus C A L eò magis accedat ad rectum, quò Angulus A C L fuerit minor. Si igitur concipiatur circulo inſcribi Polygonum laterum infinitorum: erit Angulus L C A infinitè paruus: qui cùm ſit differentia Anguli C A L ab Angulo recto C L A: differet Angulus C A L in eo caſu ab Angulo recto C L A, ſiue C A D (ponitur enim A D circulum tangere) Angulo infinitè paruo, iſque eſt Angulus L A D hic enim æqualis eſt Angulo L C A. Ergo ſi tunc Angulus L A D infinitè paruus eſt; multò potiori iure infinitè paruus erit Angulus contactûs I A D. Sed quod infinitè paruum eſt, hoc quantum non eſt, ſiue nihil eſt. Quòd ſi Angulus contactûs I A D nihil eſt. Ergo Angulus C A I ſemicirculi rectus eſt: ſi enim ab Angulus recto C A D nihil dematur, vt nihil demitur, cùm Angulus contactûs I A D demitur haud dubium quin permaneat integer Angulus rectus. Is autem eſt Angulus ſemicirculi C A I. Ergo Angulus ſemicirculi rectus eſt.

Hæc eſt Vallifij ratiocinatio, & quidem haud paulò planiùs propoſita: eius enim vis tota pendet ex perpetua duorum angulorum L C A, L A D æqualitate; de qua tamen apud Ipſum nulla fit mentio. Hanc porrò ratiocinationem ſuam multis confirmare conatur Vall. ſed paris ſunt omnes eius confirmationes ponderis. Hoc eſt, nullius, aut minimi: parum certè Geometriam ſapiunt: vt ex ea ſola, quam proximè retuli, coniicere licet. Quod paulò diſtinctiùs declarandum eſt. Itaque.



Reſponſio.

In primis vix bene percipio, quo ſenſu maior illa Propoſitio Intelligi poſſit. *Quod omni poſitiua quantitate minus eſt*, Argumentatur Vall. *Illud quantum non eſt.* Si quid enim altero minus eſt, aliquid eſt: & quidem eodem iure, quo alterum, quod quod maius dicitur. Neque enim maius quidquam altero realiter eſt, quin realiter exiſtat minus. Videat ergo Vall. num ſe ipſos deſtruant enunciationis illius termini. Verùm ne huic examinandæ Propoſitioni immoremur, admittamus tanquam Geometricas, vt Geometricæ omnino ſunt, omnes illas ſummorum Geometrarum demonſtrationes, quæ per exhauſtiones abſoluuntur; & ſimul admittamus in eâ Argumentandi per exhauſtiones methodo nullam

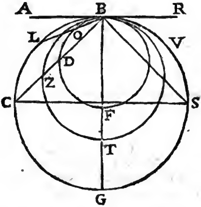
quantita

quantitatem aſſignari poſſe, quâ poſitâ abſurdum non ſequatur; ex quo legitimè concludatur nullam ab Aduerſario aſſignari debere (quæ fuit Vallisij mens, etſi paulò minùs bene enunciata) atque adeò ab eo admitti tanquam verum; quod ab Argumentante aſſeritur. Hac ergo Propoſitione maiore iuxta debitum ſenſum admiſsâ, minorem perpendamus.

Hæc autem eſt minor illa Propoſitio. *Sed Angulus contactûs eſt omni poſitiuo Angulo minor.* Si aliud nihil velit Vall. quàm quod voluit & demonſtrauit Eucl. Prop. 16. Lib. 3. nimirũ Angulum contactûs eſſe omni poſitiuo Angulo rectilineo minorem: id quidem non ſecùs quàm Euclidi, concedi Vallisio debet. Attamen ex eo concludi non poteſt, Angulum contactûs nihil eſſe: niſi probet Vall. nullum alium Angulum præter rectilineum, aut rectilineo maiorem, atque adeò nullum Angulum contactûs dari poſſe. At hoc in quæſtione verſatur ex conceſſione, & animi tantùm gratiâ: cùm ex Euclide ipſo conſtet Angulos contactûs & dari, & eſſe quouis rectilineo minores, imò & inter ſe inæquales. Tunc igitur ad Principiũ recurreret Vall. & Angulum contactûs non quantum, ſiue nihil eſſe aſſereret. Ex eo quòd nec quantus, nec aliquid eſt. Ad hæc cùm idem in hæc verba loquatur, *ſed Angulus contactûs eſt omni poſitiuo Angulo minor.* Meritò cenſeatur Angulos omnes contactûs ſupponere eſſe æquales: quod nemo ipſi ſine probatione concedat: imò quod nemo ipſi non oſtendat eſſe falſum. Quare, etſi Angulus contactûs quilibet omni Angulo rectilineo ſit minor; non tamen propterea omni poſitiuo Angulo eſt minor: erit enim oblatus quilibet Angulus contactûs, vt minor infinitis contactûs Angulis; ita aliis eiuſdẽ generis infinitis Angulis erit maior. Vnde aſſerere nunquã licebit quempiam Angulum contactûs eò paruitatis deueniſſe, vt omni poſitiuo Angulo dicatur minor. Quod ſi per impoſſibile ſupponatur dari poſſe Angulum omni poſitiuo Angulo minorem: non ſtatim tamen ſequeretur non eſſe Angulum, vel non quantum, aut nihil.

Iam verò ſi probationes attendamus, quas idem Author adhibet ad Angulum contactûs è rerum naturâ abolendum, & ad ſpatia Imaginaria cum chymæris amandandum; nihil obſeruari poteſt debilius, nihil quod Geometriam ſapiat minùs. Ecce enim vt paulò antè ratiocinantem audiuimus. *Si cenſeatur Polygonum circulo A I B inſcribi infinitorum laterum; Angulus L C A* (ductâ ſemidiametro C A ad lateris illius terminum A, ad cuius medium L ducitur C L (id enim ita exigit eius ſuppoſitio) *erit infinitè paruus, hoc eſt, inquit, nihil, & non quantus: Ergo etiam Angulus L A D, Angulo L C A æqualis, non eſt quantus*

tus futurus, ſed merum nihil. Ergo multò magis Angulus contactûs I A D minor Angulo L A D non quantus futurus eſt. Sed attende amabo, Valliſi, dum ſupponis Polygonum laterum infinitorum circulo inſcribi, eáne latera non quanta, an quanta eſſe cenſes? ſi quanta eſſe non vis: cùm ſimul euaneſcant omnes Anguli cum ſuis lateribus, ad quid mentionem infers Angulorum L C A, L A D, I A D; Tunc enim euaneſcit recta L A; & C A cum C L congruit; & A D tangit circulum in I. Quòd ſi ſingulis illis lateribus multitudine infinitis aliquam tribuas quantitatem: vide ſis primò ne tua à temetipſo deſtruantur Principia; qui aſſerueris, quod infinitè paruum eſt, eſſe perinde non quantum. Deinde quî negabis duas lineas L C, A C tantùm in puncto C coëuntes Angulum non continere etſi infinitè paruum, cui ſit æqualis Angulus L A D? quo poſito etiam Angulus contactûs I A D, quantus futurus eſt, non autem nihil. Neque enim tibi primo conceſſum iri ſine aliâ probatione, quàm quod ita tu ſentias, æſtimare debes, infinitum nihil vel magnitudine, vel paruitate dari poſſe: quo tibi non conceſſo Principio, cuius momenti futura eſt hæc tua tota contra Angulum contactûs Argumentatio?



Atque hæc plusquàm ſatis ad hoc Valliſij diſſoluendum Argumentum. Verùm non nihil ſupereſt circa quaſdam quas adducit, eius confirmationes obſeruandum; ne quid queratur obſeruatione dignum prætermiſſum. Quid porrò illud eſt? Ecce vt num. 5. cap. 12. ratiocinatur (eius vtar verbis, ne quid ſibi imponi queri poſſit, meo tamen ſchemate.)

Subiungam, inquit, *huic Argumento etiam hanc ſpeculationem non abſimilis naturæ. Si Angulus contactûs A B L ſit verè Angulus, tunc & reſiduus L B R ad duos rectos erit verè Angulus, neque erit recta R B in directum poſita cum peripheriâ B L C; ſicut nec recta A B cum peripheriâ B V S. At hoc conceſſo multò magis dicendum eſſet* (ô Argumentum omni Achillæo grauius!) *duas peripherias C L B, S V B Angulum continere. Quòd ſi L B V non ſit Angulus, ſed ſit vna linea continuata, & in directum poſita, prout concedi ſolet ab omnibus: neque erit A B V S*

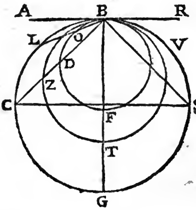
aut R B L C Angulus, ſed potiùs linea in directum poſita : & conſequenter, neque A B L C neque R B V S Angulus erit; ſed potius lineæ coincidentes, quantum ſcilicet ad ipſum punctum contactûs attinet. Hæc ille. Ex quibus corollarium deducit, cui par in totâ Geometriâ non reperiatur : Ecce.

Atque hinc obiter diſcere licet, quo pacto duæ diſſimiles lineæ putà curua & recta, vel peripheria & parabola, quænam præterea? *vel etiam peripheria maioris & minoris circuli*, hæne tantùm? *aut etiam conuexa & concaua*, perge? &c. id eſt, recta B R cum duabus ſimul peripheriis B L C, B O D maioris,& minoris circuli. Id eſt peripheria S V B cum iiſdem duabus ſimul peripheriis B L C, B O D & cætera huiuſmodi. *Quo pacto*, inquit, *huiuſmodi lineæ continuari poſſint*. Sed heus tu, Vallisi, quàm diſpar eſt hæc tua Anguli contactûs ſpeculatio ab iis, quas vel in Infinitorum, vt vocas, Arithmeticâ, vel in ſectionibus conicis inſtituiſti: cóne vel in Peletarium ſtudium, vel in Clauium odium te abduxit, vt & tui obliuiſcerere, & veritatis. Et in quod Abſurdorum barathrum te demerſit pertinax illa tua contentio. Vis lineam curuam lineæ rectæ in directum eſſe poſitam; ſiue eodem, quo ceperat, ductu continuari. Vis etiam Peripheriam circuli maioris peripheriæ circuli minoris eſſe in directum: eſt ergo peripheria vnius circuli, vt in ſchemate, peripheria S V B, duabus peripheriis B L C, B O D, imò infinitis, in directum. Quod adeò abſurdum cùm ſit: vereor ne tu aliter quàm Euclides Lib. 1. Prop. 14. vel Lib. 6. Prop. 32. vocem illam *in directum* accipias. Ipſe videris. Eam certè in eum ſenſum tum Euclides, tum eius Interpretes accipiunt: vt ſi duarum linearum altera, vel vtraque vltra punctum, in quo iam conuenerunt, ſeſéque mutuò tangunt, producatur; coaleſcat in vnam vtraque ſecundùm omnes partes. Ita recta in rectam incurrens è directo in directum eſt: ita peripheria circuli in ſolam eiuſdem circuli Peripheriam in directum eſſe poteſt: vt non malè directionem illam duarum ſibi incurrentium linearum ita explicent: vt in concurſûs puncto (nota Vallisi) nullam habeant ad ſe inuicem Inclinationem, hoc eſt, Angulum nullum conſtituant: conſtituant verò aliquem, ſiue Inclinationem aliquam ad inuicem obſeruent; ſi productæ, non in eandem lineam coaleſcant; ſed à ſe abſcedant poſt contactum, vel ſectionem, & alíorſum digrediantur.

Vnde apparet quanti ponderis cenſeri debeat Argumentum à Vallisio propoſitum contra Angulum contactûs. *Peripheria L B in peripheriam B V eiuſdem circuli incurrens in directum ipſi iacet, nec vllum angulum conſtituit, eò quòd arcus L B productus cum arcu B V coincidit, eíque immergitur.*

Digitized by Google

gitur. Ergo inquit, *multò minùs idem arcus L B cum recta linea B R, angulum conſtituet, & inclinationem habebit.* Quid? Arcus LB vltra B productus, an quemadmodum cum arcu B V coaleſcit; ita etiam coaleſcit cum rectâ B R, ipſique eſt in directum poſitus, vt cum ipſa Angulum non conſtituat? conſtituit omnino, & tamen cum arcu B V non conſtituit. Quod adeò verum eſt, vt non tantùm arcus vnius circuli in eiuſdem arcum incurrens non habeat aliquam inclinationem; ſed nec etiam arcus Ellipſis, aut (quod mirum magis eſt ob flexum magis irregularem) arcus Parabolæ, aut hyperbolæ cum arcu eiuſdem Ellipſis, Parabolæ, aut hyperbolæ ex aduerſo occurrentium, Angulum conſtituat, aut inclinationem habeat: vtrínque enim producti arcus harum trium conicarum ſectionum licèt curuitatis inæqualis, non ſecùs quàm duo arcus circuli eiuſdem, coaleſcunt, ſibíque in directum ſunt poſiti.



Aliam addit idem Author cap. 12. num. 6. Argumenti ſuperioris confirmationem, cuius idem eſt cum cæteris pondus, ad probandum Angulum ſemicirculi eſſe æqualem Angulo recto rectilineo. Quæ ſic habet. *Notum eſt*, inquit, *aream figuræ regularis laterum quotcunque æqualem eſſe rectangulo: quod ſemiperimetro, & rectâ à centro figuræ ad perimetrum perpendiculari* (ad latus, inquam, aliquod Polygoni perpendiculari; neque enim ad omnia ſimul latera, quibus conſtat perimeter Polygoni, vlla linea à centro poteſt eſſe perpendicularis) *continetur. At idem oſtendit Archimedes Prop. 1. de dimenſione circuli, de circulo: nempe aream circuli æqualem eſſe rectangulo ſub radio, & ſemiperipheria. Eſt igitur Radius ad peripheriam perpendicularis: ſiue ad Angulos rectos rectis lineis æquales. Ergo Angulus C L B G ſemicirculi rectus, eſt recto Angulo A B G æqualis. Ergo Angulus A B L C contactûs, nec quantus, nec aliquid eſt.*

Admitto aream figuræ, ſiue Polygoni cuiuſcunque regularis, æqualem eſſe Rectangulo, quod ſemiperimeter Polygoni, & linea à centro eiuſdem Polygoni ad vnum aliquod eius latus perpendicularis continent. Admitto etiam aream circuli æqualem eſſe rectangulo, quod

continent

continent radius circuli, eiuſque ſemiperimeter: ſed ex his ita admiſſis, nequaquam ſuadebit Valliſius, admittendum eſſe Angulum ſemicirculi eſſe Angulo recto rectilineo æqualem. Vnde enim & quomodo hoc ex illis præcognitis, & præſuppoſitis concluditur. Rectangulum conſtituo ex radio, & rectâ lineâ, quæ ſit ſemiperipheriæ circuli æqualis, æquale circulo. Quid ad hoc confert Angulus ſemicirculi? Quæ mentionem illius faciendi neceſſitas? concipi fortaſſe vult circulum (neque enim alia occurit connexio inter Antecedens & ab eo deductum conſequens) quaſi Polygonum, vt radius à centro ductus ad vnum aliquod eius latus ſit perpendicularis. At huiuſmodi ſuppoſitio primùm foret abſurdiſſima: circulus enim nec lateribus conſtat, nec angulis. Deinde Radius à centro ductus ad circulum nequaquam eſſet ad peripheriam perpendicularis; ſicut nec ad perimetrum totam Polygoni regularis, perpendicularis eſt recta à centro ad vnum aliquod eius latus perpendiculariter ducta: ſed tantùm ad hoc vnum eius latus; ad reliqua verò eius latera, ea recta foret obliqua adeò vt ex eâ circuli & polygoni ſimilitudine (quâ ſolâ vt medio vti poteſt Vall. ad concluſionem ſuam inferendam, cùm alia nulla ſit inter eam & Præmiſſas connexio) liceat apertè colligere Angulum ſemicirculi non eſſe rectum. Quo porrò modo? Ecce. Linea à centro Polygoni regularis ad vnum eius latus ducta perpendicularis, ad latera duo hinc, inde lateri illi adiuncta, non eſt perpendicularis; ſed obliqua, idque ſemper in infinitum continget, quò plura fuerint Polygoni latera, donec tandem Polygonum euaſerit in circulum (probabit, opinor, Valliſius hanc raciocinandi methodum, cùm nulla alia ei ſit magis familiaris) tunc autem ſi ad peripheriam ducatur radius circuli; nequaquam is futurus eſt ad partes proximas, ſibique adhærentes perpendicularis: hæ enim inflectuntur vtrinque, vt inflecti ſolent cuiuſuis Polygoni latera duo, medium latus cui adhærent, obſidentia. At in circulo nullum eſt latus, inquies, ad quod radius ducatur perpendicularis? fateor, ſunt tamen partes circulares, & inflexæ, ſeu conuergentes hinc inde à Radio poſitæ; ad quas non poteſt radius ille eſſe perpendicularis. Quod quidem debet Valliſius admittere: cùm, vt ſuprà retuli ex capite 4. ſuæ diſquiſ. aſſeruerit *Inclinationem peripheriæ & lineæ Tangentis, quæ in puncto concurſûs nulla erat, cum primùm ab eo puncto receſſum eſt, aliquam fieri.* Si enim ſit aliqua inclinatio peripheriæ & lineæ Tangentis, hoc eſt, peripheria à Tangente diuergit; cùm primum à puncto concursûs, in quo radius à centro circuli ductus cum Tangente rectos Angulos conſtituit, receſſum eſt: fatendum ne-

ceſſariò eſt peripheriam cum primùm à concurſu receſſum eſt, ad radium illum, ſiue circuli diametrum acceſſiſſe tanto ſpatio, quanto à tangente receſſit. Ergo diameter cum peripheriâ Angulos rectos contrà quàm ſentiat Vall. non conſtituit: niſi fortè idem velit abſurditates hactenus notatas hac nouâ cæteris non minore cumulare: vt dicat radium ſiue diametrum circuli rectum Angulum conſtituere cum ipſo ſolo præcisè puncto peripheriæ, nullâ eius partium curuarum puncto adhærentium ratione habitâ. Quod quidem vltro, vt opinor, admiſſurus eſt; vt pote qui aſſeruerit (vt ſuperiùs annotaui, & cuilibet eius hunc tractatum legenti, promptum eſt obſeruare) in ipſo puncto concursûs lineæ rectæ peripheriam tangentis, vel duorum ſeſe tangentum circulorum, & non vltra illud Angulum conſtitui. Quod cap. 11. manifeſtiſſimum eſt, ſic enim illic habetur. *Non enim magnitudo Anguli* (duorum ſcilicet ſeſe tangentium circulorum) *æſtimanda eſt ex eâ, quam habent crura diuaricatione extra punctum concurſûs: ſed ex eâ quam habent in ipſo concurſûs puncto.* Alia ſunt in hoc tractatu loca huic non abſimilia. Quæ omnia abſurditatem non vulgarem continent, vt patet: quæ enim diuaricatio in puncto, cuius nullæ ſunt partes, concipi poteſt? Attamen aut illud admittat neceſſe eſt, vt radium circuli ad pheripheriam Angulos rectos rectis Angulis rectilineis æquales conſtituere dici poſſit; aut oppoſitum concedat, nempe radium cum peripheriâ Angulos recto minores efficere; dum peripheria, cum primùm à concurſu, vt idem ait, receſſum eſt, aliquam inclinationem cum tangente obtinet, atque adeò ad radium, ſiue diametrum acceſſit: eâque approximatione Angulus diametri cum peripheriâ, qui eſt Angulus ſemicirculi, recto minor effectus eſt. Vnde patet quanti ſit roboris hoc Argumentum ad angulum ſemicirculi recto rectilineo æqualem, & conſequenter Angulum contactûs non quantum concludendum. Sed videamus, ſi quid melius, & Geometriâ magis dignum, excutiendum ſuperſit.

ARGVMENTVM QVINTVM.

Q*Vo Angulum contactûs adoritur Valliſius.*

Ego quidem, inquit Valliſius cap. 9. *Omnino non video quo pacto figuræ ſimiles, dici poſſunt, niſi & latera homologa habeant proportionalia, & ſimiliter ſita. At quonam pacto, quæ Angulos inæquales faciunt, adeóque inæquales*

inæquales habent ad Inuicem inclinationes, interim ſimiliter ſita dicantur, ego prorſus non intelligo.

Hanc ſuam ſententiam tum citato cap. tum duobus ſequentibus 10. & 11. multis confirmat: ſed quæ omnia ſapiunt illam eius ratiocinandi methodum; quâ, quæ vnius quantitatis ſunt propria, ea in aliam transfert, in quam euaſiſſe, aut, vt ipſe loquitur, euanuiſſe videtur. Ita, inquit, circulus circulo ſimilis eſt: quia ſi vtrique circulo Polygona ſimilia plurium, & plurium in infinitum laterum inſcribantur; tandem in circulos deſinent: qui erunt Polygona laterum infinitorum: Quo fit, vt quemadmodum Polygona illa omnia, cum ſint ſimilia, latera habent proportionalia circa æquales Angulos: ita circuli ipſi, aut ſemicirculi inæquales, aut circulorum inæqualium ſegmenta ſimilia, latera etiam habent proportionalia, & Angulos lateribus proportionalibus contentos, æquales. Anguli ergo omnes ſemicirculorum quorumcunque ſunt æquales, ſicut & Anguli ſimilium omnium ſegmentorum. Quod ſi ita eſt: eâdem methodo Vall. concludere licebit (quanquam id minimè præſtiterit) omnes Angulos ſemicirculorum eſſe rectos. Si enim in ſchemate Propoſitionis 11. vel 12. concipiantur deſcribi circuli maiores in infinitum ſeſe tangentes in B; euaneſcent illi tandem in circulum infinitum, hoc eſt, in lineam rectam A R tangentem in B circulos; ad quam eorum diameter communis, eſt perpendicularis. Alia non pauca, quæ ad hanc Angulorum curuilineorum æqualitatem probandam congerit Vall. citatis capit. cùm non niſi ex congruentiis, ſiue conuenientiis quibuſdam, & deſinentiis ſuis hauriant firmitatem, lubens prætermitto, vt à Geometriâ perquam aliena.

Reſponſio.

Agnouit, fatetúrque Valliſius Euclidem aliter ſimilia ſegmenta circulorum, aliter figuras rectilineas ſimiles definiuiſſe. Has Lib. 6. definit. 1. ait eſſe, *quæ & Angulos ſingulos ſingulis æquales habent, atque latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.* Illa verò Lib. 3. definit. 10. aſſerit eſſe *Quæ Angulos capiunt æquales.* Quærerem à Valliſio, niſi, vt perſpicax eſt, ipſe ſibi obieciſſet. Cur Euclides figuras ſimiles rectilineas à curuilineis diſtinxit, dum vtraſque definiuit? Cur Angulorum, quibus conſtant rectilineæ mentionem fecit, & Angulos curuilinearum ſilentio prætermiſit? Aliquid ſanè diſcriminis inſignis inter vtriuſque huius generis figuras oportuit Geometram obſeruaſſe: quo vt eſſentiâ, ita & definitione diſcrepare deberent. Ait Valliſius Euclidem ſegmenta ſimilia per Angulos, quos capiunt, potiùs

Ff 3 quàm

quàm per Angulos, quos eorum arcus & ſubtenſa continent, definiuiſſe. *Non quaſi ſimilium ſegmentorum Anguli eſſent inæquales: ſed quoniam, vbi poſtea de ſimilitudine ſegmentorum agendum eſſet, facilius eſſet quantitatem Anguli in ſegmento, quàm Anguli ſegmenti demonſtrare* num aliud aliquid ſpectaſſe oportuit Euclidem, dum diuerſas haſce duas definitiones tradidit? ſpectauit omnino. Neque enim Author oculatiſſimus definitionem ſuam primam Libri 6. ad ſolas reſtrinxiſſet figuras rectilineas, ſi eadem vllo modo ad curuilineas pertinere potuiſſet; ne ſcilicet definitum definitione latiùs pateret, non ſine vitio graui, quod in magnos illos ſcientiarum Parentes haud quaquam cadere poterat. Etſi non negem allatas interdum ab Euclide minùs eſſentiales definitiones, cùm poſſet magis proprias exhibere: quia ad ea, quæ tractaturus erat, has, quàm illas, minùs accommodatas eſſe cernebat; ita tamen, vt altera alteram non excluderet: ſed vtraque, ſi luberet, eidem definito poſſet applicari. Id ab eo accuratè obſeruatum euidenter cerni poteſt definit. 6. Lib. 5. & definit. 10. Lib. 7. In priore ſiquidem definitione declarat quænam magnitudines dici debeant proportionales his verbis. *In eâdem Ratione magnitudines dicuntur eſſe prima ad ſecundam, & tertia ad quartam; cùm primæ & tertiæ æquè multiplicia à ſecundæ & quartæ æquemultiplicibus, vtrumq; ab vtroque, vel vnà deficiunt, vel vnà æqualia ſunt, vel vnà excedunt.* Quanquam autem aliam numerorum proportionalium magis propriam definitionem, quam diſcretæ quantitatis natura ei ſubminiſtrabat, eſſet traditurus: hanc ſcilicet. *Numeri proportionales ſunt, cùm primus ſecundi, & tertius quarti æquè multiplex eſt, vel eadem pars, vel eadem partes.* Non tamen diſcretam quantitatem in illâ excluſit; cùm tam diſcretæ, quàm continuæ quantitati conueniret: nec, ſi excluſiſſet, vitio caruiſſet illa definitio, eò quòd ipſo definito fuiſſet anguſtior. In noſtro pariter caſu, nequaquam Eucl. ſimilitudinem planarum figurarum definiturus definit. 1. Lib. 6. Rectilinearum tantùm figurarum mentionem feciſſet excluſis curuilineis; ſi æquè curuilineis, ac rectilineis eam conuenire poſſe ſenſiſſet: ſenſiſſet nimirum figuras omnes planas tam curuilineas, quàm rectilineas eſſe ſimiles: *quæ & Angulos ſingulos ſingulis æquales habent; & ſingula latera circum æquales angulos proportionalia:* quamuis ſingulari definitione nempe 10. Lib. 3. ſegmenta circuli ſimilia explicuiſſet. Vnde vel ex eo (alia enim ſunt eiuſdem in hanc ſententiam teſtimonia, quæ fruſtra pluribus proſequamur) apertè patet Geometram Angulos ſimilium ſegmentorum inæqualium inæquales eſſe ſuppoſuiſſe: quod non leuiter confirmatur ex eo, quòd reuera ſegmentorum

torum

torum ſingula latera tam duo recta, quàm duo circularia, quibus anguli ſegmentorum continentur, ſunt proportionalia, vt promptum foret demonſtrare: adeò vt per ſolos Angulos ſtet, non autem per latera, quo minùs definitio illa prima Libri 6. ſegmentis ſimilibus conuenire poſſit, eò quòd æquales eſſe nequeant Anguli.

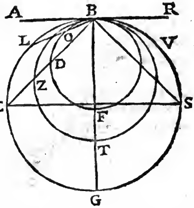
Nolim hìc ad hanc Angulorum ſegmentorum ſimilium inæqualitatem probandam Principium illud 8. Lib. 1. Elem. afferre, quo euidentius eſt nullum. Quæ ſibi mutuò congruunt, ſunt æqualia; inæqualia ergo, quæ ſibi ſecundùm omnes partes ſuperpoſita (multa enim ſunt æqualia, quæ propter figuram ſuperponi apta non ſunt) non congruunt: ergo Anguli ſegmentorum ſimilium, quorum minus maiori totum ſuperponi poteſt eodem modo, quo ſemicirculus minor maiori, vt patet in ſchemate Propoſitionis 11. in quo duo ſegmenta B L C, B O D ſimilia ſunt, & minus totum maiori ſuperponitur; inæquales eſſe demonſtrantur conſule Prop. 6. quæ & ipſa ad hoc apprimè facit.

At Valliſius *omnino non videt quo pacto figuræ ſimiles dici poſſunt, niſi & latera homologa habeant proportionalia, & ſimiliter ſita.* Neque Ego quidem id video, neque alium quenquam videre poſſe reor: figurarum enim ſimilitudo, & partium proportionem, & ſitum earundem partium inter ſe, & ad totum exigit ſimilem. At quod ſubdit *ſe prorſus non intelligere quonam pacto, quæ angulos inæquales faciunt, adeóque inclinationes inæquales habent ad inuicem, ſimiliter ſita dicantur*; neque quiſpiam prorſus intelliget, vbi de rectilinearum figurarum tantùm agetur ſimilitudine. Verùm, ſi de figuris curuilineis ſimilibus habeatur quæſtio, non paulò aliter nemo ſentiet cùm anomala ſit arcus ad ſuam ſubtenſam inclinatio, tótque ſint inclinationes diuerſæ, quot ſunt diuerſa puncta arcûs ſubtenſi, vt fusè in ſuperioribus eſt declaratum: non mirum ſi ad duorum ſegmentorum ſimilitudinem non requiratur irregularis huiuſmodi inclinationis æqualitas, niſi quatenus irregularitas illa ad regularitatem reduci poteſt ope linearum rectarum & angulorum rectilineorum. Vt ecce in diagrammate iam ſæpius adhibito, certum eſt lineam B C à puncto B in quo duo circuli B L C, B O D ſe tangunt, eductam abſcindere ex illis circulis ſegmenta ſimilia: quorum proinde puncta omnia non tantùm in arcubus B L C, B O D aſſignata; ſed etiam intra vel extra eadem ſegmenta, aſſumpta, eundem in vtroque ſegmento ſitum, ſiue poſitionem occupant. Exempli gratiâ, ductâ rectâ B L, arcus ſecante in L & O, puncta L & O ſint in vtroque ſegmento ſimiliter ſita ad omnia

puncta

Digitized by Google

puncta ſui ſingula ſegmenti. Nam ſi ducerentur rectæ CL & DO, triangula BLC, BOD forent ſimilia, & ſimiliter poſita ſuper baſes BC, BD, & punctum L eundem ſitum haberet ad puncta C & B comparatum; quem habet punctum O comparatum ad duo puncta BD. Quòd ſi dicerentur à punctis L & O perpendiculares ad baſim communem BC, & BD, vel alio quouis Angulo ad eandem baſim BC vel BD, inclinatæ: ſimilia conſtruerentur Triangula, & eodem modo poſita; & in ſimilibus illis triangulis duo puncta & LO ſimiliter ſita forent. Quòd cùm eodem modo contingat, quæcunque ducatur recta BOL: patet omnia puncta arcûs BLC eodem modo, ſiue ſimiliter eſſe ſita, ad aliud qudcunque punctum ſegmenti BLC comparata; ac ſita ſunt omnia puncta arcûs BOD, ad aliud punctum, quod puncto reſpondet in ſegmento altero BLC, aſſumpto comparata ſemper enim triangula ſimilia, & ſimiliter poſita in vtroque ſegmento conſtitui poterunt, quorum latera ſemper erunt proportionalia circum æquales Angulos, ac proinde eorum puncta omnia ſimiliter ſita: quod ſufficit, ipſo etiam teſte Valliſio, vt hæc duo ſegmenta dicantur ſimilia, etiam ſi nulla fiat Angulorum ſegmentorum mentio, ſiue ſint æquales, ſiue inæquales, cùm præſertim nulla certa & definita ſit eorum quantitas, ſed omnino irregularis: quæ, vt oſtendi, determinatur ope triangulorum in vtroque ſegmento ſimilium, & ſimiliter poſitorum.

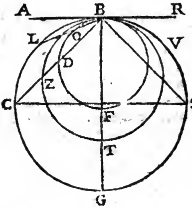


His vnum adhuc addam, quo cumulatiùs propoſito à Valliſio Argumento ſatisfiet. Aliud fortaſſe, quàm primâ fronte appareat, deſideratur à Peletarij fautore ad ſegmentorum ſimilitudinem, cùm ſegmentorum ſimilium Angulos exigit æquales: niſi fortè hîc etiam velit hanc Angulorum mixtorum æqualitatem in ipſo puncto concursûs B duorum arcuum CLB, DOB, & lineæ rectæ CB, vel GB conſtitui. Quod abſurdum ita mentem meam percellit, vt tametſi nec ſemel, nec obſcurrè, & verò etiam diſertiſſimè hoc in Argumento cap. 10. id pronunciet, vix tamen mihi perſuadeam eò prolapſum Geometriæ Profeſſorem, vt ita ſenſerit. Quæ enim in puncto, linearum

rum inclinatio? quæ diuaricatio? quæ Angulorum differentia? Quid plura? Quòd ſi hæc & alia abſurda tam grauia conſequantur, ſi quis Angulum quempiam in ipſo concursûs puncto præcisè fieri pronunciet: non in leuiora fortaſſe is cenſebitur incurrere, qui ad Angulum conſtituendum præter concursûs punctum (illud enim abſolutè ad Angulum neceſſarium eſt) lineas ab eo proſilientes admiſerit; & ſimul aſſeruerit duos Angulos duorum ſegmentorum ſimilium, quales ſunt in eodem ſchemate duo Anguli C B L, D B O, æquales eſſe poſſe. Cùm enim vnum, quo Anguli continentur, latus C B ſit vtrique commune; alterum etiam commune, idémque eſſe neceſſe eſt ſeruatâ eorum æqualitate, quodcunque tandem latus illud ſupponatur; par enim in omnibus eſt conditio. Sicut ergo ſi duo Anguli rectilinei æquales ſupponantur, vnúmque vtrique commune latus ſtatuatur; alterum latus cum altero coaleſcere, & congruere neceſſe eſt propter Angulorum æqualitatem: ita etiam in Angulis ſegmentorum, ſi æquales dicantur, neceſſe eſt contingere: nec poteſt latus rectum, vt C D B, vtriuſque congruere; quin vtriuſque curua latera B L C, B O D, ſalua Angulorum æqualitate, etiam congruant, idémque latus omnino fiant, non quidem ſecundùm longitudinem (longitudo enim linearum Angulos continentium non ſpectatur, nec Angulos mutat) ſecundùm curuitatem, & diuaricationem. Quod cùm adeò notum ſit, vt Principium vix habeatur euidentius, iam attendat quiſquis ſegmentorum ſimilium (ſiue ea fuerint ſemicirculi, ſiue alia quælibet) Angulos æquales eſſe contendit, in quod ſeſe inducat abſurdum. Ex eo ſcilicet admittere cogitur omnium circulorum (quod primâ fronte haud ita obuium initio monui) flexus & curuaturas eſſe æquales, quod abſurdiſſimum eſt; nec minùs, quod ex eo ſequitur, abſurdum foret, circulos omnes æquales eſſe. Si enim vel minima arcuum duorum particula (hoc eo dico, quod interdum videatur Valliſius particulas quaſdam linearum Angulos continentium puncto concursûs adhærentes aſſerere modo eandem, modo diuerſam ad ſe inuicem inclinationem habere) eiuſdem ſit curuitatis, cùm ex eo ſequatur idem eſſe vtriuſque centrum, ſequetur etiam eoſdem eſſe illarum particularum circulos integros. Non vacat plura, quæ occurrerent, in hoc Argumentum incommoda congerere, nam ſatis multa, ſatiſque grauia, hactenus allata videri poſſunt.

ARGVMENTVM SEXTVM.

C*Ontra eundem Angulum contactûs.*



Eodem, quoad fieri poteſt, diagrammate vtor, quò faciliùs ſæpius repetitum concipiatur. Sic ergo eo aſſumpto. Valliſius Argumentatur cap. 13. vt Angulum contactûs annihilet. Si circuli diameter B G fluere concipiatur per peripheriam ſemicirculi B C G immoto fixóque puncto B, ita vt ſenſim ſtatuatur in B C, in B L &c. donec perueniat ad tengentem B A, & cum eâ coaleſcat: conſtat eâdem ratione Angulum rectum G B A minui, quâ minuitur peripheria ſemicircularis B C G; donec emenſo toto ſemicirculo diameter B G cum tangente B A conuenerit, & tam Angulus rectus G B A, quàm ſemicirculi G C B peripheria euanuerit. *Erit autem*, inquit Vall. *in hoc caſu, in quo ſcilicet euanuit peripheria, & nullius euaſit magnitudinis; ſicut euanuit Angulus rectus, & nullius euaſit magnitudinis, Angulus ille, vel ipſe Angulus contactûs, vel ſaltem non ipſo minor. Ergo Angulus contactûs nullius eſt magnitudinis, ſiue non Angulus. Quod erat demonſtrandum.*

Reſponſio.

Demonſtraſti, Valliſi, per illam diametri B G conuerſionem donec cum tangente BA coaleſcat, Angulũ rectum GBA euanuiſſe, & nullius euaſiſſe magnitudinis: demonſtraſti item eodem tempore peripheriam GCB euanuiſſe & nullius euaſiſſe magnitudinis. Sed Angulũ contactûs A B L euanuiſſe, quomodo demonſtraſti? *Angulus ille inquis, in hoc caſu, cùm diameter B G cum rectâ B A coalruit, eſt Angulus contactûs.* Id quomodo demonſtraſti? quomodo vt aſſereres, mentem ſubiit cogitatio? euanuit Angulus rectus coaleſcente B G cum B A, & nihil euaſit; & hoc ipſum nihil vocas Angulum contactûs, aut etiam ipſo non minus? Hîc ne etiam fortaſſe vis, quod iam non ſemel te aſſerere, nec

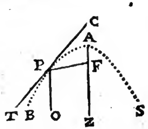
ſine

ſine aliquâ exiſtimationis tuæ notâ contigit, rectam ſolam A B ſine vllo arcu (omnem enim peripheriam euanuiſſe ſupponis) cum ipſâ concurrente in puncto B, Angulum contactûs efficere? Te ſcilicet latere poteſt ad Angulum quemcunque conſtituendum duas eſſe neceſſarias lineas, quæ ſimul concurrant, & non in directum iaceant? ſaniora, quæſo Vallisi, & quæ Geometriam magis ſapiant.

ARGVMENTVM SEPTIMVM.

E*Iuſdem Authoris contra Angulum contactûs.*

Non poterat de Pelatario meliùs mereri Vallisius, eiuſque tueri exiſtimationem ſtudioſiùs: ſi enim Angulum contactûs, quem perſtringere conatus fuerat ille, hic non omninò confecit; eius certè diligentia in conquirendo, congerendóque vndique ad id auxilia minimè deſideratur. Ecce etiam catoptricam conſuluit Vall. vt ad intentum, aliquid ex eâ opis conſequeretur. Quid demum retulerit, perpendamus.

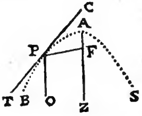


Sit ſpeculum Parabolicum B A S: cuius axis ſit A Z. Huic parallelus quidam ſit radius O P à Lucido, ſole, v. g. emiſſus. Radius hic ad lineam T P C ſpeculum contingentem in P puncto incidentiæ reflectitur ad æquales angulos; & quidem ad punctum F axis, quem focum dicunt optici: ita vt duo Anguli O P T, C P F ad contingentem ſint æquales. At oportuit oſtendiſſe non tam Angulos O P T, C P F ad contingentem factos, eſſe æquales; quàm Angulos O P B, F P A factos ad ſpeculum, Angulos ſcilicet Incidētiæ & reflexionis, æquales fore. Vel igitur æqualitas Angulorum ad rectam contingentem, infert ęqualitatem Angulorum ad ſpeculum, vel demonſtratio non procedit contrà quam ſentiant optici omnes. Dicendum igitur eſt tam duos Angulos O P T, C P F ad contingentem factos, quàm duos O P B, F P A factos ad ſpeculum, eſſe æquales. Ergo per 3. Axioma Libri primi Eucl. Anguli contactûs T P B, C P A vel æquales ſunt, vel potius nulli. Vnde etiam patet ſi horum Angulorum alter alteri ſuperponi intelligatur, ita vt duo latera recta P C, P T congruant; reliqua duo latera minimè coitura ob diuerſam

eorum curuitatem. *Quod cùm ita ſit, etiam manifeſtò liquet* (eius ſunt verba) *crura illa, quæ extra punctum concursûs variè diuaricantur, poſſe tamen æquales angulos continere.*

Reſponſio.

Paucis toti huic ratiocinationi Valliſianæ poteſt ſatisfieri cùm enim ex eius proximè recitatis verbis manifeſtum ſit ex eâ ſequi abſurda duo grauiſſima, quæ ab eo iam non ſemel aſſerta, hîc etiam repetuntur, quæque ſuperiùs reiecta ſunt; ſatis patet quo fundamento tota ea ratiocinatio niti poſſit, ea autem (vt obiter memoriam refricem) ſunt huiuſmodi. Primum in eo verſatur, quòd aſſerat duos Angulos contactûs Parabolici T P B, C P A ſibi ſuperpoſitos lateribus rectis P T, P C congruentibus, non tamen congruentibus reliquis duobus parabolicis, eſſe nihilominùs æquales. Quod ſuprà oſtendi eſſe longè abſurdiſſimum, vel quia incluſum includenti foret æquale; vel quia vtriuſque lateris parabolici curuitas, vna eadémque foret vt Argumento quinto declaratum eſt. Alterum abſurdum, vt primum euitari quoquo modo queat, incurritur: quod & ipſum iam non ſemel nec ita pridem, proximo ſcilicet Argumento ſexto, vt in reſponſione oſtendi, commiſſum eſt. Æqualitatem enim Angulorum huiuſmodi mixtorum, quos lineæ diuerſæ curuitatis, & proinde à ſe inuicem abſcedentes comprehendunt; ita ipſi concursûs puncto alligat Valliſius, vt etſi extra ipſum crura diuaricentur, & diuerſam & inæqualem vt ipſe agnoſcit, ineant inclinationem; non ideo tamen eos Angulos cenſeat inæquales, quia in ipſo puncto concursûs ea non diuaricantur. Sed quàm abſurdum illud ſit, quanquam per ſe patet, in ſuperioribus obſeruare licet non ſemel reiectum.



Ex his quidem abunde conſtat, nihilo plus detrimenti ex hoc Argumento ab opticis petito, quàm ex aliis in Angulum contactûs proficiſci. Verum tamen lubet etiam obſeruare num quidpiam in ipſo Argumento contra Principia optica commiſſum ſit. Aſſerit Valliſius radium O P axi A Z ſpeculi Parabolici parallelum reflecti non tantùm à tangente T P C Parabolam, ita vt Angulus F P C reflexionis æqualis ſit Angulo O P I incidentiæ, vt in opticis demonſtrant Eucl. & Vitellio, ſed etiam à lineâ Parabolicâ B P A ita vt Angulus mixtus F P A reflexionis, æqualis ſit Angulo mixto O P B incidentiæ. At apud quem optices Authorem id vel demon

demonſtratum, vel aliquando aſſumptum obſeruauit Vallíſius? An non nouit, quod experientiâ perpetuâ & conſtantiſſimâ teſtatum eſt, quod ratione multiplici confirmatum; omne Agens naturale neceſſarium lineas tantùm rectas vt ſimpliciſſimas, vt determinatas, vt vniformes, vt breuiſſimas, in agendo obſeruare? Hinc fit vt radius O P impingens in ſpeculi Parabolici punctum P; non aliâ directione ad reflexionem determinetur, quàm eâ, quam ei præbet planum reflexionis, & in eo plano recta linea T P C parabolam tangens in puncto P, ad quod appellit radius incidentiæ O P. Quare, cum pronunciat Vallíſius Angulos mixtos O P B F P A illum incidentiæ, hunc reflexionis æquales eſſe: attendat à ſe primo pronunciari,& tanquam Principium ſuæ concluſionis immediatum ſupponi, vt ex allatâ eius ratiocinatione conſtat,quod quidem Ipſi probandum incumbit; ſed quod probari vetat,vt proximè memini,naturæ ad vnum, quod compendioſiſſimum ſibi, & maximè expeditum ſit, determinata agendi facultas; ac proinde rectam ſolam viam omni linearum curuarum, quæ ad eundem alioqui terminum ducere poſſent, circuitu prætermiſſo, inſiſtere nata. Nihil ergo ex opticis colligi poteſt: quod Angulum contactûs de medio tollendum ſuadeat.

Epilogus.

Accipe, ante quàm ad alia pergo, breuem eorum, quæ hoc ſecundo Libro pertractata ſunt, Anacephalæoſim.

Ac primò quidem primis ipſis aliquot Propoſitionibus declaratum eſt,quaſnam inter quantitates vera Ratio poſſit intercedere; quaſnam inter intercedere non poſſit: probatúmque non tantum inter finitam quantitatem,& infinitam,Rationem nullam eſſe poſſe; ſed etiam inter quaſdam quantitates finitas, eiuſdem licèt generis quantitatis (quod quidem ad Rationem omnino neceſſarium eſt iuxta definitionem 3. Lib. 5. Eucl.) Id tamen non ſufficit, niſi etiam repetitæ ſeſe poſſint mutuò ſuperare iuxta definitionem 5. ex cuius explicatione quam Propoſitione tum tertiâ, tum octauâ, aliiſque paſſim tradidi, conſtat quàm minimè ea ſit cum definitione 3. irreconciliabilis, etſi Angulos contingentiæ aliquid eſſe Quantitatis concedatur. Conſtat item eandem definitionem 5. longè aliò ſpectare; quàm vt eâ tantùm exponatur, quænam ſint eiuſdem generis Quantitates.

Secundò. Suum Angulis cuiuſcunque generis à Geometriæ Parente tributum ius, & à cæteris deinceps Geometriæ cultoribus hactenus aſſertum, exponitur, aſſeritur, & confirmatur: oſtenditúrque, etſi ſumma inter Angulos, & arcus quibus inſiſtunt. conuenientia in-

Digitized by Google

tercedere videatur; longè tamen eſſe diuerſam vtrorúmque quidditatem conſule Prop.4. 5. 6. & alia paſſim loca.

Tertiò. Declaratum eſt Angulos non paucos curuilineos non tantùm circulares, ſed etiam cuiuſvis alius curuitatis lineis conſtitutos, Rationis ad inuicem iure non ſecùs quàm ſi rectilinei forent, potiri; ſed nec pauciores eodem priuari propter incertam, ac multiplicem, nec ſibi conſtantem linearum concurrentium, & Angulos conſtituentium Inclinationem: quam originem & cauſam à priori eſſe aſſerui Prop. 16. Cur Ratione carerent quàm plurimi Anguli curuilinei: quorum aliquot mentionem feci tum Prop. 10. tum aliis.

Quartò. Diſſolutum eſt ſecundò paulò pluribus (vt paulò pluribus, quàm ab eius Authore P. Gregorio in op. Geom. propoſitum erat, ab eius Interprete expoſitum eſt) ſubtiliſſimum illud Argumentum: quo Angulos omnes tam ſemicirculorum, quàm contingentiæ vel æquales eſſe, ſi quoquo modo quanti dicerentur; vel (quia æquales eſſe aſſerere abſurdum foret, cum alter alterum includat) eſſe extra omnem rationem quantitatis eſt, inquam, ſecundò hîc Prop. 7. & 8 ſolutum; cui primò reſponſum à me iam fuerat Lib. 1. Prop. 27. Exam. Quadrat.

Quintò, ac vltimò. Vt vera omnium hactenus retro Geometrarum de Angulis, præſertim curuilineis, ſententia niteret ſplendidiùs: puluiſculus omnis, quem in eam effuderat non rudis alioqui Geometra Valliſius, non leuiter excuſſus eſt. Atque demum his omnibus datæ initio fidei cumulatè eſt ſatisfactum.

FINIS LIBRI II.

LIBRIS

Digitized by Google

Digitized by Google

LIBER TERTIVS.

In quo mirabiles Quadratricis facultates variæ exponuntur.

Digitized by Google

Digitized by Google

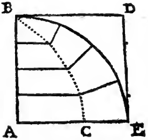
LIBER TERTIVS.

In quo mirabiles Quadratricis facultates variæ exponuntur.

PROPOSITIO I. *Definitio.*

QVadratrix antiqua Nicomedis & Dinoſtrati,eſt linea quædam curua, quam intra circuli Quadrantem deſcribunt mutuâ ſectione Quadrantis, radius, & linea circulum tangens: dum radius vniformi motu Quadrantem decurrit donec ad alterum Quadrantis radium perueniat linea verò tangens eodem tempore,motúque perinde vniformi defluit ſitu ſemper parallelo, donec ad eundem radium perueniat.

Expoſitio.



Eſto circuli Quadrans A B E, quem tangat in B linea B D. Si concipiatur radius A B quieſcente puncto A vniformi motu per arcum Quadrantis B conuerti, donec ad radium alterum peruenerit; eodémque tempore linea tangens B D deferri motu etiam vniformi, ſitúque parallelo donec eundem radium A E attingat, & cum eo coaleſcat: hæ duæ lineæ A B & B D ita motæ ſectione ſui mutuâ curuam lineam B C deſignabunt: quam eius primi Auctores Nicomedes & Dinoſtratus τετραγωνίζουσαν ſiue Quadratricem ex eo vocauere; quòd circuli Quadraturam ſin minùs abſolutam, proximè ſaltem eius ope

attingere liceret. Si enim vltimum eius punctum C Geometricè poſſet aſſignari: haud dubium quin ad exitum perductus foret Tetragoniſmus. Iidem enim primi eius Inuentores ſubtiliſſimè omninò demonſtrarunt Arcum Quadrantis B E tertium eſſe proportionalem duabus lineis rectis A C, A B. Habitâ autem lineâ rectâ arcui B E æquali: per ea, quæ Archimedes demonſtrauit, facilè Tetragoniſmus abſoluitur. Verùm, quia cùm radius A B conuerſus radium A E attingit, & cum eo coaleſcit; eodem momento linea B D ad eundem radium A E peruenit, & in eum euaneſcit, omniſque illa ſectio duarum motarum linearum ceſſat, per quam ſolam linea illa curua deſignatur: ideò Quadratura ea arte vltimò definita dici non poteſt; à metâ tamen tam propè abeſſe poteſt aſſeri, vt ad eam propiùs accedere, quin attingatur, nequeat; cùm punctuli vnius ſpatio indiuiſibili ab ea diſtet, quâ nulla minor diſtantia poteſt excogitari.

PROPOSITIO II. *Definitio.*

Recentior Quadratrix noſtra eſt linea curua: quam radius circuli conuerſus motu vniformi & regulari per totum circulum, & linea circulum tangens radio moto parellela, eodem tempore, motu item vniformi, ſitúque parallelo per totam diametrum ad contactum iunctam delata, perperpetuâ ſui ſectione deſignant.

Expoſitio.

Ecce. Radius A D circa centrum A immotum per totam circuli D F E G peripheriam motu vniformi deferri concipiatur, donec ad priſtinum ſuum locum, vnde diſceſſerat, reſtituatur. Interim verò linea H K circulum tangens in F, ad quod ducta eſt diameter F G ad tangentem per Prop. 18. lib. 3. perpendicularis, eodem momento, quo radius A D motum iniens, eo vniformi deferatur per diametrum F G, ſitu O I parallelo, ſiue ad F G ſemper perpendiculari donec ad G perueniat, & cum M N coaleſcat eodem momento, quo radius A D conuerſionem abſoluit. Eæ lineæ ita fluentes ſemper ſe interſecabunt in I, ſuáque illa interſectione mutuâ Quadratricem deſcribent Integram, & in Infinitum ad partes H & M porrectam. Quam quidem duæ lineæ F H, G M in infinitum comitabuntur, & ad eas eò propiùs Quadratrix accedet, quò longiùs ambæ procurrent; ad concurſum

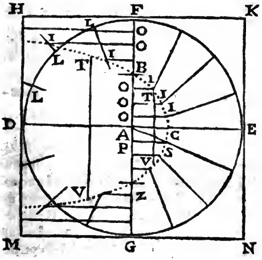
tamen

tamen mutuum nunquam peruenient: adeò vt duæ lineæ F H, G M ſint Quadratricis Aſymptoti. Vbi autem vel minimùm radius A D ab eo loco per conuerſionem receſſerit: quia tunc duo Anguli F & A fient duobus rectis minores; ideo ſecabit tunc radius, vt A L, rectam F H, aut aliam quamcúnque O I ei parallelem ipſámque Quadratricem ductu continuo, & cohærente deſignabunt: cuius duo cornua, alterum ſupra A D, alterum infra, omnem aſſignatam longitudinem ſuperabunt. Habes ergo recentioris, & integræ Quadratricis deſignationem.

PROPOSITIO III. *Probl.*

QVadratricem integram deſcribere.

Conſtructio & Demonſtratio.



In allato proximo ſchemate diuidatur circulus centro A deſcriptus in partes quotcunque æquales (quo autem maior fuerit earum multitudo, eò tutiùs Quadratrix deſignabitur) per quarum ſingulas radij A L centro A educantur. Tum recta F G in partes totidem ſecetur, ductis per ſingulas rectis lineis O I parallelis ad A D, ſiue ad F G perpendicularibus. Hæ radios eiuſdem ordinis (initiis à radio primo A D, & à prima parallelarum F H factis) ſecabunt in punctis I, per quæ deducenda eſt leni flexu Quadratrix.

Demonſtratio deſcriptionis huius ex ipſa patet conſtructione, præcedentíque definitione. Cùm enim vniformis ſit motus vtriuſque harum linearum Quadratricem ſua ſectione deſignantium, eodémque vtriuſque motûs periodus abſoluatur temporis ſpatio: qualibet

temporis parte promouebitur vtraque linea A D & F H per partem ſpatij ſui decurrendi temporis parti homologam. Cùm ergo tam circulus quàm eius diameter F G in partes æquales numero pares diuidatur, & per ſingulas lineæ ducantur: erit neceſſariò earum ſectio ad Quadratricem. Quare ſi binarum & binarum omnium ſectiones lineâ curua connectantur; ea erit poſtulata Quadratrix. Integram ergo, ſeu nouam Quadratricem deſcripſimus. Quod faciendum erat.

Corollarium.

Ex traditâ Quadratricis delineatione patet radios qui hinc inde ab Axe æquales cum ipſo Axe angulos continent, eſſe æquales inter ſe. Vt ſi angulus C A S ſit æqualis angulo C A I radius A I, æqualis erit radio A S. Angulis enim æqualibus C A I, C A S reſpondent æquales rectæ A O, A P: cùm ſint rectæ huiuſmodi inter ſe, vt inter ſunt anguli ipſis homologi. Cùm igitur in triangulis A O I, A P S, anguli O & P ſint æquales, vt pote rectis ſint autem anguli A I O, A S P etiam æquales; ſunt enim alternis C A I, C A S æqualibus ex ſuppoſitione, æquales; & latera A O, A P æqualia, erunt & reliqua latera A I, A S æqualia per Prop. 26. lib. 1. Elem.

PROPOSITIO IV. *Theorema.*

QVadratrix Antiqua Quadratricis nouæ pars quædam eſt.

Demonſtratio.

In eadem figura concipiatur centro A per punctum B, in quo Quadratrix diametrum F G ſecat, circulus deſcribi. Certum eſt circuli illius Quadrantem Quadranti F L E concentricum in totidem partes æquales diuidi à radiis A L Quadrantem A F L E diuidentibus, in quot diuiſus eſt idem Quadrans A B E. Certum item eſt rectam A B eſſe dimidiam partem ſemidiametri A F, ſiue partem quartam diametri totius F G. Nam punctum B, in quo Quadratrix radium A F ſecat, deſignatur iuxta Quadratricis generationem, cùm radius A D partem totius circuli, & recta F H partem Diametri F G eandem decurrêre. At radius A D in radium A F promotus, emenſus eſt quartam totius circuli partem. Ergo etiam Recta F H, cum ad Quadratrricis punctum B peruenit, quartam diametri F G partem emenſa eſt, ſiue dimidiam ſemidiametri A F. Quod cùm ita ſit: cùm radius A F deferetur per Quadrantem F L E, ſiue per Quadrantem circuli centro A per B deſcripti; recta B O Quadrantem illum tangens in B deferetur per

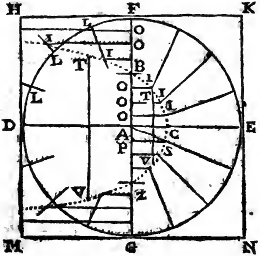
partem

partem B A quartam totius diametri, ſecabítque radios A L in punctis I, per quæ Quadratrix agitur. Quæ eſt Antiquæ Quadratricis deſignatio. Antiqua ergo Quadratrix Quadratricis nouæ pars quædam eſt. Quod probandum erat.

PROPOSITIO V. *Probl.*

VAriarum linearum ad Quadratricis conſtitutionem concurrentium definitiones ſtabilire.

Expoſitio.



Non parum lucis, & breuitatis allatura eſt toti huic tractationi linearum multiplicium, quarum crebrior mentio facienda eſt, denominatio, ſiue definitio.

Prima. Circulus generans, ſiue ex generatione, eſt circulus D F E G, quem radius A D decurrens, Quadratricem natus eſt producere.

Secunda. Diameter generans, eſt circuli generantis diameter F G: per quam linea H K tangens circulum in F, ſenſim defluit, & cum conuerſo radio A D concurrens, eandem producit Quadratricem.

Tertia. Axis Quadratricis eſt recta C D ad partes D in infinitum porrecta per centrum A circuli generantis tranſiens: quæ eadem linea totam Quadratricem in duo cornua vtrimque poſita dirimit.

Quarta. Quadratricis vertex eſt punctum C Axis extremum.

Quinta Sagitta Quadratricis eſt Axis pars A C inter verticem C,& centrum A circuli generantis intercepta. Sunt quidem & aliæ ſagittæ: ſed hæc abſolutè ita denominabitur.

Sexta. Applicata primaria, ſiue abſolutè Applicata ordinatim, eſt recta B Z Axem in centro A perpendiculariter ſecans. Ordinatim autem Applicatæ ſecundariæ, dicuntur, aliæ quælibet rectæ ad Axem

perpen

perpendiculares, & ad Quadratricis cornua vtrumque terminatæ: cuiuſmodi ſunt rectæ T V.

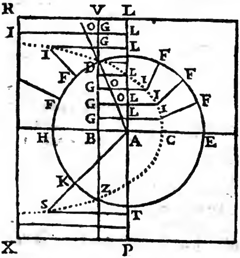
Septima. Centrum Quadratricis eſt punctum A, idem quod circuli generantis centrum. Licèt enim Quadratrix centro omni propriè careat, cum ad partes D in infinitum producatur, nec ſpatium circumſcribat; nec item lineas per punctum illud A ductas, & ad Quadratricem terminatas bifariam diuidat, vt centri notio poſtulare videtur: Quia tamen punctum illud fixum eſt, & determinatum; lineæque per illud ductæ, ad puncta Quadratricis è diametro oppoſita terminantur; quod nulli præterea puncto intra Quadratricem aſſignato competit: non inceptè dicetur Quadratricis centrum; nec ineptiùs linea quælibet per illud punctum A ducta, & ad Quadratricem terminata dicenda veniet Quadratricis diameter.

Aliæ, ſi quæ olim occurrant neceſſariæ definitiones, ſuis locis exponentur: nunc magis obuias adduxiſſe ſufficiat. Quod hic præſtandum erat.

PROPOSITIO VI. *Probl.*

DAto centro Quadratricis, eiuſque ordinatim Applicatâ quacunque, Quadratricem ipſam totam deſcribere.

Expoſitio.



Datum ſit futuræ Quadratricis centrum A, & Applicata quæcunque D B, ad axem vtique per centrum A ductum perpendicularis, iiſque poſitis Quadratrix ipſa deſcribenda ſit perinde, ac ſi Applicata foret ipſa diameter generans.

Conſtructio.

Centro A per Applicatæ extremum D arcus circuli D F E deſcribatur. Tum, tam hic arcus, quàm applicata in partes aliquot æquales pari vtrobique multitudine diuidatur: ille in punctis F, hæc in punctis G. Ad hæc à centro A ad F radij

radij deſtinentur: quorum ſingulos ſingulæ lineæ G L per puncta G ductæ ad axem parallelæ ſecent in I. Erunt omnia ſectionum puncta I ad Quadratricem. Quare ſi per ea deducatur curua linea, ipſa erit Quadratrix deſcribenda. Quæ vt vltra Applicatam D B in infinitum producatur: producatur vltra D arcus E F D, vt totus habeatur ſemicirculus E F D H: in quo ſumantur vltra D arcus D F, F F, quotcunque licuerit, æquales arcubus D F, F F prioribus citra Applicatam D B poſitis, radiiſque ex A per F emiſſi producantur extra circulum ad libitum. Producatur etiam vltra D Applicata B D: & in ea ſumantur ſpatia D G, G G prioribus infra D poſitis æqualia: ac per ſingula diuiſionum puncta G, ducantur Axi parallelæ G L. Quæ, ſi producantur, radios ſingulos ſingulæ eiuſdem ordinis ſecabunt in punctis I: per quæ Quadratrix vltra D agenda eſt.

Demonſtratio.

A centro A excitetur ad Axem perpendicularis A L L: quæ eſt linea generans. Hæc eſt Applicatæ D B parallela, & à lineis G L diuiditur in partes L L, æquales partibus G G Applicatæ D B. Quia verò circulus generans, ſi deſcriptus concipiatur, diuiditur à radiis A F in partes æquales; ſicut in æquales diuiſus eſt circulus H D F E: ac per diametri generantis puncta L lineæ L G ducuntur Axi parallelæ, quæ radios eiuſdem ordinis, ſibique reſpondentes ſingulæ ſingulos interſecant in punctis I: patet curuam lineam per huiuſmodi interſectionum puncta I deductam, veram eſſe Quadratricem iuxta traditam eius deſcriptionem. Dato ergo centro Quadratricis, datâque Applicatâ quacunque Quadratricem deſcripſimus, non ſecùs ac ſi daretur ipſa diameter generans, ac generans circulus. Quod præſtandum erat.

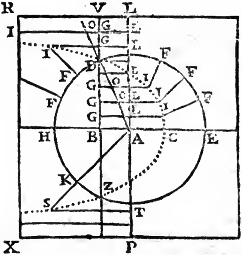
Scholium.

Obſeruandum hîc eſt, quando continget (continget autem vt plurimùm) vt ſpatium aliquod F F in arcu D E aſſumptum, & in arcu D H repetitum, ipſum arcum D H præciſè non metiatur; ſpatium etiam D G in Applicata D B aſſumptum, & in eadem vltra D producta repetitum non præciſè adæquaturum lineam diametro generanti æqualem: ſupererit enim particula, quæ ad totam diametrum generantem ita ſe habebit, vt particula reliqua ſemicirculi H D E ſe habet ad totum ſemicirculum. vnde facilè determinabitur ipſa tota diameter. Quod ſi longiùs & longiùs producenda foret Quadratrix, in illo arcu reliquo pars quædam ſumi deberet ſpatium F F metiens, per quam radius emitteretur; hunc enim linea parallela ad Quadratricem ſectura eſt. quæ per particulam ſpatij G G arcui aſſumpto proportionalem

B ducere

duceretur. vt, ſi dimidia pars, vel tertia &c. arcûs F F aſſumatur, per quam radius ex centro emittatur : pars etiam dimidia vel tertia &c ſpatij G G Applicatæ aſſumi debet, per quam ducatur parallela radiũ illum ſectura ad Quadratricem. Hæc enim linea parallela non minùs reſpondet radio illi quàm reliquæ per puncta G actæ radiis reliquis per F tranſeuntibus : adeóque per harum duarum linearum mutuam ſectionem, non minùs quàm reliquarum ſectionem ducetur Quadratrix.

Scholium alterum.



Obſeruandum præterea eſt, ſi Angulus quilibet ad cẽtrum A Quadratricis quouis ad Quadratricem ſitu ſtatuatur, & per puncta, in quibus radij Angulum illum cõtinẽtes Quadratricem interſecant, Axi parallelæ ducantur, eas ſemper lineas æquales in qualibet Applicatâ intercipere. Hoc enim in ſchemate patet Anguli cuiuſuis F A F radios Quadratricem ſecare in punctis I; per quæ actæ ad Axem parallelæ I G, ſpatia æqualia L L in primariâ Applicatâ A L, vel G G in qualibet aliâ Applicatâ B D intercipiũt. Nec obſcura eſt huius effectûs ratio. Cùm enim ex generatione Quadratricis, radius A H circa centrum A per circulum æquali ſemper motu feratur; eodémque tempore, motúque vniformi linea L R Axi parallela per Applicatam A L, aut B G deſcendat : patet radium A F quemcunque ad locum circuli ſtatuatur æquali temporis parte æqualem arcum emetiri; lineámque L R ſimiliter eâdem illâ temporis parte propter eandem motûs vniformitatem decurrere ſpatium L L arcui F F decurſo reſpondentem : adeo vt aſſeri verè poſſit, ſi Angulus quiſpiam alteri Angulo fiat æqualis, & per puncta, in quibus Quadratrix à lateribus Angulorum ſecatur, Axi parallelæ ducantur : eas in Applicatis ſpatia æqualia intercepturas.

Cæterùm quibuſdam in caſibus diligenter debet attendi quonam in loco ſpatia illa æqualia ſint in Applicatâ ſumenda. Quod vno, aut altero

altero exemplo expono : hæc enim obſeruatio non parum eſt aliàs vſui futura. Sit Angulus D A E radiis A D, A E Quadratricem in D & C ſecantibus comprehenſus. Huic Angulo, ſiue arcui D F F E reſpondet Applicata D B, vt patet (hoc enim in caſu nulla per punctum D duci debet Axi parallela, quæ Quadratricem ſecet, cùm in ipſâ punctum illud D reperiatur; ſit autem alter radius A C cum radio A D angulum D A E continens, ipſe Axis A C) Iam fiat ei Angulus æqualis D A S; & à puncto S, in quo Quadratricis alterum cornu ſecatur, Axi parallela ducatur S T : erit etiam in eo caſu Applicata D B intercepta, æqualis Applicatæ; quam intercipiunt parallelæ per puncta D & S Quadratricis, in quibus ſecatur à radiis AD, AS Angulum DAS continentibus. Verùm intercepta huiuſmodi Applicata non vnica linea futura eſt, ſed duæ à ſe inuicem auulſæ : quales ſunt D V, & P T: quarum illa intercipitur inter punctum D, & lineam L R Aſymptotum Quadratricis; hæc verò inter Aſymptotum alteram P X, & Axi parallelam S T; ita vt ambæ ſimul D V, P T, æquales ſint rectæ D B. Id porrò, quòd primâ fronte argutiſſimi cuiuſlibet mentem percellat, vt contingat accipe.

Angulus D A S in duos Angulos D A H, S A H ſecatur ab Axe A H; ſiue Arcus D H K, in duos arcus H D, H K. Dum igitur Aſymptotus L R : quæ quaſi in infinitâ diſtantiâ Quadratricem ſecare, & quaſi cum Axe A H producto in eodem puncto Quadratricis conuenire concipienda eſt; concipitur eodem tempore motu æquali deſcendere per Applicatam V B, donec ad punctum D perueniat : dum interim eodem tempore, æquali item motu circa centrum A immotum conuertitur. Axis A H donec idem punctum D attigerit : deſcriptum tunc erit cornu Quadratricis à puncto D in infinitam diſtantiam porrectum, donec Axem A H etiam infinitè productum quaſi ſecare concipiatur. Cornu ergo illud Quadratricis ab infinitâ diſtantiâ vſque ad D deductum generatur per arcum H D, dum Axis A H ſuo motu illum decurrit eodem tempore, quo Aſymptotus deſcendit per Applicatam V D, radióſque reſpondentes A F ſecat in punctis I Quadratricis. Arcui igitur D H, ſiue Angulo D A H reſpondet Applicatæ pars D V : ita vt ſi arcui D H alius quilibet arcus æqualis, ſiue Angulo D A H æqualis alius Angulus ſumeretur : radij eum continentes Quadratricem ſecarent in punctis, per quæ ductæ Axi parallelæ lineæ in Applicatâ lineam interciperent lineæ D V æqualem.

Iam verò eâdem ratiocinatione circa Angulum H A S, ſiue arcum H K inſtitutâ oſtendetur pars P T Applicatæ inter Aſymptotum P X,

& parallelam S T à puncto S, in quo radius A S Quadratricem ſecat; deductam ad Applicatam reſpondere dicto Angulo H A S, ſiue arcui H K: ita vt pars Quadratricis, quæ à puncto S in infinitum producitur, deſcribatur, dum Axis A H conuerſus circa centrum A arcum decurrit H K; eodémque tempore Aſymptotus P X, Applicatæ partem P T emetitur: ita vt ſi alius Angulus Angulo H A K æqualis alio in loco aſſumeretur, radij duo illum continentes Quadratricem ſecarem in punctis per quæ actæ parallelæ in Applicata lineam interciperent lineæ P T æqualem iuxta Propoſitionem antecedentem. Quibus declaratis, luce clarius euadit toti Angulo D A K, vel arcui D H K, ita reſpondere partem Applicatæ, æqualem Applicatæ alij cuícunque angulo æquali debitæ; vt illa in duas partes D V, T P diſtrahatur: licèt arcus H D, H K, ſiue Anguli H A D, H A K ſint contigui, & adhærentes. Quod ſemper ſemper continget quoties poſitus Angulus ab Axe A H vtcunque ſecabitur, vt ex proximè dictis manifeſtum eſt.

PROPOSITIO VII. *Probl.*

Radio ad quemcunque Angulum ad Axem conſtituto, per aſſignatum in eo quodcunque punctum deducere Quadratricem.

Expoſitio.

In eodem ſchemate ductus ſit radius A D Angulum D A H, ſiue D A E cum Axe complectens: & in eo aſſignetur punctum D per quod deduci debeat Quadratrix; cuius ſcilicet centrum ſit A, & Axis H A E.

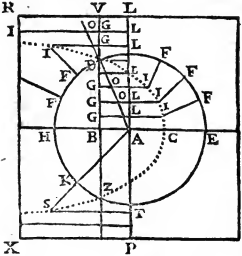
Conſtructio.

Centro A ſemicirculus per D deſcribatur: eiúſque arcus D F E (quem nunc Quadrante maiorem ſuppono) in partes aliquot æquales diuidatur in F, paríque multitudine in partes item æquales datus radius A D ſecetur in punctis O. Tum per puncta F radij educantur: quorum ſingulos ſingulæ lineæ rectæ per puncta O Axi parallelæ eiuſdem ordinis cum radiis A F, ipſiſque reſpondentes ductæ interſecent in punctis I: per quæ linea curua deſignetur. Hanc dico Quadratricem eſſe quæſitam. Quam vltra D ad libitum producere licebit ſumptis in arcu D H ſpatiis æqualibus quotcunque licuerit, ſpatio F F; per quæ radij emittantur: quos in punctis I (per quæ agenda erit Quadratrix) ſecent lineæ eiuſdem ordinis ductæ ad Axem parallelæ per

puncta

Digitized by Google

puncta O in producto radio A D ; quæ eodem ſpatio inter ſe diſtant, quo eadem puncta O infra D poſita à ſe abſcedunt.



Quòd ſi arcus DH, & radius A D in partes æquales pari vterque multitudine ſecarentur ; ac infra D tam radij, quàm lineæ Axi parallelæ per diuiſionum puncta F & O ducerentur : duceretur quidem per ſectiones Quadratrix, ac per D tranſiret, vt poſtulatur : ſed prius ductam Quadratricem ſecaret in D, eíque obuerſa foret, verticémque C ex alterâ parte centri A versùs H nanciſceretur, nec priori foret æqualis : Quam porrò vltra D in infinitum producere liceret verſus E eodem modo, quo vltra D versùs H produci poſſe docui priùs deſcriptam Quadratricem, cuius vertex C.

Demonſtratio.

Huius ſolutionis demonſtratio ex præcedentis Propoſitionis demonſtratione euidens eſt. Nam lineæ per puncta O radij A D ductæ, ad Axem A E parallelæ, ſecant in punctis L diametrum generantem æqualiter inter ſe diſtantibus, vt æqualiter inter ſe diſtant puncta O radij A D : ſúntque prætereà tot ſpatia L L diametri generantis, quot ſunt arcûs D E ſpatia F F. Ergo rectæ Axi parallelæ per L ductæ ſecabunt ſingulæ ſingulos reſpondentes radios in punctis I, per quæ deducitur Quadratrix iuxta traditam ſuperiùs eius deſcriptionem. Eadem erit ratio, ſi arcus D H, & radius A D diuidantur, & reliqua abſoluãtur ad alteram obuerſam Quadratricem delineandã neceſſaria. Quare dato quocunque radio, & puncto in eo aſſignato, per quod ducenda ſit Quadratrix ; ipſam, quod faciendum erat, deſcripſimus.

Scholium.

Quod in ſcholio Propoſitionis antecedentis obſeruatum eſt circa Applicatam D B, hîc etiam circa radium A D locum habet. Nimirum ſi vltra D excurrere debeat Quadratrix : eius puncta quædam inueſtigabuntur repetito, quoties licuerit arcu, D F in peripheria D H

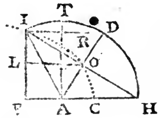
licet præcisè non exhauriatur, totiéſque repetito ſpatio D O in radio A D producto, ductiſque per O lineis O L Axi parallelis, quæ radios A F eiuſdem ordinis productos vltra F ſecabunt in I punctis, per quæ Quadratrix deducetur: quam etiam promouere licebit adhibitâ particulâ Arcus D F H, ſi quæ ſuperſit, eíque in radio A D ſumptâ proportionali, vt in citato ſcholio declaratum eſt.

PROPOSITIO VIII. *Theorema.*

SI centro A Quadratricis circulus per quodlibet Quadratricis punctum I deſcribatur Axem ſecans in H: & iungatur chorda I H;

Dico eam à Quadratrice bifariam ſecari.

Demonſtratio.



Ducatur ad Axem A C productum perpendicularis, ſiue Applicata I B: quâ bifariam diuiſâ in L, per diuiſionis illud punctum L Axi parallela ducatur ſecans in O chordam IH. clarum eſt per Prop. 4. Lib. 6. Elem. ipſam in O bifariam ſecari: vnde fit, vt arcus I H bifariam etiam ſecetur in D, ſi à centro A per O radius educatur A D. Quia igitur vt ſe habet Applicata B I ad L I; ita ſe habet centro A deſcriptus arcus H I ad arcum D I; ac per I parallela Axi, & per D radius A D ducitur: erit communis vtriuſque ſectio O ad Quadratricem per Prop. 3. vbi Quadratricis generatio exponitur. Ergo à Quadratrice chorda I H bifariam ſecatur in O. Quare ſi centro A Quadratricis, &c. Quod probandum erat.

PROPOSITIO IX. *Theorema.*

IIſdem poſitis. Si radius à centro A per punctum O, in quo à Quadratrice ſecatur chorda I H, educatur: Dico radium hunc fore ad chordam I H perpendicularem in puncto O.

Demonſtratio.

Clara eſt hæc Aſſertio per Prop. 3. Lib. 3. Elem. Cùm enim chorda I H ſubtendens arcum I D H bifariam à Quadratrice ſecetur in O, vt Prop.

Digitized by Google

Prop. proximâ oſtenſum eſt, & à centro per O radius emittatur; non poteſt is non eſſe ad chordam I H perpendicularis. Quod erat probandum.

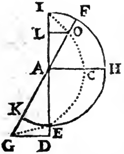
Corollarium.

Hinc colligitur tutiſſima methodus ex definitis Quadratricis punctis alia eiuſdem Quadratricis puncta deſignandi. Si nimirum per iam ſtatuta Quadratricis puncta è centro A arcus deſcribantur Axem ſecantes in punctis, ad quæ à ſingulis reſpondentibus punctis Quadratricis ducantur chordæ: quæ ſi bifariam ſecentur: erunt ſectionum puncta ad Quadratricem; adeóque per ea debebit Quadratrix agi. Quæ methodus potiſſimùm vſui futura eſt; cùm Quadratricis pars illa, quæ vertici proxima eſt, deſcribenda fuerit: Ibidem enim Applicatarum, radiorúmque communis interſectio eſt obliquiſſima, nec niſi ægerrimè diſtingui poteſt, cui difficultati hac methodo licebit occurrere: cui ecce annecto non abſimilem.

PROPOSITIO X. *Probl.*

DAto quovis Quadratricis puncto punctum è diametro oppoſitum aſſignare.

Conſtructio.

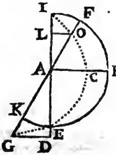


Datum ſit Quadratricis punctum O, cui oporteat aliud è diametro oppoſitum definire. A puncto O per centrum A agatur linea: ac per idem centrum A ducatur diameter generans A I; ad quam ex puncto O ducatur perpendicularis, vel Axi parallela O L: deinde à puncto L ſuper diametro generante ſumatur L D æqualis ſemidiametro generanti: Denique per D Axi parallela agatur ſecans in G productam diametrum O A. Dico punctum G illud eſſe, quod inueſtigatur: eſſe ſcilicet ad Quadratricem, & quidem puncto O è diametro oppoſitum.

Demonſtratio.

Deſcripto è centro A circulo I H E, vel generante, vel alio quocunque (quicunque enim generantis locum occupare aptus eſt; cùm Anguli ad centrum ratio potiùs habeatur, quàm magnitudinis circuli, cuius radij Angulum continent) cuius diameter ſit F K per O, & G tranſiens,

tranſiens. Ex generatione Quadratricis manifeſtum eſt arcum Quadratricis O C G deſignari, dum radius A F conuertitur circa centrum A per ſemicirculum F H K donec ad A K perueniat motu ſemper æquali; eodémque temporis ſpatio, motu item vniformi Applicata L O percurrit ſemidiametrum generantem L D: omnis enim circuli pars à radio conuerſo percurſa partem diametri generantis homologam, hoc eſt, ad quam diameter generans eandem habeat rationem, quam totus circulus generans habet ad partem ſuî decurſam, percurri poſtulat. Semicirculus ergo F H K ſemidiametrum generantem L D decurri vult à parallelâ L O initio facto à puncto L, quod puncto F reſpondet; dum radius A F ſemicirculum F H K emetitur: ita vt cùm radius A F ad radium A K ſibi in directum poſitum peruenit; linea etiam L O parallela Axi ad lineam D G ſiſtatur, punctúmque G ſit ad Quadratricem, & quidem puncto O è diametro oppoſitum; cùm inter ea duo puncta O & G diameter O G Quadratricis è diametro F K circuli definita intercedat. Quæ ratiocinatio ex iiſdem Principiis generationis Quadratricis inſtituta, locum habet circa Angulum quemlibet duobus radiis Quadratricem ſecantibus comprehenſum: quocunque enim in loco conſtituantur Anguli inter ſe æquales; & à punctis, in quibus Quadratrix ſecatur à radiis Angulos æquales continentibus lineæ Axi parallelæ ducantur: eæ in Applicatâ qualibet lineas æquales intercipient, non ſecùs ac quælibet Quadratricis diameter (quæ quaſi Angulum duobus rectis æqualem ad centrum A continere cenſenda eſt) quouis in loco, ſitúue ſtatuatur; punctis, in quibus Quadratricem ſecat, qualia ſunt O & G in hoc ſchemate, axi parallelæ ductæ lineæ in Applicatâ qualibet æquales lineas intercipiunt, hoc eſt, vt hîc demonſtratum eſt, ſemidiametrum generantem. Rectè igitur dato in Quadratrice cuiuis puncto punctum è diametro oppoſitum definitum eſt. Quod erat faciendum.



Corollarium.

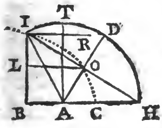
Hinc ergo habetur rurſus methodus, quâ ex punctis Quadratricis iam definitis quæque faciliorem admittunt inueſtigationem; puncta in eâdem Quadratrice definiantur minùs obuia; quæ ſcilicet è diametro prioribus datis opponuntur.

PROP.

PROPOSITIO XI. *Theorema.*

SI centro A Quadratricis circulus deſcribatur Quadratricem ſecans in I, eiúſque Axem in H: ducatúrque chorda I H: ac è centro A radius ad punctum I deſtinetur: ac tandem per I recta I R Axi parallela agatur:

Dico Angulum A I R bifariam ſecari à chorda I H.



Demonſtratio.

Triangulum A I H eſt Iſoſceles. Ergo Angulus A I H æqualis eſt Angulo A H I. Sed Angulus R I H æqualis eſt alterno Angulo I H A (ſunt enim ex ſuppoſitione duæ lineæ I R & A H parallelæ) Ergo idem Angulus R I H æqualis eſt Angulo A I H. Angulus igitur A I R bifariam ſecatur à chordâ I H. Quare ſi centro A Quadratricis circulus, &c. Quod erat probandum.

PROPOSITIO XII. *Theorema.*

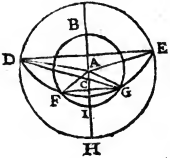
SI concentricos duos circulos D H E, F I G, quorum centrum eſt A, alius circulus D C E ſecuerit in D & F, & in E & G:

Dico arcus D E, E G ſecantis circuli inter duos circulos concentricos interceptos, eſſe æquales.

Demonſtratio.

Sit circuli ſecantis centrum B, quod cum centro A circulorum concentricorum iungatur communi diametro B C. ducantur etiam ad ſectiones è centro A rectæ lineæ A D, A E; & A F, A G. Quia igitur in circuli ſecantis diametro B C præter centrum eius B ſumitur punctum A; à quo ex vtraque parte lineæ ſumuntur æquales A D, A E; A F, A G (ſunt enim ſemidiametri concentricorum circulorum) erunt tam duo arcus C D, C E inter ſe æquales; quàm duo C F, C G, vt ex Prop. 7. Lib. 3. Elem. colligitur. Quare ſi ex æqualibus arcubus C D, C E demantur arcus æquales C F, C G: arcus reliqui D F, E G æquales erunt. Quare. Si concentricos duos circulos, &c. Quod erat probandum.

Scholium.



Si concentricorum duorum circulorum minor non ſecaretur, ſed tangeretur in I à tertio illo circulo: verum nihilominus foret arcus duos, inter circulos eſſe æquales, vt ex citata Prop. 7. Lib. 3. Elem. facilè eodem modo deduci poteſt.

Corollarium.

Ex propoſitione ſequitur ductas lineas DE, FG, cùm duos arcus æquales DF, EG connectant, eſſe parallelas. Si enim ducatur DG, duo anguli DGF, EDG duobus arcubus æqualibus DF, EG ad peripheriam inſiſtentes, erunt æquales per Prop. 27. Lib. 3. Elem. qui cum ſint atterni, conſtat DE, FG eſſe inter ſe parallelas.

PROPOSITIO XIII. *Theorema.*

SI centro A Quadratricis circulus deſcribatur Quadratricem ſecans in I & E per quæ puncta ducatur Applicata IE: Tum quouis in Quadratrice aſſumpto puncto O, ex eo per I, aut E circulus deſcribatur ſecans in F circulum centro A per I & E deſcriptum, Applicatam autem IE in G.

Dico ita eſſe Applicatam EI ad ſui partem GI, vt eſt arcus EFI ad arcum FI.

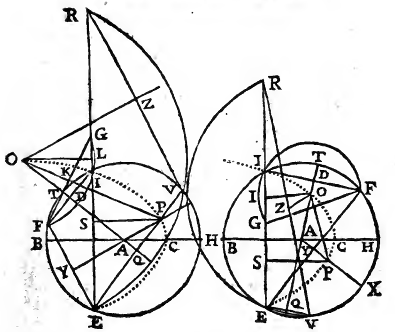
Præparatio.

Varij ſunt Propoſitionis huius caſus. Vel enim punctum O Quadratricis deſignatur inter punctum I & Quadratricis verticem C: vel in eius cornu vltra punctum I producto. Deinde vel circulus centro O deſcriptus tranſit per Applicatæ terminum I viciniorem, vel per remotiorem E, & in altero Quadratricis cornu poſitum.

Duos ergo caſus hoc vno in ſchemate complector, eadémque demonſtratione, quæ vtrique conuenit, declaro. Cùm ſcilicet punctum O vtroque modo in Quadratrice aſſumptum, citra ſcilicet, vel vltra punctum I, centrum ſtatuitur circuli per Applicatæ terminum I viciniorem vel in eodem cornu poſitum deſcribendi Hoc ſuppoſito ducatur linea IF, ac per O agatur radius AT, lineáque Axi parallela OL, ſiue

ſiue ad Applicatam I E perpendicularis.

Demonſtratio duplicis caſus prioris.



Cùm per punctum Quadratricis O ducatur radius A T, & Axi parallela O L: patet per generationem Quadratricis ita eſſe arcum E H F I ad arcum T I; vt eſt Applicata E I ad Applicatæ partem I L in vtroque hoc caſu. (Hic meminiſſe iuuerit quomodo ſuperiùs Prop.6. ope Applicatæ I E, & arcûs I H E Quadratricis verticem C includentis deſcriptus ſit arcus Quadratricis I C E: Quadratricis veró cornu vltra I productum in infinitum deſcribi ope arcus B I, & Applicatæ vltra I productæ vſque ad Quadratricis Aſſymptotum) ſed arcus I T, ita eſt ad arcum I F, vt eſt Applicatæ pars I L ad partem I G. Ergo ex æqualitate, ita eſt arcus E F I ad arcum I F à circulo ex centro O per I deſcripto abſciſſum: vt eſt Applicata E I ad ſui partem G I ab eodem circulo abſciſſam, vt fert propoſitio. Verùm probanda eſt minor, nimirum ita eſſe arcum I T ad arcum I F; vt Applicatæ pars I L ad partem I G. Quia igitur I L ſemiſſis eſt lineæ I G per Prop.3. Lib.3. Elem. eo quòd ad I G à circulo abſciſſam ducta ſit à circuli centro O perpendicularis O L; probandus eſt arcus T eſſe ſemiſſis arcus I F. Hoc autem conſtat, Nam, cùm à puncto O

in diametro A T præter centrum A aſſumpto ducantur lineæ (*ductæ* puta) O I, O F æquales (ſunt enim ſemidiametri circuli G I F) æquales erunt arcus T I, T E per Prop.7. Lib.3. Elem. Quare in hoc duplici caſu; in quo circulus centro O per viciniorem Applicatæ terminum I deſcribitur, conſtat propoſitionis huius veritas.

Demonſtratio duplicis caſus poſterioris.

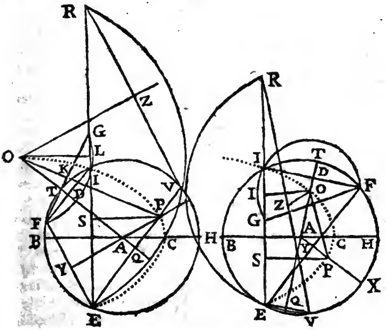
Repetito igitur ſchemate, in quo oſtenſum eſt, ſi centro O in Quadratrice aſſumpto ſiue citra, ſiue vltra terminum I Applicatæ viciniorem circulus G I F deſcribatur; ita ipſum ſecare Applicatam in G, & circulum centro A per I delineatum in F; vt Applicata E I, ad G I ita ſe habeat, vt arcus E F I ſe habet ad arcum F I ſi ex eodem centro O ſiue citra, ſiue vltra I in Quadratrice aſſumpto circulus deſcribatur per alterum Applicatæ terminum E à centro O remotiorem; oſtendi debet circulum hunc Applicatam I E, & circulum I F E ſecare proportionaliter. Quod ita concludetur.

Secet circulus centro O per E deſcriptus circulum I F E in V, & Applicatam in R oſtendi debet ita eſſe Applicatam E I ad I R, vt eſt arcus I H E ad arcum I B E V, clarum autem eſt ductam O L Axi parallelam bifariam ſecare in L chordam E R per Prop.3.Lib.3.Elem. Vnde clarum euadit lineam G E æqualem eſſe lineæ I R, ſiue centrum O citra I fuerit aſſumptum, ſiue vltra. Si enim O citra I ſtatuatur: cùm L E, L R ſint æquales; æquales item ſint L I, L G: Si ex L E demantur L G, & ex L R, demantur L I, reliquas G E, I R æquales eſſe neceſſe eſt. Si verò punctum O vltra I fuerit conſtitutum: Si ad L E addatur L G, & ad L R addatur L I; fient æquales I R, G E. Clarum denique eſt per Prop. proximè præcedentem, arcum I B E æqualem eſſe arcui F H V in priore caſu, cùm centrum O citra I ponitur; & cùm vltra I idem centrum O ſtatuitur, arcum F B E eſſe æqualem arcui I V. Hi ſiquidem arcus in vtroque caſu intercipiuntur inter concentricos circulos centro O deſcriptos. Quibus declaratis, ac ſuppoſitis.

Cùm arcus I B E (puncto O citra I exiſtente) æqualis ſit oſtenſus arcui F H V (*hîc character V puncto E vicinior intelligi debet, vt per ſe patet*) ſi addatur communis arcus E V: erit arcus I B E V æqualis arcui F H V E. Iam, cum ita ſit Applicata E I ad I G; vt arcus I H E ad arcum I T F: vt in demonſtratione caſûs prioris oſtenſum eſt, erit etiam per conuerſionem rationis Applicata I E ad ſui partem G E; vt arcus I H E ad ſui partem F H E: ſed linea G E æqualis eſt oſtenſa lineæ I R; & arcus F H E arcui I B E V probatus æqualis. Ergo ita

eſt

eſt Applicata I E ad lineam I R, vt arcus I H E ad arcum I B E V. Ergo ſecatur Applicata I E producta in R à circulo ex centro O citra punctum I exiſtente deſcripto, ſimiliter; vt ab eodem ſecatur in V circulus centro A per I deſcriptus.



Eadem ferè futura eſt demonſtratio cùm punctum O vltra I conſtituitur: Nam arcus F B E oſtenſus eſt æqualis arcui I V: addito ergo communi arcus E V; æquales erunt arcus F B E V, & I H E, Cùm autem ita ſit arcus I H E ad arcum I F; vt Applicata E I ad rectam I G vltra I productam, quemadmodum in priore demonſtratione declaratum fuit: erit etiam arcus F B E V arcui I H E æqualis ad arcum I F; vt Applicata E I ad lineam I G: & componendo. Ita erit arcus I B E V ad arcum I F; vt tota E G ad rectam I G: & per conuerſionem rationis. Ita erit arcus I B E V ad arcum F B E V; vt recta E G ad Applicatam E I: Et inuertendo. Ita erit arcus F B E V ad arcum I B E V, vt Applicata E I ad rectam E G, ſiue ad rectam I R rectæ E G æqualem nuper oſtenſam. Conſtat ergo circulum centro O vltra I in Quadratrice ſumpto deſcriptum per inferiorem Applicatæ terminum E, ſiue in altero Quadratricis cornu poſitum, ſecare in R Appli-

 catam

catam productam vltra I; ita, vt Applicata E I ita ſit ad I R; vt eſt arcus I H E ad arcum I B E V; Ita, vt tam arcus I B E V, quàm recta I R reſpondens ab eodem puncto I naſcantur. Siue igitur Quadratricis punctum O ſtatuatur citra, ſiue vltra terminum I Applicatæ, & circulus per punctum I vicinius, & in eodem, quo centrum O Quadratricis cornu ſtatutum, deſcribatur (qui duo caſus in priore demonſtratione exponuntur) ſiue deſcribatur ex eodem duplici centro O per remotiorem Applicatæ terminum E, & in altero Quadratricis cornu exiſtentem (quo de caſu duplici actum hîc eſt) verum ſemper futurum eſt ab eo circulo ex puncto Quadratricis O deſcripto per I, aut E, Applicatam I E, & circulum centro A per I & E deſcriptum, ſecari proportionaliter. Quare. Si centro A Quadratricis circulus, &c. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Hîc obſeruandum venit circulos ex centris O per Applicatæ terminum E remotiorem deſcriptos variis in locis ſecare poſſe circulum I B E H centro A delineatum. Poteſt ſcilicet mutuæ illius ſectionis punctum V in arcum E H incidere, vt in allato Paradigmate contigit. Poterit interdum in ipſum Applicatæ terminum E incurrere: cùm ſcilicet arcus F H E (cùm centrum O circuli ſecantis citra I exiſtit) æqualis fuerit arcui I B E: aut cùm centro O vltra I exiſtente arcus F B E, eidem arcui I B E fuerit æqualis: qui caſus tunc tantùm poteſt occurrere quando Applicata I E inter Quadratricis centum A, & C verticem ſtatuitur; & ab eâ abſcinditur arcus I H E ex circulo centro A per I, & E deſcripto ſemicirculo minor. Interdum etiam continget, vt punctum illud ſectionis V exiſtat inter B & E, ſed eadem in omnibus huiuſmodi caſibus demonſtratio inſtituetur, vt eam pluribus proſequi operæ pretium non videatur.

PROPOSITIO XIV. *Theorema.*

SI centro A Quadratricis circulis deſcribatur ipſam ſecans in I & E: & per I & E ducatur Applicata I E. Tum Applicata in G, & arcus I H E in F proportionaliter ſecentur: & per tria puncta G, I, F, hoc eſt, circa Triangulum G I F circulus deſcribatur, cuius centrum ſit O in eodem cum puncto I Quadratricis cornu.

Dico centrum O eſſe ad Quadratricem.

Expoſitio

Expoſitio & Præparatio.

Hæc eſt conuerſa prioris partis Propoſitionis Antecedentis, in quâ oſtenſum eſt circulum centro quouis O in Quadratrice, ſiue citra Applicatæ terminum I, ſiue vltra aſſignato per I in eodem cum O Quadratricis cornu deſcriptum ſecare in G ſiue ſupra, ſiue infra I, Applicatam; & in F circulum centro A per I deſcriptum, proportionaliter à punctis I & E in quibus circulus, & Applicata ſe interſecant: ita vt eadem ſit ratio arcûs E H I ad arcum I F, & Applicatæ I E ad eius partem abſciſſam I G. Hîc verò è contrario ſi ſupponatur eadem ratio arcûs I H E ad arcum I F, & Applicatæ I E ad I G; aſſeritur centrum O circuli per tria puncta G I F tranſeuntis in Quadratrice exiſtere. Quod vt probetur, ducantur rectæ I F, G F, vt fiat Triangulum I G F; cui circumſcribitur circulus, cuius centrum eſt O. Ducatur etiam recta A O; quæ producta arcum I F bifariam ſecabit in T; rectam autem I F bifariam item in D. Nam ductis O I, O F (ductas ſuppone) æqualibus, vtpote ſemidiametris circuli G I F ex puncto O in diametro A T extra centrum accepto; erunt arcus T I, T F æquales per Prop. 7. Lib. 3. Elem. atque adeò per Prop. 3. eiuſdem Lib. 3. recta I F bifariam, & ad Angulos rectos ſecabitur in D. Quibus declaratis, Aſſertio euadit manifeſta.

Demonſtratio.

Cùm ex ſuppoſitione ita ſit arcus I H E ad arcum I F; vt eſt Applicata I E ad eius partem I G. Sit autem arcus I F ad ſuî ſemiſſem I T, vt ad ſuî ſemiſſem I L eſt recta I G Ex æqualitate, ita erit arcus I E H ad I T, vt Applicata I E ad rectam I L. Quia verò per L ducitur Axi parallela L O, & ad T ducitur ſemidiameter A D in O ſecans parallelam: erit O in Quadratrice; vt Quadratricis fert generatio. Sed idem punctum O eſt etiam centrum circuli Triangulo G I F circumſcripti per Prop. 5. Lib. 4. Elem. duo enim eius Trianguli latera I F, I G bifariam, & ad angulos rectos in L, & D ſecantur; à lineis L O, & D O: atque adeò in earum concurſu O exiſtit centrum circuli G I F; quod idem punctum O oſtenſum eſt ad Quadratricem pertinere. Ergo. Si centro A Quadratricis circulus, &c. Quod probandum erat.

PROPOSITIO XV. *Theorema.*

SI centro A Quadratricis circulus deſcribatur Quadratricem ſecans in I & E: & per I & E ducatur Applicata I E: quæ in G ſecetur à circulo ex centro O in Quadratrice aſ-

ſumpto

ſumpto per terminum I Applicatæ deſcripto: à quo eodem circulo ſecatur proportionaliter in F arcus I H F. Vt Prop. 13. antecedente oſtenſum eſt: ponatur autem vt I E Applicata ad I R æqualem rectæ G E; ita arcus E H I ad arcum I B E V.

Dico circulum centro O per Applicatæ terminum E exiſtentem in altero Quadratricis cornu deſcriptum, tranſire per R & V. Hoc eſt centrum circuli per tria puncta R, E, V tranſeuntis, ſiue Triangulo R E V circumſcripti, eſſe idem centro O circuli G I F.

Demonſtratio.

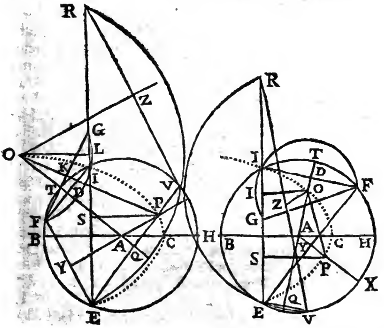
Cùm ex ſuppoſitione recta I R æqualis ſit rectæ G E: Si ex centro O circuli G I F ducatur perpendicularis O L ad Applicatam, bifariam in L ſecabit abſciſſam chordam G I: adeóque L R, L E æquales erunt: quo fiet, vt circulus centro O per E deſcriptus etiam per R tranſiturus ſit. Probandum reſtat tranſiturum per V. Id porrò conſtat per partem ſecundam Propoſitionis 13. eiúſque demonſtrationem: quâ oſtenſum eſt circulum centro per Applicatæ terminum E in oppoſito Quadratricis cornu exiſtentem deſcriptum, abſcindere arcum I B E V; ad quem ita ſe habet arcus I H E, vt Applicata I E ſe habet ad rectam I R. Cùm ergo hîc ita ſit arcus I H E ad arcum I B E V, vt I E ad I R ex hypotheſi: neceſſe eſt arcum centro O per E deſcriptum tranſire tam per R in Applicatâ, quàm per V in circulo I B E V; ſiue O eſſe centrum circuli Triangulo R E V circumſcripti. Itaque. Si centro A Quadratricis, &c. Quod erat probandum.

Corollarium.

Ex duabus proximè antecedentibus Propoſitionibus colligitur quodlibet Quadratricis punctum, veluti O, determinari poſſe per quatuor diuerſarum linearum communem concurſum. Ecce enim in eodem ſchemate oſtenſum eſt punctum illud O Quadratricis, centrum eſſe circuli Triangulo G I F circumſcripti ex ſuppoſitione quòd ita ſit Applicata I E ad eius partem I G ſiue infra, ſiue ſupra I aſſumptam; vt eſt arcus I H E ab Applicatâ abſciſſus ad arcum I F vel vltra I ad Læuam excurrentem, quando nimirum recta I G ad Applicatam ſupra I annectitur; vel citra I in ipſo arcu I H E repetitum, vt repeti neceſſe eſt, repetitâ infra I ſuper Applicatâ, eius parte I G. Tunc ergo, ſi Tranguli latera non tantùm duo I F, I G bifariam ſecentur in L & D, & per ſectiones lineæ ducantur ad ipſa latera perpendiculares;

quæ

quæ in centro O circuli circumſcribendi cõcurrunt per Prop.3.Lib.4. Elem. Sed etiam tertium latus G F biſecetur in K, ductâ etiam per K lineâ K P ad tertium illud latus G F perpendiculari, quæ pari cum duabus aliis iure ad centrum idem O contendet: atque ita tres lineæ in eodem concurrent. Quibus quarta accedet; ſi Triangulum alterum conſtruatur R E V; cuius Angulorum vnus ſit ad Applicatæ oppoſitum terminum E: duóque latera E R, E V Angulum E continentia ita determinentur in vtroque ſchemate; vt Applicata E I, & linea I R proportionales ſint arcubus I H E, & I E V (quam determinationem mox aperiam) Tunc enim tres lineæ latera huius trianguli R E V bi-



fariam & ad angulos rectos ſecantia in L,Q,Z, concurrent ad centrum O circuli Triangulo circumſcribendi: verùm earum duæ L O, Q O eædem ſunt cum illis ipſis, quæ circulo inſeruiunt circa Triangulum G I F circumſcribendo: vt enim L O bifariam ſecat latus I G trianguli G I F; ita etiam ſecat bifariam R E latus Trianguli R E V. Similiter, recta Q O bifariam ſecans latus E V eadem eſt cum rectâ D O bifariam ſecante latus I F prioris Trianguli G I F, cùm enim per Prop.12. arcus I E, F V ſint æquales, parallela eſt linea E V lineæ I F; quo fit, vt recta D O producta, ſit perpendicularis etiam ad rectam E V. Ergo,

D cum

Digitized by Google

cùm rectæ D O, & Q O in puncto O conueniant; neceſſe eſt vt vnicam lineam D Q componant: alioqui (quod abſurdum foret) duæ lineæ ab eodem puncto O ad eandem lineam E V perpendiculares duci poſſent. Sola ergo linea bifariam,& ad Angulos rectos ſecans in Z tertium Trianguli latus R V de nouo accedit ad punctum O Quadratricis, ope Trianguli R E V determinandum: ſicut recta K O bifariam & angulos rectos ſecans in K latus G F Trianguli G I F, ſola de nouo idem punctum O Quadratricis deſignat; duabus aliis L O, A O punctum illud O ex generatione Quadratricis determinantibus. Facilè autem definitur arcus I E V, ad quem ita ſe habeat arcus I H E, vt ſe habet Applicata I E ad rectam I R, ex dictis: ſed idem per compendium hîc, vbi occurrit, abſoluam hoc modo. Arcui I B E æqualem arcum F H V in vno ſchematum, in altero verò arcum F I V conſtitue. Ita enim erit Applicata I E ad lineam I R; vt eſt arcus I H E ad arcum I B E V. Nam ita eſt Applicata I E ad G E, vt arcus I H E ad arcum ITF, vt ex Propoſitionibus ſuperioribus conſtat. Sed poſita eſt recta I R in vtroque hoc ſchemate æqualis rectæ G E:& in figurâ, in quâ punctum O Quadratricis citra I ſumitur intra circulum, arcus I E V æqualis eſt arcui F V E; eſt enim ex ſuppoſitione arcus F V æqualis arcui I B E. Ergo addito communi arcu E V, æquales fient arcus I E V, & F V E. In hoc itaque caſu ita eſt Applicata I E ad rectam I R,vt eſt arcus IHE ad arcum I E V. Rectè igitur in hoc caſu, ſi ponatur arcus F V æqualis arcui I B E, deſignatur arcus I E V, ad quem ita ſe habeat arcus I H E, vt ſe habet Applicata I E ad rectam I R. In altero verò caſu, in quo punctum O Quadratricis vltra I extra circulum ſtatuitur,idem probatur in hunc modum. Applicata I E ad rectam I R, vt proximè monui, ita eſt vt arcus I H E ad arcum F I V E. Sed arcus F I V E eſt æqualis arcui I F E V.Nam ex ſuppoſitione æquales ſunt duo arcus I V & F E. Ergo vtriſque, additis duobus communibus arcubus I F & E V; æquales fient arcus I F E V, & F I V E. Ergo ita eſt arcus I H E ad arcum I F E V; vt Applicata I E ad rectam I R. Rectè igitur etiam in hoc caſu definitum eſt punctum V, vt ſtatuatur Triangulum R E V, cui circumſcriptus circulus centrum nanciſcatur O in Quadratrice productâ vltra I. Hîc porrò rurſus obiter obſerua, quomodo in productâ Applicatâ vltra I ſumenda ſit linea (vt I R) quoties arcus ei reſpondens ab eodem puncto I ad læuam Applicatæ aſſumitur; contrà verò ſumi debeat infra punctum I, quoties arcus ab eodem puncto I ad dextram Applicatæ numerantur. Sic enim oſtenſæ ſunt in vtroque hoc ſchemate rectæ E I, I R proportionales arcubus I H E, & I B E V: quorum prior reſpondet Applicatæ I E infra I poſitæ; poſterior autem

(licèt

Digitized by Google

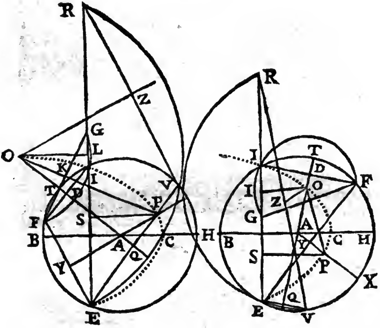
(licèt vltra E vſque ad V excurrat in arcu E H I ad dextram Applicatæ I E) reſpondet, & homologus eſt rectæ I R in Applicatâ vltra I productâ aſſumptæ.

PROPOSITIO XVI. *Theorema.*

SI ex centro A Quadratricis circulus deſcribatur ſecans Quadratricem in I & E; & per I & E ducatur Applicata I E: quæ demum, & arcus abſciſſus I H E proportionaliter ſecentur infra I, illa in G, hic in F; in hoc primo caſu.

Dico centrum circuli per tria puncta E, G, F deſcripti, ſiue Triangulo E G F circumſcripti eſſe ad Quadratricem.

Præparatio.



Ducantur rectæ F G, F E; vt fiat Triangulum F G E: cuius omnia latera bifariam, & ad Angulos rectos ſecentur à lineis, quæ in centro P circuli Triangulo F G E circumſcribendi concurrunt, vt fert Prop. 3. Lib. 4. Elem. cuiuſmodi ſunt K P, S P, Y P. Oſtendendum

itaque eſt punctum P eſſe ad Quadratricem.

Demonſtratio.

Cùm ex ſuppoſitione Applicata E I ita ſit ad ſuî partem I G, vt arcus E H I eſt ad ſuî partem I F. Conuertendo. Ita erit Applicata E I ad ſuî partem E G; vt eſt arcus E H I ad ſuî partem F H E: & ſumptis conſequentium ſemiſſibus G S, F X (qui arcus F X determinatur à recta Y P bifariam & ad angulos rectos ſecante in Y chordam F E: eadem enim Y P tranſibit per centrum A, & arcum F E bifariam in X diuidet per Prop. 3. Lib. 3. Eucl.) ita erit Applicata E I ad E S, vt arcus E H I ad arcum E X. Ergo ducta per S recta S P Axi parallela, ſiue Applicatæ E I perpendicularis ductúſque radius A X ſe mutuò ſecabunt in P ad Quadratricem, vt patet ex generatione Quadratricis. Quod idem hoc etiam modo concludere licebit. Cùm ita ſit E I ad E S, vt arcus E H I ad arcum E X: erit per conuerſionem rationis, ita Applicata E I ad I S, vt arcus E H I ad arcum I H X. Ergo per generationem Quadratricis radius A X, & Axi parallela per S ducta ſe interſecare debent in puncto, quod ſit ad Quadratricem, quale eſt P. Euidens demum eſt rectam quæ bifariam, & ad angulos rectos ſecat in K tertium Trianguli F G E latus F G, neceſſariò in puncto P ad Quadratricem exiſtente, vt probatum eſt, cum duabus aliis rectis lineis coituram. Quare. Si ex centro A Quadratricis circulus &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVII. *Theorema.*

Iiſdem poſitis. Deſcripto ſcilicet ex centro A Quadratricis, circulo; qui ſecet Quadratricem in I & E, ductáque Applicatâ I E: quæ producta vltra I ita ſecetur in G; vt productus arcus E H I, ſecatur in F: ac demum ductâ F E; vt fiat Triangulum G F E.

Dico. Centrum circuli Triangulo G F E circumſcripti eſſe ad Quadratricem.

Præparatio.

Diuidantur bifariam in S & Y duo Trianguli G F E latera G E & F E: & per hæc diuiſionum puncta S & Y ducantur ad ipſa latera perpendiculares S P, & Y P: quarum illa erit Axi parallela; hæc verò tranſibit per centrum A, productáque ſecabit in X bifariam arcum F I X E per Prop. 3. Lib. 3. Elem. erit autem P, in quo S P, Y P concurrunt, centrum circuli Triangulo G F E circumſcripti: in quo cum duabus lineis P S, P Y etiam conueniet recta K P bifariam & ad An-

gulo

Digitized by Google

gulos rectos ſecans in K tertium Trianguli latus G F. Probandum itaque eſt punctum hoc P eſſe ad Quadratricem.

Demonſtratio.

Cùm ex hypotheſi ita ſit Applicata E I ad I G; vt arcus E X I ad arcum I F: erit componendo, vt recta E G ad I G; ita arcus E X I F ad arcum I F: & Antecedentium dimidiis acceptis, ita erit per Prop. 15. Lib. 5. Elem. recta S G ad I G; vt arcus X I F ad arcum I F. Et diuidendo, Ita erit S I ad I G, vt arcus X I ad I F. & permutando. Ita erit recta S I ad arcum X I, vt recta I G ad arcum I F. Sed vt I G ad arcum I F; ita eſt ex ſuppoſitione Applicata I E ad arcum I H E (nam ex ipſa ſuppoſitione ita eſt Applicata I E ad I G, vt arcus I H E ad arcum I F: & permutando. Ita eſt I E ad arcum I H E, vt recta I G ad arcum I F) Ergo ita eſt recta I S ad arcum I X vt Applicata I E ad arcum I H E. Quare ex generatione Quadratricis, & iuxta traditam Prop. 3. eius deſcriptionem, ſi per punctum S ducatur Axi parallela S P, eam radius è centro A per X eductus in puncto,(quod eſt P) ſecturus eſt ad Quadratricem poſito: erítque P centrum circuli Triangulo G F E circumſcribendi & in eodem recta K P ad latus G F (quod bifariam ſecat) perpendicularis cum duabus lineis S P, A P conueniet. Ergo Iiſdem poſitis &c. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Cùm in hoc vtroque caſu linea G F connectens puncta G & F, in quibus Applicata I E, & arcus I H E (qui vltra I vſque ad F, ſicut Applicata vltra I vſque ad G producitur in eo caſu, in quo punctum O Quadratricis vltra I reperitur) proportionaliter ſecantur : ſit latus duobus Triangulis G I F, G E F commune : hinc ſequitur, eo bifariam diuiſo in K, & per K ductâ lineâ ad ipſum perpendiculari, eius ope duo Quadratricis puncta, cuiuſmodi ſunt O & P, deſignari : quorum illud eſt centrum circuli per Applicatæ terminum I delineatum; hoc autem centrum eſt alterius circuli per eiuſdem Applicatæ alterum terminum E deſcribendi : vel etiam viciſſim punctum O eſt centrum circuli per E tranſeuntis, qualis eſt R E V, aut R V E; punctum verò P eſt centrum circuli, qui per I deſcriberetur, Applicatámque vltra E productam ſecaret.

PROPOSITIO XVIII. *Theorema.*

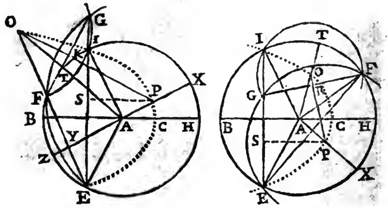
SI ex centro A Quadratricis, circulus deſcribatur, ipſam in punctis I & E interſecans; per quæ ducatur Applicata. Tum centro O quouis in Quadratrice aſſumpto circulus per

Applicatæ terminum I delineetur ſecans in G Applicatam, & in F arcum I H E (productum in altero duorum caſuum.) Deinde per tria puncta G, F, E circulus deſcribatur: cuius centrum ſit P. Ac denique per hæc duo circulorum centra O & P radij educantur ex centro A circulum I H E ſecantes in T & X.

Dico primò. Centrum P circuli per tria puncta F, G, E deſcripti cadere in Quadratricem.

Dico ſecundò. Arcum TX æqualem eſſe arcui I H inter Applicatam, & Axem intercepto: ſiue Angulum T A X, æqualem eſſe Angulo I A H.

Demonſtratio.



Prima quidem Aſſertionis huius pars clara eſt per Prop. antecedentem: quâ conſtat centrum P circuli Triangulo G F E circumſcripti eſſe ad Quadratricem: determinatur enim à duabus lineis, P S Axi parallelâ, & A X; quarum illa bifariam ſecat & ad angulos rectos Trianguli latus G E; hæc autem arcum F X E bifariam ſecat in X, dum latus F E Trianguli bifariam, & perpendiculariter ſecat in Y, ac per centrum A ducitur: quibus accedit tertia linea O P ſecans in K bifariam, & perpendiculariter tertium eiuſdem Trianguli latus F G, centráque O & P connectit circulorum, qui Triangulis F G I, F G E circumſcribuntur.

Secunda verò pars, quòd arcus T X æqualis ſit arcui I H, ita euadet

det manifeſta. Cùm æquales ſint (ſi ducantur) rectæ O I, O F (ſunt enim ſemidiametri circuli G I F) ducantur autem ex puncto O in diametro A T circuli I H E extra eius centrum A poſito: erunt arcus T I, T F ex vtráque parte æquales iuxta Prop. 7. & 8. Lib. 3. Elem. Sunt verò etiam æquales arcus X F, X E, vel propter eandem rationem: nam rectæ P F, P E, ſi ducantur, ſunt æquales, & ex puncto P diametri A X extra centrum A poſito egrediuntur: vel quia recta A P bifariam ſecans chordam F E in Y, bifariam etiam ſecat in X arcum F X E. Quod cùm ita ſit. In eo caſu, in quo duo centra O & P intra circulum I H E exiſtunt, ita declaratur Aſſertio. Arcus I T F vnà cum arcu F X E totum arcum I H E componit: itaque ſi arcûs I F ſemiſſis T F, & arcûs F X E ſemiſſis item F X ſumatur, & ad arcum T F addatur, vt fiat totus arcus T F X; haud dubium, quin huiuſmodi arcus T F X ſit pars dimidia totius arcus I H E. Sed arcus I H dimidia pars etiam eſt eiuſdem arcûs I H E. Ergo arcus T F X æqualis eſt arcui I H, atque adeò angulus T A X æqualis angulo I A H, vt aſſeritur.

Cùm verò ambo puncta O & P circulo I H E non includuntur, vt habet alter caſus: eodem ferè modo Propoſitum includitur. Totus arcus I B E in duas partes I T F, F Z E diuiditur, ſi igitur ex arcu I F dimidia pars ſumatur T F, & ad arcum F Z, qui dimidia pars eſt reliqui arcus F E, addatur; vt fiat totus arcus T F Z: hic erit dimidia pars totius arcûs I B E; atque adeò æqualis arcui I B, vel E B. Quare. Si ex ſemicirculo B I H, arcus I B; & ex ſemicirculo Z T X, arcus Z T dematur: reliqui fient arcus I H, & T X æquales, Anguliſque T A X, & I A H æquales erunt. Quare. Si ex centro A Quadratricis &c. Quod erant probandum.

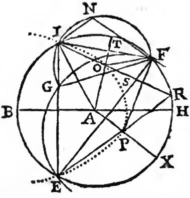
PROPOSITIO XIX. *Theorema.*

SI centro A Quadratricis circulus deſcribatur ipſam ſecans in punctis I & E; per quæ agatur Applicata I E. Tum in A angulus conſtituatur T A X æqualis angulo I A H, quem Axis A H cum radio A I continet: ſiue arcus T X arcui I H æqualis ſumatur, radiis A T, A X Quadratricem ſecantibus in O & P intra circulum I H E.

Dico. Si ex applicatæ termino I per punctum O in eodem cornu Quadratricis poſitum: & ex altero Applicatæ termino E per punctum alterum P rectæ educantur I O, E P. eas in aliquo puncto R circumferentiæ circuli I H E ſimul coituras.

Præparatio.

Præparatio.



Centro O per I circulus deſcribatur ſecans Applicatam quidem in G, circulum verò I H E in F: & ſimiliter centro altero P per alterum Applicatæ terminum E deſcribatur circulus: qui neceſſariò per puncta G & F; in quibus Applicata, & circulus I H E à priore circulo ex O per I deſcripto ſecantur, tranſiturus eſt. Vt ex præcedentibus Propoſitionibus conſtat. Ducantur etiam rectæ O F, P F: ac demum duæ I N, F N ad quodlibet punctum N circumferentiæ circuli ex centro O per I deſcripti.

Demonſtratio.

Cùm Quadrilaterum I N F G circulo ex centro O per I deſcripto contineatur: erunt duo eius anguli oppoſiti I N F, I G F æquales duobus rectis per Prop. 22. Lib. 3. Elem. hoc eſt, duobus rectis æqualibus F G I, F G E. Ergo angulus F G E æqualis eſt angulo F N I. Segmenta igitur I N F, & E G F, in quibus exiſtunt æquales illi anguli, ſimilia ſunt per defin. 10. Lib. 3. Elem. vnde ſequitur Angulos F O I, F P E ad centrum arcubus ſimilibus I N F, E G F inſiſtentes, eſſe inter ſe æquales. Quare, cùm duo Triangula F I S, R E S duos angulos F I S, R E S inter ſe, duóſque ad verticem I S F, & E S R æquales habeant: erunt etiam duo I F S, E R S inter ſe æquales. Cùm ergo angulus I F E ſit in ſegmento I H E, in eodem etiam erit angulus I R E per Prop. 21. Lib. 3. Elem. hoc eſt, duæ rectæ I O & E P productæ in peripheriâ I H E ſimul coibunt. Quare in hoc caſu, in quo duo puncta O & P intra circulum I H E includuntur; ſiue in quo angulus T A X æqualis angulo I A H, radiis continetur A T, A X intra ſegmentum I H E; vera eſt Propoſitio.

PROPOSITIO XX. *Theorema.*

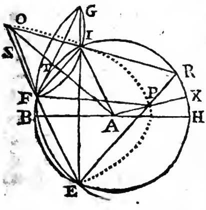
Iiſdem poſitis. Si ita ſumatur arcus T A X æqualis arcui IH; vt radius A T quadratricem ſecet in O vltra punctum I: radius autem A X eandem in P ſecet citra I, ſiue intra circulum I H E: aut ſi angulo I A H æqualis fiat angulus O A X, ita vt duarum linearum angulum illum O A X continentium altera,

nempe

nempe A O Quadratricem ſecet vltra I in O; Altera autem citra I in P: & recta ex O per I tranſiens producatur, donec in R ſecet circulum I H E.

Dico, Si per alterum Applicatæ terminum E per P traducatur linea recta: ipſam in circumferentiæ puncto R coituram cum rectâ O R per I tranſeunte.

Præparatio.



Ducantur lineæ P G, P F: item A I, A F: traitem O G, O F: traiiciatur autem ex E per F recta E F donec in S occurrat lineæ R I O productæ.

Demonſtratio.

Duo Triangula O I F, F P E ſunt æquiangula. Oſtendo. Angulus F O I ad centrum O circuli F I G per 20. Prop. Lib. 3. Elem. duplus eſt anguli F G I eidem arcui I F inſiſtentis, cui inſiſtit angulus F O I ad centrum, ille autem ad circumferentiam. Eſt autem angulus F P E itidem duplus eiuſdem anguli F G I, aut F G E. Hic enim eſt ad circumferentiam circuli E F G centro P per E deſcripti: ille verò F P E eſt ad centrum; & vterque eidem arcui E F inſiſtit. Ergo æquales ſunt anguli F O I, F P E. Quia verò latera circa æquales illos angulos ſunt proportionalia, nempe æqualia: erunt duo ipſa Triangula F O I, F P E æquiangula per Prop. 6. Lib. 6. Elem. eritque angulus O I F æqualis angulo F E P. Hoc poſito, attendamus duo Triangula S I F, S E R, quorum communis eſt angulus S: angulus autem S I F oſtenſus eſt æqualis angulo S E P. Ergo reliquus angulus tertius S F I, tertio reliquo angulo S R E trianguli O E R eſt æqualis. Hinc ergo fit, vt duo anguli I R E, I F E Quadrilateri I F E R, qui ſunt oppoſiti, ſint duobus rectis æquales, duobus enim I F E, I F S (qui ſunt duobus rectis æquales) ipſi ſunt æquales. Ergo circulus Quadrilatero huic I F E R circumſcribi poteſt: qui alius non eſt, quàm circulus I H E centro A delineatus, cùm tranſeat iam per tria puncta I, F, E. Conſtat ergo rectam E P, ſi producatur, non alio in puncto coituram cum productâ O I, quàm in ipſomet puncto R, in quo recta O I circulum I H E interſecat. Quare, Iiſdem poſitis. Si ita ſumatur arcus &c. Quod erat demonſtrandum.

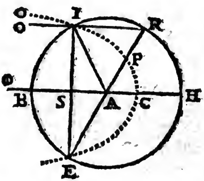
E PROP.

PROPOSITIO XXI. *Theorema.*

Iiſdem aut ſimilibus poſitis. Sit nimirum quadratricis centrum A, Axis BH, Applicata quæcunque IE. Ponatur autem arcui IH circuli IHE centro A per I & E deſcripti, arcus æqualis BR, ſiue angulo HAI angulus æqualis BAR: ita vt radius AR quadratricem ſecet in P: quo in caſu alter radius angulum BAR angulo IAH æqualem continens eſt ipſe Axis AB: qui in infinitum productus quadratricem in infinitum productam ſecare concipiatur in puncto O, quod, vt in ſuperioribus caſibus contigit, reſpondet quadratricis puncto P.

Dico. Si ex eo infinitè diſtanti puncto O, per ſuperiorem Applicatæ terminum I recta linea ducatur; ducatur autem & altera linea ex altero Applicatæ termino E per punctum P: has duas lineas in eodem puncto circumferentiæ IHE, vt in R coituras.

Præparatio.



Linea illa ex infinito ſpatio O per punctum I deducta, eſt neceſſariò ipſi Axi BH parallela: illa enim, & Axis BH productus ad Quadratricem infinitè productam ſe mutuò ſecant in puncto illo O infinitè diſtanti, hoc eſt, nunquam; hoc eſt, parallelæ ſunt lineæ illæ. Ducatur ergo per I linea OI Axi OA parallela: quæ ſecet in R arcum IHE; & ex puncto E per punctum P Quadratricis recta extendatur EP. Probandum eſt rectam hanc, ſi producatur vltra P, cum recta OI coituram in eodem puncto R circumferentiæ, in quo ipſa ſecatur à rectâ OI Axi parallelâ.

Demonſtratio.

Cùm ex hypotheſi arcus IRH, & RIB ſint æquales: dempto communi

muni arcu I R, æquales erunt arcus I B & R H. Ergo ducta I R parallela eſt Axi B H: producta igitur O I Axi perinde parallela coaleſcet cum rectâ I R, & in puncto R ſecabit arcum I R H; in quo eundem arcum ſecare ſupponitur radius ex centro A per punctum P Quadratricis traductus. Probandum itaque nunc eſt radium A R productum cadere in Applicatæ terminum E: ſic enim conſtabit rectam ex termino E Applicatæ per Quadratricis punctum P traductam coire in puncto R, in quo altera linea ex puncto O Quadratricis infinitè diſtanti per alterum Applicatæ terminum I ducta arcum I H ſecat. Id porrò probatur. Duo Triangula A S I A S E, cùm habeant tria latera tribus lateribus ſingula ſingulis æqualia, æquiangula ſunt: angulus ergo S A E eſt æqualis angulo S A I. Sed angulus S A I eſt æqualis angulo R A H (ſunt enim arcus R H, I B oſtenſi æquales) ergo æquales ſunt duo anguli S A E, R A H: qui cùm ſint ad verticem, vnica recta linea ex duabus A R (ſiue A P) & A E conflatur. Sicut ergo recta A P producta concurrit cum rectâ O I productâ in puncto R arcûs I H; ita etiam E P producta cum eâdem O I in eodem arcûs I H puncto R concurret. Conſtat ergo etiam in hoc caſu, in quo Axis A B in infinitum produci, & in puncto infinitè diſtanti Quadratricem ſecare concipitur, ex quo recta O I per terminum I traiicitur ſecans in R arcum I H; etiam rectam ex oppoſito termino E Applicatæ per P traiectam arcum I H in eodem puncto R ſecare. Quod erat probandum.

PROPOSITIO XXII. *Theorema.*

POſitis adhuc ſimilibus circulo ſcilicet centro A Quadratricis deſcripto, qui Quadratricē ſecet in I & E, per quæ ducatur Applicata I E. Tum puncto P in Quadratrice aſſumpto vltra I fiat ad centrum A angulus P A O æqualis angulo I A H, ducto radio A O, qui ſecet quadratricem in O in eodem cornu ſuperiore in quo exiſtit P.

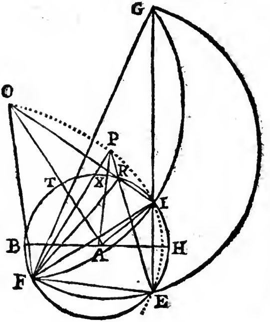
Dico. Si ex puncto O ad terminum I Applicatæ ſuperiorem recta linea ducatur ſecans in R circumferentiam circuli centro A deſcripti; & ex altero puncto P ducatur recta ad alterum Applicatæ terminum E: hanc rectam per R tranſituram.

Præparatio.

Centro O per I circulus deſcribatur ſecans in G productam Appli-

catam I E, circulum verò I H E B in F: deſcribatur autem centrò P per E alter circulus, qui per G & F tranſiturus eſt per Prop. 18. ducantur demum rectæ F P, F G, F E; item O I, O F, F I.

Demonſtratio.



Tam angulus F P E Trianguli P E F, quàm angulus F O I Trianguli O I F duplus eſt anguli F G E. Patet. Nam angulus F G E eſt ad circumferentiam circuli G I F centro O deſcripti: idémque eſt ad circumferentiam circuli, qui centro P per E & F deſcribitur. Ergo per Prop. 20. Lib. 3. Elem. tam angulus F O I, quàm angulus F P E eſt duplus anguli F G E iiſdem arcubus F I, F E, quibus illi ſubtenduntur, inſiſtens; æquales ergo ſunt anguli F O I, F P E: ergo ipſa Triangula ſunt æquiangula, cùm habeant circa æquales angulos latera proportionalia, nempe æqualia: ita vt angulus O I F æqualis ſit angulo P E F. Ducatur linea recta R F à puncto R, ad F, in quo latus O I Trianguli O I F circulum ſecat: erit angulus R I F in ſegmento R I E F. At in eodem ſegmento eſſe neceſſe eſt angulum PEF, patet. Nam, cùm angulus PEF æqualis angulo R I F, ſit ad punctum E, per quod tranſit circulus R I E F; conueniant autem duæ lineæ F I, F E ad punctum F eiuſdem circuli: duæ reliquæ I R, P E; quæ cum lineis F I, FE angulos R I F, P E F inter ſe æquales continent in eodem eiuſdem circuli puncto concurrent, vt vterque ille angulus æqualis R I F, P E F in eodem poſſit eſſe ſegmento, cùm ergo linea O I ſecet in R circulum: non in alio, ſed in eodem puncto R linea P E eundem circulum ſecare poteſt. Si enim in alio, quàm R recte P E circulum ſecare ſiue citra, ſiue vltra R aſſereretur; aut maior, aut minor angulo R I F dicendus foret angulus P E F, vt pote in minore vel maiore ſegmento, quàm ſit ſegmentum

R I E F

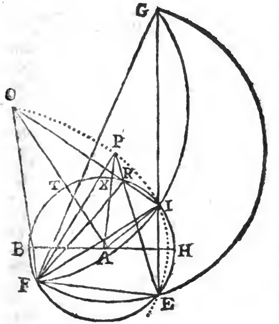
RIEF angulum capiens RIF, conſtitutus. Quod eſſet abſurdum: cùm æquales probati ſint anguli RIF & PEF. Quare. Poſitis adhuc ſimilibus. Circulo ſcilicet &c. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Propoſitionibus quatuor præcedentibus, quatuor diuerſos caſus expoſui; in quibus iiſdem poſitis, Applicatâ nimirum quacunque IE, ſiue ea ſtatuatur extra ſagittam AC Quadratricis, ita vt axem ſecet vltra centrum A, vt ſchemata Propoſitionum 19. 20. 21. referunt; ſiue ſagittam ipſam ſecet, & centrum inter, & verticem Quadratricis interiiciatur, vt in Propoſitione proxima 22. fieri contigit. Poſito etiam arcu TX æquali arcui IH, ſiue angulo TAX æquali angulo IAH, in prioribus duabus Propoſitionibus; in Propoſitione autem 22. poſitus eſt arcus RT æqualis arcui IH, & in Prop. 21. eidem arcui IH æqualis eſt ſtatutus RIB. Iis, inquam, poſitis oſtendi quatuor in diuerſis caſibus quomodo concurſus duarum linearum ex Quadratricis punctis O & P in quibus à radiis arcum æqualem arcui IH complectentibus Quadratrix ipſa ſecatur, per Applicatæ terminos I & E traiectarum in ipsâ exiſtat circumferentia circuli, qui ex centro A per Applicatæ terminos deſcribitur. Primus caſus, de quo agitur Prop. 18. aut 19. eſt cùm duo puncta Quadratricis O & P cadunt intra circulum, ſiue in arcu Quadratricis ab Applicatâ IE ad verticem C abſciſſo. Quò quidem in caſu neceſſe eſt, vt horum punctorum duorum alterum in vno Quadratricis cornu exiſtat; alterum verò in altero: cùm arcus TX æqualis eſſe debeat arcui IH; ſi punctum T à puncto I receſſerit; etiam tanto ſpatio punctum X à puncto H recedere neceſſe eſt; atque adeò punctum P in inferiore Quadratricis cornu conſtitui. Caſus ſecundus ille eſt qui Prop. 20. exponitur: cùm ſcilicet arcus TX arcui IH æqualis, ſiue angulus TAX æqualis angulo IAH radiis continetur huiuſmodi; vt alter, nempe AX, ſupra Axem AH, ſiue inter I & H ducatur; quo in caſu alter AT vltra I ducendus erit, vt patet; ſicque fiet vt ab iis idem Quadratricis cornu à vertice C per I extenſum ſecetur in O & P. Ad hunc autem referri debet caſus tertius de quo agitur Prop. 21. Cùm radius quidem vnus (qui in ſchemate eſt AR) arcum æqualem arcui IH continentium ſtatuitur inter I & H, & Quadratricem ſecat in P: alter verò eſt ipſe axis AB in infinitum productus verſus B; qui idem cornu Quadratricis à vertice C per I porrectum in infinitum in O ſecare cenſeri poteſt: quo etiam in caſu oſtenſus eſt linearum per terminos I & E Applicatæ à punctis O & P ductarum concurſus in circulum IHE incidere. Quartus denique caſus Prop. 22. declaratus ſupponit radios continentes arcum æqualem

arcui I H (vt ſunt A X, A T) ſecare Quadratricem in P & O vltra terminum I Applicatæ: quam tunc inter centrum A & verticem C axem ſecare neceſſe eſt, vt ſcilicet angulus I A H ſit recto minor: neque enim aliàs poſſet ſumi in arcu IB arcus X T arcui I H æqualis, vt patet. Ad hunc autem caſum pertinet ille, in quo terminus ipſe I Applicatæ aſſumeretur; vt ex eo arcus æqualis arcui I H abſcinderetur in arcu I B. Tùnc autem illud ipſum punctum I eſſet punctum concursûs linearum à ſectionibus Quadratricis per terminos I & E Applicatæ ductarum. Nam à puncto I ad terminum E linea duci deberet, quæ ipſamet foret Applicata I E; & à ſectione alterâ Quadratricis ad Applicatæ terminum I altera linea duceretur priorem vtique I E ductam in ipſo puncto I circuli I H E ſectura. In hoc porrò caſu, qui Applicatam inter centrum A Quadratricis eiúſque verticem C collocari poſtulat, vt ſit arcus I H Quadrante minor, ſiue angulus I A H ſit acutus: ita arcui I H ſumi poſſet æqualis in arcu I B; vt B foret eius terminus, & ipſe Axis A B alter duorum radiorum arcum arcui I H æqualem complectentium. Quo poſito idem contingeret, quod Prop. 21. contigit, eodémque modo demonſtraretur, concurſus ſcilicet linearum à ſectione Quadratricis per terminos Applicatæ I E ductarum in eo puncto circuli haberetur; in quo alter radius ipſum circulum ſecaret: quemadmodum in ſchemate citatæ Propoſitionis concurſus linearum O I & E P cadit in ipſum circuli punctum R, per quod radius A R arcum R B arcui I H æqualem abſcindens ducitur.

Vnus ſupereſt caſus, cuius nulla facta eſt in ſuperioribus mentio. Poteſt ſcilicet angulus angulo I A H ſuperiorum ſchematum æqualis, ſiue arcus arcui I H æqualis ita conſtitui: vt eum complectentes radij Quadratrici occurrant vltra Applicatam I E; ſed ita vt vnus vnum Quadratricis cornu à vertice C per I extenſum, alter alterum ab eodem vertice per E tranſiens interſecet. An igitur in hoc caſu lineæ ab iis Quadratricis ſectionibus per Applicatæ terminos I & E traiectæ, in aliquo circuli I H E puncto, vt in allatis caſibus contingere oſtenſum eſt, concurſuræ ſunt? haud quaquam, cùm enim, vt ex ſuperioribus aliquoties repetitis conſtat, præſertim in generatione celeberrimæ huius lineæ, & in ſcholio 2. Propoſitionis 6. pars illa Quadratricis, quæ vltra Applicatam ex vtrâque parte in infinitum excurrit, generetur ope arcûs I B E ab Applicata I E abſciſſi, & ope Applicatæ vltra I & E productæ vſque ad Aſymptotos, ſiue donec tota Applicata diametro generanti ſit æqualis: circulus, qui ex quolibet puncto cornu vnius, V. G. ex puncto O in proximo ſchemate, per Applicatæ terminum I deſcribitur, ſecabit in G Applicatam vltra I productam: at verò circulus



culus ex puncto quouis alterius cornu per terminum E delineatus Applicatam ſecturus eſt vltra E productam: quo fit, vt hi duo circuli nequaquam poſſint aliquando ſecare ſeſe mutuò in eodem Applicatæ puncto, (quale eſt G in hoc ſchemate, in quo circuli centris O & P ad idem cornu pertinentibus per I & E ducti ſe interſecant in G) deficiente autem hac communi horum duorum circulorum & Applicatæ interſectione: præſcinditur argumentum, quo duorum Triangulorum OIF, PEF ſimilitudo, atque adeò æqualitas angulorum AIF, PEF concluditur: & ex eo hos angulos in eodem ſegmento exiſtere: vnde tandem colligatur lineas angulos illos æquales ad peripheriam conſtituentes ſecare ſeſe debere, in ipſis ſegmenti angulos æquales continentis terminis.

Cæterùm. Ex hac linearum per Applicatæ terminos I & E ex Quadratricis punctis O & P ita determinatis, vt à me determinata ſunt, traductarum ſectione mutuâ ad peripheriam I H E ſuo loco deducetur Quadratricis facultas inſignis: vt propterea illam paulò pluribus proſequi, &, quoad fas fuit, apertè exponere, operæ pretium viſum fuerit. Sed ecce alia, quæ ex iis conſequuntur, non minùs obſeruanda.

SCHOLIVM SECVNDVM.

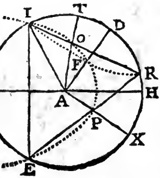
Conuerti poſſunt proximæ Propoſitiones hoc modo.

SI centro A Quadratricis circulus deſcribatur ipſam ſecans in I & E: & ex punctis I & E rectæ emittantur ſeſe in R ad circuli peripheriam ſecantes; quæ Quadratricem ipſam in O & P

& P ſecent; & per puncta O, & P à centro A radij A T, A X emittantur.

Dico' Angulum T A X æqualem eſſe Angulo IAH: quem radius A I cum Axe A H continet: ſiue arcum T X æqualem eſſe arcui I H.

Demonſtratio.



Hìc vnicum ſchema propono, quod ad Propoſitionem 19. pertinet: in quo puncta O & P, in quibus Quadratrix ſecatur à lineis I R, E R; cadunt intra circulum, vt fert citata Propoſitio: verùm non minùs rectè de cæteris caſibus Prop. 20. 21. 22. explicatis hæc Aſſertio poteſt enunciari: quam in hunc modum demonſtro. Si arcus TX arcui I H minimè ſit æqualis: ſit T X maior, V. G. quàm I H, fiat ergo huic æqualis D X ducto radio A D, qui Quadratricem ſecet in F: ac per F ex puncto I recta ducatur. Hæc cum rectâ E R ex puncto E per P traiectâ concurret in peripheriâ circuli I H E per Prop. 19. 20. &c. Ergo in puncto R, in quo recta E P circulum ſecat. Sed in eodem puncto R recta etiam I O ſupponitur circulum ſecare, & cum rectâ E P conuenire. Ergo duæ rectæ I O R, I F R ſpatium comprehendunt contra Axioma 12. Lib. 1. Eucl. Inæquales ergo aſſeri non poſſunt factâ hypotheſi duo arcus I H, T X, ſiue duo anguli I A H, T A X. Quare ſi centro A Quadratricis circulus &c. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXIII. *Theorema.*

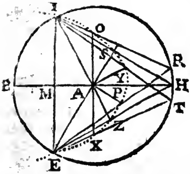
SI Quadratricis centro A circulus deſcribatur ipſam in I & E interſecans: ducatur autem chorda à puncto I ad punctum H in quo circulus Axem interſecat, quæ in S Quadratricem ſecet, & ad S à centro A radius educatur. Tum hinc inde ab hoc radio A S duo alij radij A O, A V ducantur, angulos S A O, S A V inter ſe æquales continentes: ac denique ex puncto I per O & V rectæ emittantur.

Dico angulos S I O, S I V eſſe inter ſe æquales.

C ſec

CASVS PRIMVS.

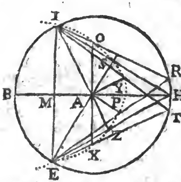
Præparatio.



Varij ſunt Propoſitionis huius caſus, quos quidem vnâ eâdémque tractatione, quæ ad varia ſchemata adhiberi poſſet, complecti liceret: verùm etſi breuitati minùs, at claritati tantò impenſiùs conſultum fuerit, ſi ſinguli pertractentur: quorum hic eſto primus Suppoſitis reliquis in ipſo Propoſitionis textu expreſſis; duo radij A O, A V angulos æquales S A O, S A V cum radio A S continentes ita ſtatuantur; vt intra circulum I H E idem Quadratricis cornu C I interſecent. quo ſuppoſito; producatur recta I O donec circulum ſecet in R: ad quod punctum ducatur E R ſecans in D Axem: producatur etiam I V eundem Axem ſectura in eodem puncto D, in quo recta E R ipſum ſecuit (vt ſtatim declarabitur) ſectura verò circulum in T: ad quod punctum iungatur E T. Ducantur demum ad puncta P, Z, X in quibus ſecatur Quadratrix à lineis E R, E H, E T; radij A P, A Z, A X. Quibus poſitis, oſtendo duas rectas I V T, E P R ſeſe mutuò ſecare in eodem puncto D Axis. Cùm enim duæ rectæ I R, E R iunctæ ſint ad idem circuli punctum R; ſecabunt Quadratricem in O & P: ad quæ puncta, ſi radij ducantur A O, A P; angulum O A P capient æqualem angulo I A H, ſiue E A H per ſcholium præcedens, per quod etiam eidem angulo E A H æqualis erit angulus X A V: lineæ enim I T, E T è punctis I & E egreſſæ ad idem circuli punctum T concurrunt, & Quadratricem ſecant in V & X; ad quæ puncta ducti ſunt radij A X, A V: ob quam eandem rationem angulus S A Z angulo eidem I A H eſt æqualis. Cùm ergo angulus O A P æqualis ſit angulo I A H: ſi dematur communis angulus O A H, reliquus fiet angulus P A H æqualis angulo I A O. Sed angulus I A O æqualis eſt angulo V A H. Nam ex angulis S A I, S A H per Prop. 8. æqualibus ablati ſunt ex ſuppoſitione Propoſitionis æquales S A O, S A V; & reliqui facti ſunt I A O, V A H æquales. Ergo anguli V A H, P A H ſunt æquales. Ergo per Corollarium Prop. 3. rectæ A V, A P ſunt æquales. Triangula igitur I A V E A P cùm habeant angulos I A V, E A P æquales (detracti ſiquidem ſunt ex æqualibus I A H, E A H, æquales oſtenſi V A H P A H) & latera A V, A I lateribus A P, A E circa æquales angulos æqualia:

erunt per Prop. 4 Lib. 1. Eucl. anguli A I V, A E P æquales: & additis æqualibus A I E, A E I; æquales erunt facti V I E, P E I. Quare ſi producantur I V, E P: neceſſariò ſeſe interſecabunt in eodem puncto Axis A H, cum Axis bifariam & perpendiculariter diuidat in M baſim I E Trianguli ad eam baſim habentis angulos æquales. Quare, cùm recta I T ſecet in D Axem A H; eundem in D etiam ſecabit recta E R. Hoc poſito.

Demonſtratio.



Duo Triangula I D H, E D H tria latera ſingula ſingulis habent æqualia (ſunt enim DI, DE, & HI, H E æqualia, latus autem D H commune) Ergo & angulos habent æquales. Itaque cùm angulus D I H æqualis ſit angulo D E H: ſit autem angulus D E H, ſiue R E H. æqualis angulo R I H per Prop. 27. Lib. 3. Elem. eo quòd eidem arcui R H ad circumferentiam inſiſtant: æquales erunt etiam duo anguli H I R, H I D. Quod hoc quoque modo concludi poteſt. Vbi oſtenſum eſt angulos D I E, D E I eſſe æquales; ex eâ æqualitate concludi debet arcum I R angulum I E D ſuſtinentem æqualem eſſe arcui E T angulum E I D ſuſtinenti. Cùm ergo arcus H I, H E ſint etiam æquales: ſi ex arcu H I arcus R I, & ex arcu H E arcus T E dematur; remanebunt arcus H R, H T æquales. Ergo anguli H I R, H E T illis arcubus inſiſtentes erunt æquales per Prop. 27. Lib. 3. Elem. Quod in hoc primo caſu probandum erat.

CASVS SECVNDVS.

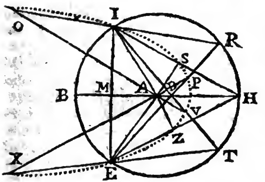
Præparatio.

Præparatio, ſiue conſtructio caſûs huius ſecundi ita habet. Iiſdem poſitis, quæ in priore caſu ſuppoſita ſunt: nempe circulo I H E ſecante Quadratricem in I, & E, ductâque Applicatâ I E: ductâ etiam I H, quæ Quadratricem ſecat in S, ad quod punctum ducatur radius A S: ductâ quoque E H interſecans Quadratricem in Z, ad quod ducatur radius A Z: ductis denique A I, A E, quæ omnia, vt in præcedenti caſu ſe habent: ſtatuantur duo anguli æquales S A O, S A V hinc inde à radio A S, ita vt recta A O Quadratrici occurrat in O vltra Applicatæ terminum I: recta verò A V alterum Quadratricis cornu C E ſecet in V. Tum à puncto O per I recta emittatur O I R; & per V ab eodem

puncto

puncto I recta ducatur I V T. quibus poſitis anguli duo H I R , H I T probandi ſunt æquales iuxta Propoſitionem : ad quod hæc adhuc neceſſaria eſt præparatio. A puncto E per R & T , in quibus circulus ſecatur à lineis I O, I V productis, ducantur lineæ E R, E T : quarum illa Quadratricem in P , hæc verò producta in X interſecet : ad quæ puncta radij deſtinentur A P, A X. His peractis,

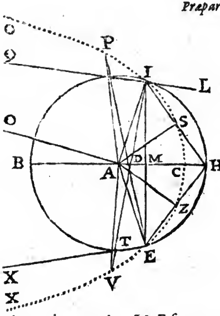
Demonſtratio.



Cùm duæ lineæ RI, RE in eodem puncto A circulum ſecent ; ſecent verò Quadratricem in O & P , ad quæ puncta ducti ſunt radij A O, A P ; angulus P A O æqualis erit angulo I A H per Schol. 2. Prop. 22. dempto communi P A I , æquales erunt P A H, I A O. Quia verò ex Hypotheſi Propoſitionis duo anguli S A O, S A V ſunt æquales : ſi ex iis demantur æquales S A I , S A H ; æquales fient reliqui I A O H A V. Sed I A O æqualis eſt oſtenſus angulo P A H. Ergo duo anguli P A H, V A H ſunt æquales : ac proinde per Prop. 3. Coroll. æquales ſunt lineæ A P , A V. ſunt autem etiam æquales A E, A I ; & anguli I A V, E A P, lateribus illis æqualibus comprehenſi, æquales (ſunt enim anguli H A I & H A E æquales , quibus adduntur æquales oſtenſi H A V, H A P) Ergo duo triangula I A V , E A P habent angulos A I V, A E P æquales per Prop. 4. Lib. 1. Elem. Quibus ſi addantur æquales A I E , A E I : æquales fient anguli M I V, M E P. Duæ igitur lineæ I V , E P ſeſe in eodem puncto D axis M H interſecabunt. Quo fit, vt duo Triangula D I H , D E H tria latera tribus lateribus habeant æqualia ; atque adeò tres angulos tribus angulis. Angulus igitur D I H æqualis eſt angulo D E H. Ergo arcus H R, H T, quibus inſiſtunt, ſunt æquales per Prop. 27. Lib. 3. Elem. Sed arcui H R inſiſtit etiam angulus H I R. Ergo angulus H I R æqualis eſt angulo H I T. conſtat ergo in hoc caſu Propoſitum. Quod hoc etiam modo colligere licebit. Oſtenſus eſt proximâ ratiocinatione angulus M I D, ſiue E I T æqualis angulo M E D, aut I E R. Ergo arcus I R, E T per Prop. 27. Lib. 3. Elem. ſunt æquales : qui ſi ex æqualibus H I , H E auferantur: æquales fient reliqui arcus H R, H T. Ergo æquales ſunt anguli H I R, H E T his arcubus inſiſtẽtes, vt demonſtrandũ proponebatur.

CASVS TERTIVS.

Præparatio.



Hîc eadem, vel ſimilia conſtituantur quæ in ſuperioribus conſtituta ſunt. Nempe ſit Applicata I E, Axis A H, circulus centro A per I & E deſcriptus, ſubtenſa I H ducta, quæ à Quadratrice bifariam ſecatur in S; ad quod punctum ducitur A S; quæ ad IH eſt perpendicularis. Hæc ſunt huic caſui & duobus præcedentibus communia, quæ ſequuntur, linearum reliquarum ſitum mutant, & huic caſui proprium inuehunt. Sumuntur ſcilicet anguli duo vtrinque à lineâ AS æquales SAO, SAV huiuſmodi; vt Quadratricem vltra terminos I & E ſecent radij A O, A V illos angulos cum rectâ A S continentes. Iam ſi iuxta Hypotheſim Propoſitionis ex puncto O per I ducatur recta O I promota vſque ad L; ducatur autem & ex puncto V, in quo radius A V Quadratricem ſecat, ad idem punctum I linea V I: Demonſtrandum Propoſitio poſtulat duos angulos H I L, H I V eſſe æquales. Quod vt perficiatur. Ducito radium A P ad Quadratricis punctum P, in quo ipſa ſecatur à linea E R, quæ per punctum R in quo circulus ſecatur à recta O I, traducitur. Ducito etiam I V à puncto I ad Quadratricis punctum V, in quo eam ſecat radius A V angulum S A V cum radio A S conſtituens æqualem angulo S A O. Ducito denique ex E per T, vbi circulus ſecatur à rectâ I V, rectam E T, quæ Quadratricem ſectura eſt aliquando in X. Tum ſic demonſtrationem auſpicare.

Demonſtratio.

Duæ lineæ R I, R E ſe mutuò ſecant in eodem circuli puncto R; ſecant verò Quadratricem in P & O, ductique ſunt radij A O, A P. Ergo angulus P A O eſt æqualis angulo I A H per Schol. 2. Prop. 22. quæ ad hunc caſum pertinet. Et addito communi angulo P A I, æquales euunt duo anguli I A O, P A H. Sed ex ſuppoſitione Propoſitionis

duo

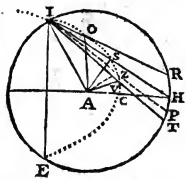
duo anguli S A O, S A V ſunt æquales. Si itaque ex his demantur æquales S A I, S A H; reliqui fient æquales I A O, H A V. Sed angulus I A O oſtenſus eſt æqualis angulo P A H. Ergo duo anguli H A P, H A V ſunt æquales: ac proinde per Propoſit. 3. Coroll. æquales ſunt lineæ A P, A V. ſunt verò etiam æquales A I, A E & anguli I A V, E A P illis lateribus comprehenſi æquales (ſunt enim anguli H A P, H A V oſtenſi æquales; & ad angulum H A P angulus H A E, & ad angulum H A V angulus H A E æqualis angulo H A I, additur) Ergo duo Triangula I A V, E A P habent angulos A I V, A E P æquales per Prop.4.Lib.1. Elem. Qui ſi ab æqualibus angulis A I E, A E I demantur: æquales erunt anguli reliqui P E I, V I E. Cùm ergo I E biſariam & perpendiculariter ſecetur in M ab Axe, ſe mutuò ſecabunt in puncto eodem axis, nempe in D, duæ lineæ P E, I V; vt Triangulum I D E Iſoſceles conſtituant. Hinc fit, vt duo Triangula D I H, D E H tria latera tribus lateribus æqualia, & proinde tres angulos tribus angulis æquales habeant. Angulus ergo H I D æqualis eſt angulo H E D. Sed angulo H E D æqualis eſt angulus H I L (vt mox aperiam) Ergo duo anguli H I L, H I V ſunt æquales, vt fert Propoſitio. Quòd autem angulus H I L ſit æqualis angulo H E D, ita manifeſtum fiet. Figura H I R E Quadrilatera circulo inſcribitur, & eius latus R I producitur ad L. Ergo per ea, quæ demonſtrat Clauius Prop. 22. Lib. 3. Eucl. angulus H I L externus æqualis eſt interno & oppoſito Quadrilateri angulo H E R. Vera eſt ergo quouis in caſu propoſito (vix enim præter hos tres expoſitos alius occurrat) allata Propoſitio. Quare. Si Quadratricis centro A circulus &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIV. *Theorema.*

Iiſdem poſitis quæ in præcedenti propoſitione. Circulo ſcilicet centro Quadratricis A deſcripto, qui Quadratricem ſecet in I & E per quæ puncta ducatur Applicata ductâ item ſubtenſâ I H, quæ in S Quadratricem interſecet; ad quod punctum radius deſtinetur A S. Tum duæ ducantur lineæ I R, I T æquales angulos H I H, H I T continentes cum ſubtenſâ I H, & Quadratricem ſecantes in O & V: ad quæ puncta ex centro A radij ducantur A O, A V.

Dico Angulos S A O, S A V eſſe æquales.

Demonſtratio.



Hæc Propoſitio conuerſa eſt præcedentis; quam vnico propoſito primo caſu, eiúſque ſchemate declaro. Itaque ſi hac ſtatutâ ſuppoſitione duo Anguli S A O, S A V non ſunt æquales, ſit maior, ſi fieri poteſt, angulus S A V angulo S A O: fiat ergo illi æqualis angulus S A Z; & per punctum Z, in quo Quadratrix ſecatur à radio A Z, emittatur à puncto I linea I P. Quia igitur duo anguli S A O, S A Z ſunt æquales; ac per O & Z ex Applicatæ termino I lineæ ducuntur: I R, I P erunt duo anguli H I R, H I P æquales per Prop. antecedentem. Sed ex ſuppoſitione duo anguli H I R, H I T ſunt æquales. Æquales ergo ſunt H I T, H I P. Quod eſt abſurdum. Æquales ergo ſunt anguli S A O, S A V. Quod erat probandum.

Corollarium.

Ex Propoſitionibus proximè antecedentibus facilis tutiſſimáque colligitur ratio deſcribendi eam Quadratricis partem, quæ difficiliorem patitur deſignationem, eam ſcilicet quæ ad eius verticem propiùs accedit: vbi duarum linearum Quadratricem motu ſuo deſignantium ſectio cõtingit obliquior, quàm vt ſatis certò diſtingui poſſit. Ecce enim in ſchemate Propoſitionis huius ſit punctum V à vertice C non longè diſtans certò deſignandum. Ducatur Applicata quælibet I E (quæ ſi à centro A paulò remotior ſtatuta fuerit, aptior videtur) & ex centro A per I circulus I H E deſcribatur; ducatur etiam chorda I H Quadratricem ſecans in S, ad quod punctum iungatur radius A S. His paratis, à centro A radius educatur per V vertici proximum; in quo radio punctum deſideratur, per quod Quadratrix agenda eſt. Fiat angulo S A V æqualis ex alterâ parte rectæ A S angulus S A O ducto radio A O, Quadratricis partem illam ſecante in O, quæ puncto I adiacet, tutiorémque ſortitur deſcriptionem. Tum per O extendatur linea ex puncto I, quæ producta circulum ſecet in R. Sumpto autem arcu H T æquali arcui H R, ducatur recta I T. Hæc ſecabit radium A V in puncto, per quod abitura eſt Quadratrix; vt euidens eſt ex paulò antè demonſtratis. Si itaque plures radij infra A S inter S & H ex A emittantur in eorum ſingulis veſtigia Quadratricis deſignare licebit, per quæ tranſitura eſt. Quanquam autem pars Quadratricis inter S & I poſita deſcribatur ratione ſatis tutâ: tamen quia puncta puncto I proxima

Digitized by Google

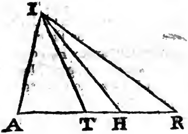
xima normam non ſatis tutò ob ſpatium breuiſſimum dirigere viden-tur, vt ducatur recta I R. Licebit vltra I, puncta O vtcunque ab I remota aſſumere: ſed tunc punctum V reperietur in altero Quadratricis cornu. Tunc enim radiorum, qui cum radio A S angulos æquales hinc inde continere debent: cùm vnus vltra I cadere ſupponatur, alterum infra H cadere neceſſe eſt; adeóque punctum per quod in eo ducenda eſt Quadratrix ad alterum cornu pertinere. Verùm punctum illud facilè ad cornu ſuperius reponetur, ſi radius ſupra Axem A C reponatur eundem angulum cum Axe continens: in quo deſignetur punctum Quadratricis ad cornu ſuperius ſpectans: aut certè omiſſo puncto I, lineáque I H, adhibeatur punctum oppoſitum E cum linea E H, & reliqua abſoluantur, vt priùs. Quæ cùm euidentiſſima ſint, pluribus non proſequor.

PROPOSITIO XXV. *Theorema.*

SI ad Trianguli Iſoſcelis alterum duorum æqualium angulorum, duo conſtituantur ex vtrâque parte baſis æquales anguli.

Dico lineas, quibus hi æquales anguli clauduntur, latus Trianguli productum ita ſecturas, vt tres ſint continuè proportionales abſciſſæ lineæ ex eo latere.

Expoſitio.



Sit Triangulum Iſoſceles A I H: cuius baſis ſit I H: & ad eius angulum I fiant ex vtraque parte baſis I H duo anguli æquales H I R, H I T. Dico latus A H productum ita ſecari in R, & in T à lineis angulos illos æquales claudentibus; vt tres abſciſſæ lineæ A R, A H, A T ſint continuè proportionales.

Demonſtratio.

Trianguli H I R latus R H producitur versùs A. Ergo per Propoſ. 32. Lib. 1. Elem. angulus externus A H I æqualis eſt duobus angulis internis & oppoſitis H R I, H I R. At angulus A H I eſt æqualis ex Hypotheſi angulo A I H. Ergo angulus A I H æqualis eſt duobus angulis H R I, H I R Sed angulus H I T eſt æqualis poſitus angulo H I R. Ergo dempto angulo H I T ex angulo H I A, æqualis remanebit

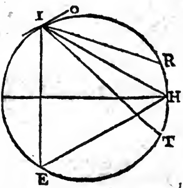
bit angulus A I T angulo A R I. Cùm ergo duo Triangula A I R, A I T habeant duos angulos æquales nempe A communem, & A I T, A R I; erunt ipſa æquiangula; ac proinde per Prop.4.Lib.6.Elem. Ita erit A R latus Trianguli A I R ad Trianguli A I T latus A I; vt latus A I eiuſdem Trianguli A I R ad latus A T Trianguli A I T. Sunt ergo tres lineæ A R, A I, A T continuè proportionales. Ergo & tres A R, A H, A T proportionales erunt: ſunt enim duæ A I, A H æquales ex ſuppoſitione. Quare. Si ad Trianguli Iſoſcelis alterum &c. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXVI. *Theorema.*

SI circuli ſubtenſam I E bifariam ſecet diameter A H; & à puncto I ducatur linea ad H: ex cuius vtraque parte fiant anguli æquales H I R, H I T: fiat autem angulus R I O æqualis angulo E I T.

Dico rectam I O circulum tangere in puncto I.

Demonſtratio.



Ducatur H E. Hæc erit æqualis rectæ H I per Prop. 29. Lib.3.Elem.diameter enim A H, cùm bifariam diuidat ſubtenſam I E, bifariam diuidet arcum I H E. Quare ſubtenſa H I eſt æqualis ſubtenſæ H E. Ergo angulus H I E æqualis erit angulo H E I. Iam cùm angulus R I O factus ſit æqualis angulo E I T; ſit autem ex Hypotheſi angulus H I R æqualis angulo H I T: erit angulus H I O ex duobus angulis H I R, R I O conflatus, æqualis angulo H I E ex duobus H I T, T I E conflato. Sed angulus H I E æqualis oſtenſus eſt angulo H E I. Ergo angulus H I O æqualis eſt angulo H E I. Cùm ergo à puncto I cadat recta I H intra circulum, quæ abſcindit ſegmentum I E H capiens angulum I E H æqualem angulo H I O: recta O I per Prop. 32. Lib. 3. Elem. conuerſam circulum tangit in I. Quare.Si circuli ſubtenſam &c. Quod erat probandum.

PROP.

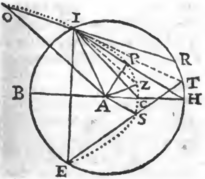
Digitized by Google

PROPOSITIO XXVII. *Theorema.*

SI ex Quadratricis centro A circulus deſcribatur, ipſam in I ſecans: ſecans verò eius Axem in H: ad quod punctum ducatur I H ex puncto I: ex quo item ducatur ad Quadratricis verticem C recta I C. Tum angulo H I C, quem hæ duæ rectæ I C, I H continent, æqualis fiat Angulus H I R.

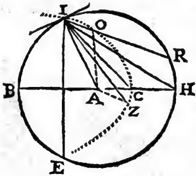
Dico rectam I R Quadratricem tangere in puncto I.

Præparatio.



Hæc eſt hac in materiâ obſeruatione tam digna, quam quæ digniſſima Propoſitio: quâ mirabilis ac planè diuinæ huius curuæ lineæ proprietas præ cæteris inſignis aſſeritur, & declaratur: & verò ex hactenus allatis facilè probatur, hac priùs ſtatutâ præparatione. Si recta A I Quadratricem non tangit in I, Quadratricem ſecat vel vltra I, vt in priore ſchemate, vel citra I, vt in poſteriore, V. G. in puncto O. Ducantur Ergo radij duo A I, A O. Tum angulo I A H fiat æqualis angulus O A Z ducto radio A Z Quadratricem ſecante in Z: quod punctum in priore figura erit ſupra Axem, in poſteriore infra, vt per ſe patet. Ducatur demum recta I Z. His poſitis,

Demonſtratio.



Cùm in vtraque ſchemate Angulus O A Z ſit æqualis Angulo I A H; & ex puncto I ducta ſit chorda I H; ac deinde per idem punctū I duæ ductæ ſint lineæ O I R, & I Z: erunt per Prop. 23. duo anguli H I R, H I Z æquales. Sed ex Hypotheſi duo anguli H I R, H I C ſunt æquales. Ergo duo anguli H I C, H I Z ſunt æquales. Quod eſt abſurdū. Nam in vtroque ſchemate linea I Z differt à linea I C. Igitur dici nequit rectam I R ductam, vt ſuppoſitio poſtulat, ſe-

Digitized by Google

care Quadratricem in I, & cum eâ in alio quouis puncto O rurſus concurrere. Quare. Si ex Quadratricis centro &c. Quod erat probandum.

Scholium.

Hinc iam intelligis quo nixus fundamento aſſeruerim, tum in Epilogo Examinis Quadraturæ; tum aliàs in tertiâ parte Elementorum Geometriæ practicæ ad locum linearem ſpectante, Tetragoniſmum abſolutum fore: ſi ars poſſit innoteſcere; quâ Geometricè ducatur linea quocunque in puncto Quadratricem etſi infinitè porrectam contingens. Si enim in hac duplici figurâ ſupponatur recta linea I R Quadratricem tangere in puncto I: idque ex methodo Geometricâ ſtatutum eſſe. Si angulo H I R ex altera parte fiat æqualis angulus H I C; conſtat verticem C Quadratricis Geometricè determinari: quo habito habetur ſtatim non tantùm linea recta circulari æqualis; ſed etiam rectilinea ſuperficies æqualis curuilineæ. Sed hæc, aliáque ex his non minora lineæ huius myſteria hactenus fortaſſe inaudita declarare pergo.

PROPOSITIO XXVIII. *Theorema.*

Iſdem poſitis. Poſitâ ſcilicet in ſchemate priore proximæ Propoſitionis lineâ I R Quadratricem tangente in I.

Dico inter tangentem I R & Quadratricem nullam rectam lineam immitti poſſe, quæ Quadratricem non ſecet.

Demonſtratio.

Oſtendit Eucl. Lib. 3. Prop. 16. Elem. non tantùm lineam, quæ ad diametrum circuli in eius extremo puncto perpendicularis foret, circulum tangere: ſed etiam nullam aliam rectam ad idem contactûs punctum adiungi poſſe, quin circulum ſecet. Aliquid hîc ſimile demonſtrandum cenſui, ne quid cuipiam videretur deſiderari; præſertim cùm Appollonius agens Propoſ. 32. Lib. 1. de contactu linearum rectarum & conicarum, quas proximè Quadratrix æmulatur, hanc ſpeculationem non omiſerit.

Ducatur itaque, ſi fieri poteſt, linea recta T I inter Quadratricem & tangentem R I ita vt Quadratricem non ſecet Angulo H I T æqualis fiat angulus H I Z ductâ lineâ I Z, quæ Quadratricem ſecet in puncto Z; ad quod adiungatur radius A Z. Ducatur etiam radius A P ad punctum P, in quo chorda I H Quadratricem interſeca , qui bifariam & ad angulos rectos eandem interſecabit iuxta Prop. 8. Quia igitur duo

duo anguli HIT, HIZ ex vtrâque parte lineæ IH poſiti, ſunt inter ſe æquales: æquales etiam futuri ſunt per Prop. 24. anguli PAI, PAZ. Sed anguli PAI, PAC ſunt etiam æquales vel per eandem Prop. eo quòd anguli HIR, HIC ponantur æquales: vel quia radius AP ad baſim IH Trianguli Iſoſcelis IAH perpendicularis angulum eius IAH ad verticem bifariam diuidit. Ergo duo anguli PAZ, PAC ſunt æquales, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Nulla ergo linea TI inter tangentem RI & Quadratricem duci poteſt, quin Quadratricem ſecet.

Quod hoc etiam modo concludi poteſt. Si ducatur linea quæpiam TI ad punctum I adiungi poſſe inter tangentem RI & Quadratricem, ita vt eam non ſecet. Ducatur à puncto E, in quo circulus IHE Quadratricem ſecat, ad punctum T recta linea ET Quadratricem in S interſecans, & quidem infra verticem C: ſi enim ducatur ER, ea in vertice C Quadratricem ſecat; vt patet: ergo ET ipſam infra C ſecare neceſſe eſt. Ducatur radius AS. Quia ergo à duobus punctis I & E, in quibus circulus Quadratricem ſecat, duæ lineæ IT, ET ad idem circuli punctum T adiunguntur: eæque Quadratrici occurrunt in I & S; ad quæ puncta radij AI, AS emiſſi ſunt: erit per Schol. 2. Prop. 22. angulus IAS æqualis angulo IAH. Quod eſt abſurdum. Nulla ergo linea TI poteſt duci quæ Quadratricem non ſecet. Quod erat probandum.

PROPOSITIO XXIX. *Theorema.*

SI Quadratricem tangat in quouis puncto I recta linea RI, per quod punctum I circulus centro A Quadratricis deſcribatur eius Axem ſecans in H; & iungatur IH: ducatur etiam ad verticem C recta linea IC.

Dico Angulos HIR, HIC æquales eſſe.

Demonſtratio.

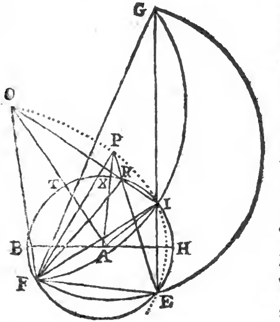
Hæc Propoſitio conuerſa eſt Propoſitionis 27. quam ſic veram eſſe demonſtro. Si æquales minimè ſint duo anguli HIR, HIC. Sit hic illo maior, aut minor. Fiat ergo HIZ ipſi HIR æquali ductâ rectâ IZ Quadratricem ſecante in Z: ad quod punctum radius AZ deſtinetur: ducatur etiam radius AS ad ſectionem Quadratricis & ſubtenſæ IH. Quia igitur duæ lineæ IR, IZ duos angulos HIR HIZ ex vtrâque parte ſubtenſæ IH æquales conſtituunt: & ad puncta I & Z, in quibus Quadratrix ab IS ſecatur, ducti ſunt radij AI, AZ:

 erit

Digitized by Google

arcui I H (vt ſunt A X, A T) ſecare Quadratricem in P & O vltra terminum I Applicatæ: quam tunc inter centrum A & verticem C axem ſecare neceſſe eſt, vt ſcilicet angulus I A H ſit recto minor: neque enim aliàs poſſet ſumi in arcu IB arcus X T arcui I H æqualis, vt patet. Ad hunc autem caſum pertinet ille, in quo terminus ipſe I Applicatæ aſſumeretur; vt ex eo arcus æqualis arcui I H abſcinderetur in arcu I B. Tunc autem illud ipſum punctum I eſſet punctum concursûs linearum à ſectionibus Quadratricis per terminos I & E Applicatæ ductarum. Nam à puncto I ad terminum E linea duci deberet, quæ ipſamet foret Applicata I E; & à ſectione alterâ Quadratricis ad Applicatæ terminum I altera linea duceretur priorem vtique I E ductam in ipſo puncto I circuli I H E ſectura. In hoc porrò caſu, qui Applicatam inter centrum A Quadratricis eiúſque verticem C collocari poſtulat, vt ſit arcus I H Quadrante minor, ſiue angulus I A H ſit acutus: ita arcui I H ſumi poſſet æqualis in arcu I B; vt B foret eius terminus, & ipſe Axis A B alter duorum radiorum arcum arcui I H æqualem complectentium. Quo poſito idem contingeret, quod Prop. 21. contigit, eodémque modo demonſtraretur, concurſus ſcilicet linearum à ſectione Quadratricis per terminos Applicatæ I E ductarum in eo puncto circuli haberetur; in quo alter radius ipſum circulum ſecaret: quemadmodum in ſchemate citatæ Propoſitionis concurſus linearum O I & E P cadit in ipſum circuli punctum R, per quod radius A R arcum R B arcui I H æqualem abſcindens ducitur.

Vnus ſupereſt caſus, cuius nulla facta eſt in ſuperioribus mentio. Poteſt ſcilicet angulus angulo I A H ſuperiorum ſchematum æqualis, ſiue arcus arcui I H æqualis ita conſtitui: vt eum complectentes radij Quadratrici occurrant vltra Applicatam IE; ſed ita vt vnus vnum Quadratricis cornu à vertice C per I extenſum, alter alterum ab eodem vertice per E tranſiens interſecet. An igitur in hoc caſu lineæ ab iis Quadratricis ſectionibus per Applicatæ terminos I & E traiectæ, in aliquo circuli I H E puncto, vt in allatis caſibus contingere oſtenſum eſt, concurſuræ ſunt? haud quaquam, cùm enim, vt ex ſuperioribus aliquoties repetitis conſtat, præſertim in generatione celeberrimæ huius lineæ, & in ſcholio 2. Propoſitionis 6. pars illa Quadratricis, quæ vltra Applicatam ex vtrâque parte in infinitum excurrit, generetur ope arcûs I B E ab Applicata I E abſciſſi, & ope Applicatæ vltra I & E productæ vſque ad Aſymptotos, ſiue donec tota Applicata diametro generanti ſit æqualis: circulus, qui ex quolibet puncto cornu vnius, V. G. ex puncto O in proximo ſchemate, per Applicatæ terminum I deſcribitur, ſecabit in G Applicatam vltra I productam: at verò circulus



culus ex puncto quouis alterius cornu per terminum E delineatus Applicatam ſectururs eſt vltra E productam: quo fit, vt hi duo circuli nequaquam poſſint aliquando ſecare ſeſe mutuò in eodem Applicatæ puncto, (quale eſt G in hoc ſchemate, in quo circuli centris O & P ad idem cornu pertinentibus per I & E ducti ſe interſecant in G) deficiente autem hac communi horum duorum circulorum & Applicatæ interſectione: præſcinditur argumentum, quo duorum Triangulorum OIF, PEF ſimilitudo, atque adeò æqualitas angulorum AIF, PEF concluditur: & ex eo hos angulos in eodem ſegmento exiſtere: vnde tandem colligatur lineas angulos illos æquales ad peripheriam conſtituentes ſecare ſeſe debere, in ipſis ſegmenti angulos æquales continentis terminis.

Cæterùm. Ex hac linearum per Applicatæ terminos I & E ex Quadratricis punctis O & P ita determinatis, vt à me determinata ſunt, traductarum ſectione mutuâ ad peripheriam I H E ſuo loco deducetur Quadratricis facultas inſignis: vt propterea illam paulò pluribus proſequi, &, quoad fas fuit, apertè exponere, operæ pretium viſum fuerit. Sed ecce alia, quæ ex iis conſequuntur, non minùs obſeruanda.

SCHOLIVM SECVNDVM.

Conuerti poſſunt proxima Propoſitiones hoc modo.

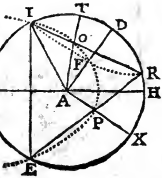
SI centro A Quadratricis circulus deſcribatur ipſam ſecans in I & E: & ex punctis I & E rectæ emittantur ſeſe in R ad circuli peripheriam ſecantes; quæ Quadratricem ipſam in O

& P

& P ſecent; & per puncta O, & P à centro A radij A T, A X emittantur.

Dico Angulum T A X æqualem eſſe Angulo I A H: quem radius A I cum Axe A H continet: ſiue arcum T X æqualem eſſe arcui I H.

Demonſtratio.



Hîc vnicum ſchema propono, quod ad Propoſitionem 19. pertinet: in quo puncta O & P, in quibus Quadratrix ſecatur à lineis I R, E R; cadunt intra circulum, vt fert citata Propoſitio: verùm non minùs rectè de cæteris caſibus Prop. 20. 21. 22. explicatis hæc Aſſertio poteſt enunciari: quam in hunc modum demonſtro. Si arcus T X arcui I H minimè ſit æqualis: ſit T X maior, V. G. quàm I H, fiat ergo huic æqualis D X ducto radio A D, qui Quadratricem ſecet in F: ac per F ex puncto I recta ducatur. Hæc cum rectâ E R ex puncto E per P traiectâ concurret in peripheriâ circuli I H E per Prop. 19. 20. &c. Ergo in puncto R, in quo recta E P circulum ſecat. Sed in eodem puncto R recta etiam I O ſupponitur circulum ſecare, & cum rectâ E P conuenire. Ergo duæ rectæ I O R, I F R ſpatium comprehendunt contra Axioma 12. Lib. 1. Eucl. Inæquales ergo aſſeri non poſſunt factâ hypotheſi duo arcus I H, T X, ſiue duo anguli I A H, T A X. Quare ſi centro A Quadratricis circulus &c. Quod erat oſtendendum.

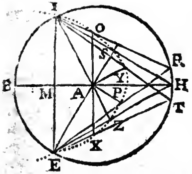
PROPOSITIO XXIII. *Theorema.*

SI Quadratricis centro A circulus deſcribatur ipſam in I & E interſecans: ducatur autem chorda à puncto I ad punctum H in quo circulus Axem interſecat, quæ in S Quadratricem ſecet, & ad S à centro A radius educatur. Tum hinc inde ab hoc radio A S duo alij radij A O, A V ducantur, angulos S A O, S A V inter ſe æquales continentes: ac denique ex puncto I per O & V rectæ emittantur.

Dico angulos S I O, S I V eſſe inter ſe æquales.

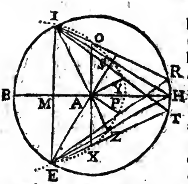
CASVS PRIMVS.

Præparatio.



Varij ſunt Propoſitionis huius caſus, quos quidem vnâ eâdémque tractatione, quæ ad varia ſchemata adhiberi poſſet, complecti liceret: verùm etſi breuitati minùs, at claritati tantò impenſiùs conſultum fuerit, ſi ſinguli pertractentur: quorum hic eſto primus Suppoſitis reliquis in ipſo Propoſitionis textu expreſſis; duo radij AO, A V angulos æquales S A O, S A V cum radio AS continentes ita ſtatuantur; vt intra circulum I H E idem Quadratricis cornu C I interſecent. quo ſuppoſito; producatur recta I O donec circulum ſecet in R: ad quod punctum ducatur E R ſecans in D Axem: producatur etiam IV eundem Axem ſectura in eodem puncto D, in quo recta E R ipſum ſecuit (vt ſtatim declarabitur) ſectura verò circulum in T: ad quod punctum iungatur E T. Ducantur demum ad puncta P, Z, X in quibus ſecatur Quadratrix à lineis E R, E H, E T; radij A P, A Z, A X. Quibus poſitis, oſtendo duas rectas I V T, E P R ſeſe mutuò ſecare in eodem puncto D Axis. Cùm enim duæ rectæ I R, E R iunctæ ſint ad idem circuli punctum R; ſecabunt Quadratricem in O & P: ad quæ puncta, ſi radij ducantur A O, A P; angulum O A P capient æqualem angulo I A H, ſiue E A H per ſcholium præcedens, per quod etiam eidem angulo E A H æqualis erit angulus X A V: lineæ enim I T, E T è punctis I & E egreſſæ ad idem circuli punctum T concurrunt, & Quadratricem ſecant in V & X; ad quæ puncta ducti ſunt radij A X, A V: ob quam eandem rationem angulus S A Z angulo eidem I A H eſt æqualis. Cùm ergo angulus O A P æqualis ſit angulo I A H: ſi dematur communis angulus O A H, reliquus fiet angulus P A H æqualis angulo I A O. Sed angulus I A O æqualis eſt angulo V A H. Nam ex angulis S A I, S A H per Prop. 8. æqualibus ablati ſunt ex ſuppoſitione Propoſitionis æquales S A O, S A V; & reliqui facti ſunt I A O, V A H æquales. Ergo anguli V A H, P A H ſunt æquales. Ergo per Corollarium Prop. 3. rectæ A V, A P ſunt æquales. Triangula igitur I A V E A P cùm habeant angulos I A V, E A P æquales (detracti ſiquidem ſunt ex æqualibus I A H, E A H, æquales oſtenſi V A H P A H) & latera A V, A I lateribus A P, A E circa æquales angulos æqualia:

erunt per Prop. 4 Lib. 1. Eucl. anguli A I V, A E P æquales: & additis æqualibus A I E, A E I; æquales erunt facti V I E, P E I. Quare ſi producantur I V, E P: neceſſariò ſeſe interſecabunt in eodem puncto Axis A H, cum Axis bifariam & perpendiculariter diuidat in M baſim I E Trianguli ad eam baſim habentis angulos æquales. Quare, cùm recta I T ſecet in D Axem A H; eundem in D etiam ſecabit recta E R. Hoc poſito.



Demonſtratio.

Duo Triangula I D H, E D H tria latera ſingula ſingulis habent æqualia (ſunt enim D I, D E, & H I, H E æqualia, latus autem D H commune) Ergo & angulos habent æquales. Itaque cùm angulus D I H æqualis ſit angulo D E H: ſit autem angulus D E H, ſiue R E H æqualis angulo R I H per Prop. 27. Lib. 3. Elem. eo quòd eidem arcui R H ad circumferentiam inſiſtant: æquales erunt etiam duo anguli H I R, H I D. Quod hoc quoque modo concludi poteſt. Vbi oſtenſum eſt angulos D I E, D E I eſſe æquales; ex eâ æqualitate concludi debet arcum I R angulum I E D ſuſtinentem æqualem eſſe arcui E T angulum E I D ſuſtinenti. Cùm ergo arcus H I, H E ſint etiam æquales: ſi ex arcu H I arcus R I, & ex arcu H E arcus T E dematur; remanebunt arcus H R, H T æquales. Ergo anguli H I R, H E T illis arcubus inſiſtentes erunt æquales per Prop. 27. Lib. 3. Elem. Quod in hoc primo caſu probandum erat.

CASVS SECVNDVS.

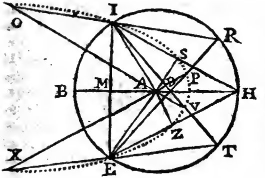
Præparatio.

Præparatio, ſiue conſtructio caſûs huius ſecundi ita habet. Iiſdem poſitis, quæ in priore caſu ſuppoſita ſunt: nempe circulo I H E ſecante Quadratricem in I & E, ductâque Applicatâ I E: ductâ etiam I H, quæ Quadratricem ſecat in S, ad quod punctum ducatur radius A S: ductâ quoque E H interſecans Quadratricem in Z, ad quod ducatur radius A Z: ductis denique A I, A E, quæ omnia, vt in præcedenti caſu ſe habent: ſtatuantur duo anguli æquales S A O, S A V hinc inde à radio A S, ita vt recta A O Quadratrici occurrat in O vltra Applicatæ terminum I: recta verò A V alterum Quadratricis cornu C E ſecet in V. Tum à puncto O per I recta emittatur O I R; & per V ab eodem

puncto

puncto I recta ducatur I V T. quibus poſitis anguli duo H I R , H I T probandi ſunt æquales iuxta Propoſitionem : ad quod hæc adhuc neceſſaria eſt præparatio. A puncto E per R & T, in quibus circulus ſecatur à lineis I O, I V productis, ducantur lineæ E R, E T : quarum illa Quadratricem in P , hæc verò producta in X interſecet : ad quæ puncta radij deſtinentur A P, A X. His peractis,

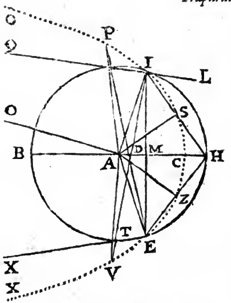
Demonſtratio.



Cùm duæ lineæ RI, RE in eodem puncto A circulum ſecent ; ſecent verò Quadratricem in O & P , ad quæ puncta ducti ſunt radij A O, A P ; angulus P A O æqualis erit angulo I A H per Schol. 2. Prop. 22. dempto communi P A I, æquales erunt P A H, I A O. Quia verò ex Hypotheſi Propoſitionis duo anguli S A O, S A V ſunt æquales : ſi ex iis demantur æquales S A I , S A H ; æquales fient reliqui I A O H A V. Sed I A O æqualis eſt oſtenſus angulo P A H. Ergo duo anguli P A H, V A H ſunt æquales : ac proinde per Prop. 3. Coroll. æquales ſunt lineæ A P , A V. ſunt autem etiam æquales A E, A I ; & anguli I A V, E A P, lateribus illis æqualibus comprehenſi, æquales (ſunt enim anguli H A I & H A E æquales , quibus adduntur æquales oſtenſi H A V, H A P) Ergo duo triangula I A V. E A P habent angulos A I V, A E P æquales per Prop. 4. Lib. 1. Elem. Quibus ſi addantur æquales A I E , A E I : æquales fient anguli M I V, M E P. Duæ igitur lineæ I V , E P ſeſe in eodem puncto D axis M H interſecabunt. Quo fit, vt duo Triangula D I H , D E H tria latera tribus lateribus habeant æqualia ; atque adeò tres angulos tribus angulis. Angulus igitur D I H æqualis eſt angulo D E H. Ergo arcus H R, H T, quibus inſiſtunt, ſunt æquales per Prop. 27. Lib. 3. Elem. Sed arcui H R inſiſtit etiam angulus H I R. Ergo angulus H I R æqualis eſt angulo H I T. conſtat ergo in hoc caſu Propoſitum. Quod hoc etiam modo colligere licebit. Oſtenſus eſt proximâ ratiocinatione angulus M I D, ſiue E I T æqualis angulo M E D, aut I E R. Ergo arcus I R, E T per Prop. 27. Lib. 3. Elem. ſunt æquales : qui ſi ex æqualibus H I , H E auferantur: æquales fient reliqui arcus H R, H T. Ergo æquales ſunt anguli H I R, H E T his arcubus inſiſtẽtes, vt demonſtrandũ proponebatur.

CASVS TERTIVS.

Præparatio.



Hîc eadem, vel ſimilia conſtituantur quæ in ſuperioribus conſtituta ſunt. Nempe ſit Applicata I E, Axis A H, circulus centro A per I & E deſcriptus, ſubtenſa I H ducta, quæ à Quadratrice bifariam ſecatur in S; ad quod punctum ducitur A S; quæ ad IH eſt perpendicularis. Hæc ſunt huic caſui & duobus præcedentibus communia, quæ ſequuntur, linearum reliquarum ſitum mutant, & huic caſui proprium inuehunt. Sumuntur ſcilicet anguli duo vtrinque à lineâ AS æquales SAO, SAV huiuſmodi; vt Quadratricem vltra terminos I & E ſecent radij A O, A V illos angulos cum recta A S continentes. Iam ſi iuxta Hypotheſim Propoſitionis ex puncto O per I ducatur recta O I promota vſque ad L; ducatur autem & ex puncto V, in quo radius A V Quadratricem ſecat, ad idem punctum I linea V I: Demonſtrandum Propoſitio poſtulat duos angulos H I L, H I V eſſe æquales. Quod vt perficiatur. Ducito radium A P ad Quadratricis punctum P, in quo ipſa ſecatur à linea E R, quæ per punctum R in quo circulus ſecatur à recta O I, traducitur. Ducito etiam I V à puncto I ad Quadratricis punctum V, in quo eam ſecat radius A V angulum S A V cum radio A S conſtituens æqualem angulo S A O. Ducito denique ex E per T, vbi circulus ſecatur à rectâ I V, rectam E T, quæ Quadratricem ſectura eſt aliquando in X. Tum ſic demonſtrationem auſpicare.

Demonſtratio.

Duæ lineæ R I, R E ſe mutuò ſecant in eodem circuli puncto R; ſecant verò Quadratricem in P & O, ductæque ſunt radij A O, A P. Ergo angulus P A O eſt æqualis angulo I A H per Schol. 2. Prop. 22. quæ ad hunc caſum pertinet. Et addito communi angulo P A I, æquales euunt duo anguli I A O, P A H. Sed ex ſuppoſitione Propoſitionis duo

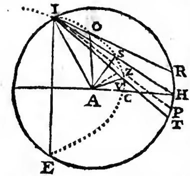
duo anguli S A O, S A V ſunt æquales. Si itaque ex his demantur æquales S A I, S A H; reliqui fient æquales I A O, H A V. Sed angulus I A O. oſtenſus eſt æqualis angulo P A H. Ergo duo anguli H A P, H A V ſunt æquales: ac proinde per Propoſit. 3. Coroll. æquales ſunt lineæ A P, A V. ſunt verò etiam æquales A I, A E & anguli I A V, E A P illis lateribus comprehenſi æquales (ſunt enim anguli H A P, H A V oſtenſi æquales; & ad angulum H A P angulus H A E, & ad angulum H A V angulus H A E æqualis angulo H A I, additur) Ergo duo Triangula I A V, E A P habent angulos A I V, A E P æquales per Prop.4. Lib. 1. Elem. Qui ſi ab æqualibus angulis A I E, A E I demantur: æquales erunt anguli reliqui P E I, V I E. Cùm ergo I E bifariam & perpendiculariter ſecetur in M ab Axe, ſe mutuò ſecabunt in puncto eodem axis, nempe in D, duæ lineæ P E, I V; vt Triangulum I D E Iſoſceles conſtituant. Hinc fit, vt duo Triangula D I H, D E H tria latera tribus lateribus æqualia, & proinde tres angulos tribus angulis æquales habeant. Angulus ergo H I D æqualis eſt angulo H E D. Sed angulo H E D æqualis eſt angulus H I L (vt mox aperiam) Ergo duo anguli H I L, H I V ſunt æquales, vt fert Propoſitio. Quòd autem angulus H I L ſit æqualis angulo H E D, ita manifeſtum fiet. Figura H I R E Quadrilatera circulo inſcribitur, & eius latus R I producitur ad L. Ergo per ea, quæ demonſtrat Clauius Prop. 22. Lib. 3. Eucl. angulus H I L externus æqualis eſt interno & oppoſito Quadrilateri angulo H E R. Vera eſt ergo quouis in caſu propoſito (vix enim præter hos tres expoſitos alius occurrat) allata Propoſitio. Quare. Si Quadratricis centro A circulus &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIV. *Theorema.*

Iiſdem poſitis quæ in præcedenti propoſitione. Circulo ſcilicet centro Quadratricis A deſcripto, qui Quadratricem ſecet in I & E per quæ puncta ducatur Applicata ductâ item ſubtensâ I H, quæ in S Quadratricem interſecet; ad quod punctum radius deſtinetur A S. Tum duæ ducantur lineæ I R, I T æquales angulos H I H, H I T continentes cum ſubtensâ I H, & Quadratricem ſecantes in O & V: ad quæ puncta ex centro A radij ducantur A O, A V.

Dico Angulos S A O, S A V eſſe æquales.

Demonſtratio.



Hæc Propoſitio conuerſa eſt præcedentis; quam vnico propoſito primo caſu, eiúſque ſchemate declaro. Itaque ſi hac ſtatutâ ſuppoſitione duo Anguli S A O, S A V non ſunt æquales, ſit maior, ſi fieri poteſt, angulus S A V angulo S A O: fiat ergo illi æqualis angulus S A Z; & per punctum Z, in quo Quadratrix ſecatur à radio A Z, emittatur à puncto I linea I P. Quia igitur duo anguli S A O, S A Z ſunt æquales; ac per O & Z ex Applicatæ termino I lineæ ducuntur: I R, I P erunt duo anguli H I R, H I P æquales per Prop. antecedentem. Sed ex ſuppoſitione duo anguli H I R, H I T ſunt æquales. Æquales ergo ſunt H I T, H I P. Quod eſt abſurdum. Æquales ergo ſunt anguli S A O, S A V. Quod erat probandum.

Corollarium.

Ex Propoſitionibus proximè antecedentibus facilis tutiſſimáque colligitur ratio deſcribendi eam Quadratricis partem, quæ difficiliorem patitur deſignationem, eam ſcilicet quæ ad eius verticem propiùs accedit: vbi duarum linearum Quadratricem motu ſuo deſignantium ſectio cõtingit obliquior, quàm vt ſatis certò diſtingui poſſit. Ecce enim in ſchemate Propoſitionis huius ſit punctum V à vertice C non longè diſtans certò deſignandum. Ducatur Applicata quælibet I E (quæ ſi à centro A paulò remotior ſtatuta fuerit, aptior videtur) & ex centro A per I circulus I H E deſcribatur; ducatur etiam chorda I H Quadratricem ſecans in S, ad quod punctum iungatur radius A S. His paratis, à centro A radius educatur per V vertici proximum; in quo radio punctum deſideratur, per quod Quadratrix agenda eſt. Fiat angulo S A V æqualis ex alterâ parte rectæ A S angulus S A O ducto radio A O, Quadratricis partem illam ſecante in O, quæ puncto I adiacet, tutiorémque ſortitur deſcriptionem. Tum per O extendatur linea ex puncto I, quæ producta circulum ſecet in R. Sumpto autem arcu H T æquali arcui H R, ducatur recta I T. Hæc ſecabit radium A V in puncto, per quod abitura eſt Quadratrix; vt euidens eſt ex paulò antè demonſtratis. Si itaque plures radij infra A S inter S & H ex A emittantur in eorum ſingulis veſtigia Quadratricis deſignare licebit, per quæ tranſitura eſt. Quanquam autem pars Quadratricis inter S & I poſita deſcribatur ratione ſatis tutâ: tamen quia puncta puncto I proxima

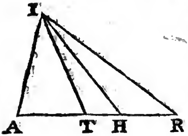
xima normam non ſatis tutò ob ſpatium breuiſſimum dirigere videntur, vt ducatur recta I R. Licebit vltra I, puncta O vtcunque ab I remota aſſumere: ſed tunc punctum V reperietur in altero Quadratricis cornu. Tunc enim radiorum, qui cum radio A S angulos æquales hinc inde continere debent: cùm vnus vltra I cadere ſupponatur, alterum infra H cadere neceſſe eſt; adeóque punctum per quod in eo ducenda eſt Quadratrix ad alterum cornu pertinere. Verùm punctum illud facilè ad cornu ſuperius reponetur, ſi radius ſupra Axem A C reponatur eundem angulum cum Axe continens: in quo deſignetur punctum Quadratricis ad cornu ſuperius ſpectans: aut certè omiſſo puncto I, lineáque I H, adhibeatur punctum oppoſitum E cum linea E H, & reliqua abſoluantur, vt priùs. Quæ cùm euidentiſſima ſint, pluribus non proſequor.

PROPOSITIO XXV. *Theorema.*

SI ad Trianguli Iſoſcelis alterum duorum æqualium angulorum, duo conſtituantur ex vtrâque parte baſis æquales anguli.

Dico lineas, quibus hi æquales anguli clauduntur, latus Trianguli productum ita ſecturas, vt tres ſint continuè proportionales abſciſſæ lineæ ex eo latere.

Expoſitio.



Sit Triangulum Iſoſceles A I H: cuius baſis ſit I H: & ad eius angulum I fiant ex vtraque parte baſis I H duo anguli æquales H I R, H I T. Dico latus A H productum ita ſecari in R, & in T à lineis angulos illos æquales claudentibus; vt tres abſciſſæ lineæ A R, A H, A T ſint continuè proportionales.

Demonſtratio.

Trianguli H I R latus R H producitur versùs A. Ergo per Propoſ. 32. Lib. 1. Elem. angulus externus A H I æqualis eſt duobus angulis internis & oppoſitis H R I, H I R. At angulus A H I eſt æqualis ex Hypotheſi angulo A I H. Ergo angulus A I H æqualis eſt duobus angulis H R I, H I R Sed angulus H I T eſt æqualis poſitus angulo H I R. Ergo dempto angulo H I T ex angulo H I A, æqualis remanebit

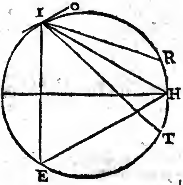
bit angulus A I T angulo A R I. Cùm ergo duo Triangula A I R, A I T habeant duos angulos æquales nempe A communem, & A I T, A R I; erunt ipſa æquiangula; ac proinde per Prop. 4. Lib. 6. Elem. Ita erit A R latus Trianguli A I R ad Trianguli A I T latus A I; vt latus A I eiuſdem Trianguli A I R ad latus A T Trianguli A I T. Sunt ergo tres lineæ A R, A I, A T continuè proportionales. Ergo & tres A R, A H, A T proportionales erunt: ſunt enim duæ A I, A H æquales ex ſuppoſitione. Quare. Si ad Trianguli Iſoſcelis alterum &c. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXVI. *Theorema.*

SI circuli ſubtenſam I E bifariam ſecet diameter A H; & à puncto I ducatur linea ad H: ex cuius vtraque parte fiant anguli æquales H I R, H I T: fiat autem angulus R I O æqualis angulo E I T.

Dico rectam I O circulum tangere in puncto I.

Demonſtratio.



Ducatur H E. Hæc erit æqualis rectæ H I per Prop. 29. Lib. 3. Elem. diameter enim A H, cùm bifariam diuidat ſubtenſam I E, bifariam diuidet arcum I H E. Quare ſubtenſa H I eſt æqualis ſubtenſæ H E. Ergo angulus H I E æqualis erit angulo H E I. Iam cùm angulus R I O factus ſit æqualis angulo E I T; ſit autem ex Hypotheſi angulus H I R æqualis angulo H I T: erit angulus H I O ex duobus angulis H I R, R I O conflatus, æqualis angulo H I E ex duobus H I T, T I E conflato. Sed angulus H I E æqualis oſtenſus eſt angulo H E I. Ergo angulus H I O æqualis eſt angulo H E I. Cùm ergo à puncto I cadat recta I H intra circulum, quæ abſcindit ſegmentum I E H capiens angulum I E H æqualem angulo H I O: recta O I per Prop. 32. Lib. 3. Elem. conuerſam circulum tangit in I. Quare. Si circuli ſubtenſam &c. Quod erat probandum.

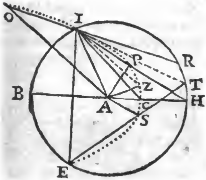
PROP.

PROPOSITIO XXVII. *Theorema.*

SI ex Quadratricis centro A circulus deſcribatur, ipſam in I ſecans: ſecans verò eius Axem in H: ad quod punctum ducatur I H ex puncto I: ex quo item ducatur ad Quadratricis verticem C recta I C. Tum angulo H I C, quem hæ duæ rectæ I C, I H continent, æqualis fiat Angulus H I R.

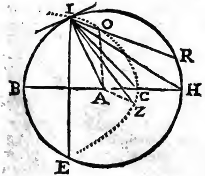
Dico rectam I R Quadratricem tangere in puncto I.

Præparatio.



Hæc eſt hac in materiâ obſeruatione tam digna, quam quæ digniſſima Propoſitio: quâ mirabilis ac planè diuinæ huius curuæ lineæ proprietas præ cæteris inſignis aſſeritur, & declaratur: & verò ex hactenus allatis facilè probatur, hac priùs ſtatutâ præparatione. Si recta A I Quadratricem non tangit in I, Quadratricem ſecat vel vltra I, vt in priore ſchemate, vel citra I, vt in poſteriore, V. G. in puncto O. Ducantur Ergo radij duo A I, A O. Tum angulo I A H fiat æqualis angulus O A Z ducto radio A Z Quadratricem ſecante in Z: quod punctum in priore figura erit ſupra Axem, in poſteriore infra, vt per ſe patet. Ducatur demum recta I Z. His poſitis,

Demonſtratio.



Cùm in vtraque ſchemate Angulus O A Z ſit æqualis Angulo I A H; & ex puncto I ducta ſit chorda I H; ac deinde per idem punctũ I duę ductæ ſint lineæ O I R, & I Z: erunt per Prop. 23. duo anguli H I R, H I Z æquales. Sed ex Hypotheſi duo anguli H I R, H I C ſunt æquales. Ergo duo anguli H I C, H I Z ſunt æquales. Quod eſt abſurdũ. Nam in vtroque ſchemate linea I Z differt à linea I C. Igitur dici nequit rectam I R ductam, vt ſuppoſitio poſtulat, ſe-

care Quadratricem in I,& cum eâ in alio quouis puncto O rurſus concurrere. Quare. Si ex Quadratricis centro &c. Quod erat probandum.

Scholium.

Hinc iam intelligis quo nixus fundamento aſſeruerim, tum in Epilogo Examinis Quadraturæ; tum aliàs in tertiâ parte Elementorum Geometriæ practicæ ad locum linearem ſpectante, Tetragoniſmum abſolutum fore: ſi ars poſſit innoteſcere; quâ Geometricè ducatur linea quocunque in puncto Quadratricem etſi infinitè porrectam contingens. Si enim in hac duplici figurâ ſupponatur recta linea I R Quadratricem tangere in puncto I: idque ex methodo Geometricâ ſtatutum eſſe. Si angulo H I R ex altera parte fiat æqualis angulus H I C; conſtat verticem C Quadratricis Geometricè determinari: quo habito habetur ſtatim non tantùm linea recta circulari æqualis; ſed etiam rectilinea ſuperficies æqualis curuilineæ. Sed hæc, aliáque ex his non minora lineæ huius myſteria hactenus fortaſſe inaudita declarare pergo.

PROPOSITIO XXVIII. *Theorema.*

IIſdem poſitis. Poſitâ ſcilicet in ſchemate priore proximæ Propoſitionis lineâ I R Quadratricem tangente in I.

Dico inter tangentem I R & Quadratricem nullam rectam lineam immitti poſſe, quæ Quadratricem non ſecet.

Demonſtratio.

Oſtendit Eucl.Lib.3. Prop. 16. Elem. non tantùm lineam, quæ ad diametrum circuli in eius extremo puncto perpendicularis foret, circulum tangere: ſed etiam nullam aliam rectam ad idem contactûs punctum adiungi poſſe, quin circulum ſecet. Aliquid hîc ſimile demonſtrandum cenſui, ne quid cuipiam videretur deſiderari; præſertim cùm Appollonius agens Propoſ.32. Lib.1. de contactu linearum rectarum & conicarum, quas proximè Quadratrix æmulatur, hanc ſpeculationem non omiſerit.

Ducatur itaque, ſi fieri poteſt, linea recta T I inter Quadratricem & tangentem R I ita vt Quadratricem non ſecet Angulo H I T æqualis fiat angulus H I Z ductâ lineá I Z, quæ Quadratricem ſecet in puncto Z; ad quod adiungatur radius A Z. Ducatur etiam radius A P ad punctum P, in quo chorda I H Quadratricem interſeca , qui biſariam & ad angulos rectos eandem interſecabit iuxta Prop. 8. Quia igitur duo

duo anguli H I T, H I Z ex vtrâque parte lineæ I H poſiti, ſunt inter ſe æquales: æquales etiam futuri ſunt per Prop. 24. anguli P A I, P A Z. Sed anguli P A I, P A C ſunt etiam æquales vel per eandem Prop. eo quòd anguli H I R, H I C ponantur æquales: vel quia radius A P ad baſim I H Trianguli Iſoſcelis I A H perpendicularis angulum eius I A H ad verticem bifariam diuidit. Ergo duo anguli P A Z, P A C ſunt æquales, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Nulla ergo linea T I inter tangentem R I & Quadratricem duci poteſt, quin Quadratricem ſecet.

Quod hoc etiam modo concludi poteſt. Si ducatur linea quæpiam T I ad punctum I adiungi poſſe inter tangentem R I & Quadratricem, ita vt eam non ſecet. Ducatur à puncto E, in quo circulus I H E Quadratricem ſecat, ad punctum T recta linea E T Quadratricem in S interſecans, & quidem infra verticem C: ſi enim ducatur E R, ea in vertice C Quadratricem ſecat; vt patet: ergo E T ipſam infra C ſecare neceſſe eſt. Ducatur radius A S. Quia ergo à duobus punctis I & E, in quibus circulus Quadratricem ſecat, duæ lineæ I T, E T ad idem circuli punctum T adiunguntur: eæque Quadratrici occurrunt in I & S; ad quæ puncta radij A I, A S emiſſi ſunt: erit per Schol. 2. Prop. 22. angulus I A S æqualis angulo I A H. Quod eſt abſurdum. Nulla ergo linea T I poteſt duci quæ Quadratricem non ſecet. Quod erat probandum.

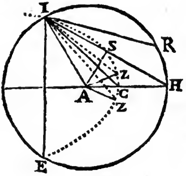
PROPOSITIO XXIX. *Theorema.*

SI Quadratricem tangat in quouis puncto I recta linea R I, per quod punctum I circulus centro A Quadratricis deſcribatur eius Axem ſecans in H; & iungatur I H: ducatur etiam ad verticem C recta linea I C.

Dico Angulos H I R, H I C æquales eſſe.

Demonſtratio.

Hæc Propoſitio conuerſa eſt Propoſitionis 27. quam ſic veram eſſe demonſtro. Si æquales minimè ſint duo anguli H I R, H I C. Sit hic illo maior, aut minor. Fiat ergo H I Z ipſi H I R æqualis ductâ rectâ I Z Quadratricem ſecante in Z: ad quod punctum radius A Z deſtinetur: ducatur etiam radius A S ad ſectionem Quadratricis & ſubtenſæ I H. Quia igitur duæ lineæ I R, I Z duos angulos H I R H I Z ex vtrâque parte ſubtenſæ I H æquales conſtituunt: & ad puncta I & Z, in quibus Quadratrix ab I S ſecatur, ducti ſunt radij A I, A Z:



erit per Prop. 24. angulus SAI æqualis angulo SAZ, Quod eſt abſurdum, ſiue linea IZ ſupra, ſiue infra verticem C Quadratrici occurrat nam SAI æqualis eſt angulo SAH per Prop. 8. ſunt ergo æquales anguli HIR, HIC, quos chorda HI cum tangente IR, & rectâ IC ad verticem C ductâ continet. Quare. Si Quadratricem tangat in quouis &c. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXX. *Theorema.*

Linea Quadratricem tangens cum Quadratricis Axe vltra verticem producto ſemper concurrit.

Expoſitio.

In ſchemate ſuperioris Propoſitionis Quadratricem tangat in I recta RI. Dico rectam RI productam concurrere cum Axe producto vltra verticem C, ſiue ad partes verticis C.

Præparatio.

Centro A per I circulus deſcribatur Quadratricem ſecans in E, ducatúrque Applicata IE: ducatur item chorda IH; item IC; ac denique radius AI. Quibus poſitis: vt oſtendatur lineam tangentem IR concurſuram aliquando cum Axe AH, oſtendi debet duos angulos RIA, HAI duobus rectis eſſe minores: ſic enim per Axioma 11. Lib. 1. Elem. conſtabit dictas lineas concurſuras ad partes H. Illud ergo probemus.

Demonſtratio.

Angulus IAB externus æqualis eſt duobus angulis AHI, AIH internis & oppoſitis Trianguli AIH per Prop. 32. Lib. 1. Elem. hoc eſt, duplus eſt anguli AIH Sed angulus AIH maior eſt angulo HIR: hic enim ex hypotheſi æqualis eſt angulo HIC, qui ſemper minor erit angulo HIA, eo quòd Quadratricis vertex C inter A & H ſemper intercipiatur, lineáque IC proinde inter lineas IA, IH ducatur, angulúmque AIH ſemper diuidat. Totus ergo angulus AIR ſemper futurus eſt minor duplo anguli AIH, hoc eſt angulo IAB. Quod ſi addatur communis angulus IAH: fient duo anguli IAB, IAH (qui ſunt æquales duobus rectis) maiores duobus angulis IAH, AIR.

Quare,

Quare, cùm in duas rectas I R, A H incidat recta I A angulos internos duobus rectis minores cum ipſis continens; concurrent aliquando lineæ I A, A H per citatum Axioma 11. Lib. 1. Elem.

Hoc idem oſtendi hoc etiam modo poteſt. Demonſtratum eſt Prop. 25. lineas, A C, A H, & eam, quæ abſcinditur à lineâ, quæ cum I H angulum æqualem angulo H I C continet ex alterâ parte, qualis eſt angulus H I R, eſſe tres lineas continuè proportionales. Eſt enim Triangulum A I H Iſoſceles. Ergo citatam Prop. illam conuertendo; ſi duabus lineis A C, A H reperiatur tertia proportionalis, à cuius termino ad punctum I recta linea ducatur: hæc cum H I angulum continebit æqualem angulo H I C. Ergo per Prop. 27. ea linea Quadratricem tanget in I. Itaque cùm vnica tantùm linea duci poſſit, quæ in puncto I Quadratricem tangat: alia futura non eſt linea illa, quàm I R, ac proinde linea I R producta, productam A H ſectura ſemper eſt ad partes H. Quare linea Quadratricem tangens &c. Quod probandum erat.

Corollarium.

Ex hac itaque Propoſitione, eiúſque demonſtratione ſecundo loco allatâ, quam Propoſitio 25. ſuppeditat; & ex Prop. 29. præcedente manifeſtum eſt Quadratricis ſagittam A C, radium quemlibet A I ad quodlibet Quadratricis punctum I ductum, ſiue A H; & lineam quæ inter centrum A & tangentem IR ad punctum I ductam intercipitur, eſſe continuè proportionales. Ex quâ Quadratricis, eámque tangentium linearum facultate quid conſecuturum ſit, deinceps oſtendetur.

Monitum.

Hactenus nec paucas nec ſcitu omnino indignas, nondum certè notas celeberrimæ huius inſlexæ lineæ facultates non ſine aliquâ, vt reor, optóque, animi voluptate es contemplatus: vt operæ hanc in tractationem impenſæ pænitendum minimè videatur. Sic habeto nihilominùs longè grauiora ſupereſſe: quæ tibi operta eſſe nolim. Nondum rationem cur Quadratrix, cur τετραγωνίζουσα à primis eius Authoribus Dinoſtrato & Nicomede appellata fuerit, edoctus es: aut ſi qua vel ex Pappo vel ex Clauio tibi innotuit, qui nomen hoc ſortitam aſſerunt, quòd ad Quadrandum circulum àditum aperiat planiſſimum: leuiùs tamen quàm huius Argumenti dignitas ferret, etſi ſubtiliſſima de eo ab iis tradita ſit demonſtratio, rem hanc totam perſtrinxerunt; vt quoddam tantùm eius rudimentum tradidiſſe videantur: cùm caſum tantùm ſingularem propoſuerint omiſſâ vniuerſali, quæ abſolutam diſciplinam decet, tractatione. Quæ, vt ad paulò vberiorem, accuratioremque cognitionem viam parem, primùm exponenda viſa eſt: tum deinceps quæ in idem Argu-

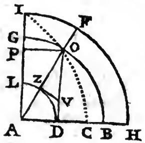
mentum occurrere (occurrere autem non pauca) in medium adducam Geometriæ cultorum gratiâ. Hæc igitur eſt à Pappo Lib. 4. collect. Mathematicarum ab Antiquioribus accepta, & poſteris ab eodem tradita Propoſitio, eiúſque demonſtratio. Hæc à Clauio luculentiſſimè ſuo more explicata: quam Propoſitionum mearum ordini adſcribo, meis expreſſam verbis: memineris verò, vt ad Propoſitionem 1. obſeruaui, ſermonem hîc haberi de eâ tantùm Quadratricis parte, quam circuli Quadrans generat, & complectitur: vtpote quæ ſola, totáque Quadratrix cenſebatur. Sit ergo

PROPOSITIO XXXI. *Theorema.*

SAgitta Quadratricis A C eandem habet rationem ad radium A I: quam radius A I habet ad Quadrantis I F H peripheriam. Hoc eſt, tres lineæ A C, A I, I F H ſunt continuè proportionales.

Demonſtratio.

Si ſagitta A C ad radium A I eandem non habet rationem quam radius A I habet ad arcum I F H: alia aliqua linea maior, vel minor quàm ſagitta A C eandem rationem habebit ad radium A I, quam radius A I habet ad arcum I H. Ponatur primò linea A B maior quàm ſagitta A C ita eſſe ad radium A I; vt A I eſt ad arcum I H. Deſcribatur centro A per B circulus ſecans in O Quadratricem: tum ex A per O radius emittatur A F. Ducantur etiam lineæ OD, OP, illa ad axem A H, hæc ad radium A I perpendicularis. His poſitis.



Cùm ita ſit arcus I F H ad radium A I; vt radius A I ad radium A G, vel A B ex Aduerſario; ſit autem vt radius A I ad radium A G: ita arcus IF H ad arcum GOB. Ita erit arcus I F H ad arcum G O B, vt eſt ad radium A I. Ergo radius A I æqualis eſt arcui G O B per Prop. 9. Lib. 5. Elem. Quia verò ex Quadratricis puncto O ad radium A ducitur perpendicularis O P: ita ſecatur radius A I in P, vt ſectus eſt Quadrantis arcus I F H in F à radio ex A per O traducto, vt conſtat ex Quadratricis generatione: ita vt ita ſe habeat radius A I ad P I, vt ſe habet arcus H F I ad arcum F I. Sed vt arcus H F I ad arcum F I, ita eſt arcus B O G ad arcum O G. Ergo vt A I ad P I, ita eſt arcus B O G ad arcum O G. Et conuertendo. Ita erit A I ad A P, vt arcus B O G ad arcum O B. Cùm ergo oſtenſus ſit radius A I æqualis arcui BOG; æqua-

lis

lis etiam erit recta A P arcui B O per Prop. 14. Lib. 5. Elem. Eſt autem recta O D æqualis rectæ P A. Ergo recta O D æqualis eſt arcui O B. Quod eſt abſurdum. Nam ſubtenſa arcu ſemper minor eſt. Ergo etiam ſemiſſis ſubtenſæ O D minor eſt ſemiſſe ſubtenſi arcûs OB. Quod abſurdum cùm ex eo ſequatur, quòd aſſertum ſit rectam A B maiorem Quadratricis ſagittâ A C, & radium A I, & peripheriam I F H eſſe continuè proportionales: conſtat nullam rectam maiorem ſagittâ A C eſſe poſſe cum radio A I, & arcu I F H continuè proportionalem.

Dicatur ſecundò lineam A D ſagittâ A C minorem, & radium A I cum peripheriâ I F H eſſe continuè proportionales. Oſtendetur etiam ex eâ Aſſertione abſurdum ſequi hoc modo. Centro A per D circulus D Z L deſcribatur: ducatur item per D linea ad axem perpendicularis occurrens Quadratrici in O: tum per O radius emittatur A F, ducatur etiam O P ad A I perpendicularis; ac denique per punctum Z agatur perpendicularis Z V ad radium AF; quæ in Z circulum tanget, ſicut eundem tangit in D recta O D. His poſitis,

Oſtendetur eodem modo quo priùs arcus L Z D æqualis radio A I. Nam, vt radius A D ad radium AI; ita eſt arcus D Z L ad arcum HFI. Sed vt radius A D ad radium A I; ita eſt radius A I ad arcum H F I. Ergo vt radius A I ad arcum H F I; ita eſt arcus D Z L ad eundem arcum H F I. Æquales ergo ſunt duæ quantitates D Z L & A I per Prop. 9. Lib. 5. Elem. rurſus quia per Quadratricis punctum O agitur radius A F; & recta O P ad radium generantem A I perpendicularis: ita erit per Quadratricis generationem arcus H F I ad arcum F I, vt radius A I ad eius partem P I. Sed vt arcus H F I ad arcum F I, ita eſt arcus D Z L ad arcum Z L. Ergo vt radius A I ad eius partem P I; ita eſt arcus D Z L ad arcum Z L. Et conuertendo, erit vt radius A I ad A P; ita arcus D Z L ad arcum D Z. Cùm ergo radius A I & arcus D Z L, prima & tertia quantitas, æquales ſint oſtenſi; æquales etiam erunt per Prop. 14. Lib. 5. Elem. recta A P, ſiue huic æqualis D O, & arcus D Z, quantitas ſecunda & quarta. At abſurdum hoc eſt. Eſt enim arcus D Z minor duabus rectis lineis V Z, V D arcum D Z ambientibus iuxta Axioma ab Archimede ſtatutum Lib. 1. de ſpherâ & Cylin. quo conſtat. *Si duæ lineæ in plano eoſdem habeant terminos ſintque in eaſdem partes cauæ, comprehendentem comprehensâ maiorem eſſe.* Eſt verò recta D O duabus ſimul lineis V Z, V D: maior probatur. In Triangulo O Z V angulus Z rectus eſt ex ſuppoſitione, atque adeò maior angulo Z O V; qui non niſi acutus eſſe poteſt per Prop. 32. Lib. 1. Elem. Ergo latus O V maius eſt quàm latus V Z per Prop. 19. Lib. 1. Elem quare ſi vtrique addatur communis V D, maior erit tota O D duabus ſimul

V Z,

VZ, VD: multò ergo maior erit recta OD arcu DZ. At eidem æqualis oſtenſa eſt ex eo, quòd recta A D (minor poſita quàm ſagitta A C) & recta A I, & peripheria I F H poſitæ ſint tres continuè proportionales.

Cùm ergo duabus lineis, arcui nimirum I F H, & radio A I tertia proportionalis neque maior, neque minor eſſe poſſit, quàm ſagitta A C. erit ipſa A C tertia illa proportionalis: adeóque tres lineæ A C, A I & peripheria I F H erunt continuè proportionales. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Hæc eſt ab Antiquioribus illis lineæ huius Authoribus tradita probatáque Propoſitio: quâ nihil ſubtilius agnoſcat Cyclometria. Verum, vt ſuprà memini, terminis paulò anguſtioribus eſt circumſcripta: cùm ad hunc vnicum caſum alligetur, in quo radius A I ad Axem A C perpendicularis eſt: nec ipſa hæc linea curua vltra I extendi poſſe ſupponatur. Quare nunc à Diuinis illis mentibus apertâ viâ non paulò vniuerſalius Theorema proponere licebit: quod & hunc ipſum ſingularem caſum, & reliquos, ad quoſlibet radios ſpectantes complectatur. Quod ita enuncio.

PROPOSITIO XXXII. *Theorema.*

SI ex centro Quadratricis circulus quilibet Quadratricem ſecans deſcribatur: & ad ſectionis punctum ducantur tùm radius, tum Applicata.

Dico ſagittam ad radium eandem habere rationem, quam habet Applicata ad arcum circuli deſcripti, inter Axem & radium interceptum.

Expoſitio.

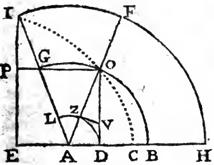
Sit A centrum Quadratricis, ex quo deſcribatur circulus ſecans in I Quadratricem, ciúſque Axem in H: ad puuctum I ſectionis ducatur radius A I; & per idem ducatur Applicata I E. Probandum proponitur ſagittam A C ita ſe habere ad radium A I; vt Applicata I E ſe habet, ad arcum I H, qui inter radium A I, & Axem A H intercipitur.

Demonſtratio.

Si ſagitta A C non eandem habet rationem ad radium A I; quam Applicata A I ad arcum I F H: alia aliqua linea vel longior, vel breuior quàm ſagitta A C eandem habitura eſt rationem ad radium illum A I; quam habet Applicata I E ad arcum I F H. Dicatur ergo primò lineam

A B

A B maiorem ſagittâ A C ad radium A I dictam ſeruare rationem Centro A per B circulus deſcribatur G O B Quadratricem in O, & radium A I in G interſecans. Ac per O radius A F traiiciatur: ducatur item O D linea ad Axem perpendicularis: axi autem parallela O P. His poſitis.



Cùm ſit vt radius A B ad radium A I; ita arcus G O B ad arcum ſibi ſimilem I F H iuxta Prop. 11. Lib. 5. Collect. Mathem. Pappi: vt autem A B ad A I, ita ponatur Applicata I E ad arcum I I H: eadem erit ratio arcûs G O B ad arcum I F H; & Applicatæ I E ad eundem arcum I F H: nempe ratio A B ad A I. Ergo per Prop. 9. Lib. 5. Elem. arcus G O B æqualis erit Applicatæ I E. Iam verò cùm per punctum O Quadratricis ducatur tum radius A F, tum recta O P Axi parallela, ſiue ad Applicatam I E perpendicularis: Ita erit per generationem Quadratricis, & per ea quæ Prop. 6. expoſita ſunt, Applicata E I ad ſuî partem P I; vt eſt arcus H F I ad arcum F I. Sed vt arcus H F I ad arcum F I; ita eſt arcus B O G ad arcum O G (ſunt enim tam arcus H F I, B O G; quàm arcus F I, O G ſimiles) Ergo ita eſt Applicata E I ad P I; vt arcus B O G ad arcum O G. Et conuertendo. Ita eſt Applicata E I ad E P, vt arcus B O G ad arcum B O. Eſt autem prima quantitas E I æqualis tertiæ quantitati B O G. Ergo per Prop. 14. Lib. 5. Elem. quantitas ſecunda E P eſt æqualis quartæ B O. Ergo cùm duæ rectæ E P, D O ſint æquales, erit recta D O, æqualis arcui B O. Quod eſt abſurdum. Abſurdum ſiquidem eſt aſſerere chordam, cuius ſemiſſis eſt recta D O, æqualem eſſe arcui, cuius ſemiſſis eſt arcus O B; atque adeò rectam ipſam D O æqualem eſſe arcui B O. Quod abſurdum, cùm ex eo ſequatur, quòd aſſertum ſit lineam A B ſagittâ A C maiorem ita ſe habere ad radium A I; vt Applicata E I ſe habet ad arcum I F H: conſtat fieri non poſſe, nec poſſe aſſeri rectam A F ad radium A I ita ſe habere, vt Applicata E I ad arcum I F H.

Sed neque recta vlla minor quàm ſagitta A C ad radium A I eandem rationem habere poteſt, quam habet Applicata E I ad arcum I I H; Quæ eſt altera pars Demonſtrationis exponenda. Dicatur ergo rectam A D ſagitta A C minorem ad radium A I ita ſe habere, vt ſe ha-

H bet

bet Applicata E I ad arcum I F H. Centro A per D deſcribatur arcus D Z L: item in puncto D ad Axem ducatur perpendicularis D O Quadratrici occurrens in O: per quod punctum emittatur radius A F, & ducatur O P ad Applicatam perpendicularis: ac denique per punctum Z, in quo radius A F arcum L Z D interſecat, ducatur ad ipſum radium perpendicularis Z V. Cùm igitur ita eſſe dicatur A D ad A I, vt Applicata E I eſt ad arcum I F H. Vt autem eſt A D ad A I, ita ſit arcus L Z D ad arcum ſimilem I F H: ita erit Applicata E I ad arcum I F H, vt arcus L Z D eſt ad eundem arcum I F H. Ergo per Prop. 9. Lib. 5. Elem. arcus L Z D æqualis eſt Applicatæ E I. Iam, cùm per punctum O Quadratricis ducatur tum radius A F, tum ad Applicatam E I perpendicularis O P: ita erit ex generatione Quadratricis Applicata E I ad ſuî partem P I; vt arcus I F H ad ſuî partem I F. Sed vt arcus I F H ad arcum I F ita eſt arcus L Z D ad arcum L Z. Ergo ita eſt arcus L Z D ad arcum L Z, vt Applicata E I ad ſuî partem P I. Et conuertendo. Ita erit arcus L Z D ad arcum Z D, vt Applicata E I ad rectam E P. Sed Applicata E I eſt æqualis arcui L Z D: ergo etiam E P æqualis erit arcui Z D per Prop. 14. Lib. 5. Elem. Cùm autem D O æqualis ſit rectæ E P; erit etiam D O æqualis arcui Z D. Quod dici non poteſt propter eandem rationem, quam in ſecundâ parte Demonſtrationis præcedentis Propoſitionis adduxi. Quia ſcilicet arcus Z D in eaſdem partes cauus eſt cum lineis V Z, V D: quæ arcum Z D includunt, & cum eo habent eoſdem terminos Z & D: quo fit iuxta ibidem citatum Archimedis Axioma Lib. 1. de ſphærâ & Cylin. vt duæ rectæ V D, V Z ſimul maiores ſint arcu Z D: quibus adhuc maior eſt recta D O: maior ſiquidem eſt recta V O ſubtendens angulum maiorem O Z V Trianguli O Z V, quàm recta V Z ſubtendens eiuſdem Trianguli minorem angulum V O Z. Ergo additâ communi rectâ lineâ V D: tota D O maior erit duabus ſimul lineis V D, V Z. Ergo multò maior erit D O arcu Z D: Sed & eidem oſtenſa eſt æqualis. Quod dici non poteſt. Ergo nec dici poteſt lineam A D ſagittâ A C minorem, eandem habere rationem ad radium A I: quam habet Applicata E I ad arcum I F H. Sed neque vlla linea A B maior quàm ſagitta A C ad radium A I eandem, vt oſtenſum eſt, rationem habere poteſt: quam habet Applicata E I ad arcum I E H. Ergo ipſa ſola ſagitta A C ita erit ad A I, vt Applicata E I ad arcum I F H. Quare. Si ex centro Quadratricis circulus &c. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Nunc demum patet euidentiſſimè ex Prop. præcedente, eiúſque probatione à me allatâ, quæ eadem eſt cum demonſtratione Propoſitionis 31.

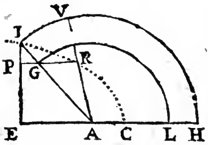
tionis 31. à Pappo petitâ; Veterum Quadratricem, vt aliàs memini, nouæ huius partem tantùm quandam eſſe, eiúſque initium: eámque proprietatem nobiliſſimam, vt ſagitta A C, radius A I ad Axem perpendicularis, & Quadrantis arcus I F H ſint continuè proportionales, caſum tantùm eſſe ſingularem in hoc à cæteris diuerſum: quòd in hoc caſu recta A I, cùm ſit ad Axem perpendicularis, ſit Applicata ſimul, & radius: Quo fit, vt hæ tres lineæ A C, A I & arcus I F H ſint continuè proportionales, mediâ A I duarum vices gerente, radij ſcilicet & Applicatæ: cæterùm caſus hic eadem vniuerſali Propoſitione 32. proximè allatâ non minus quàm cæteri omnes, comprehendatur, vt patet ſi his terminis efferatur huic caſui accommodatis. *Si ex centro A Quadratricis circulus deſcribatur Quadratricem ſecans in I, ad quam ſectionem ducantur tum radius A I, tum Applicata A I: Sagitta A C ita erit ad radium A I; vt Applicata A I eſt ad arcum I F H inter Axem A H & radium A I interiectum.*

PROPOSITIO XXXIII. *Theorema.*

SI centro A Quadratricis circulus I H deſcribatur ipſam in I ſecans, & per punctum I ducatur tum radius A I, tum Applicata I E; ac demum centro A, radio A G, qui æqualis ſit Applicatæ I E circulus G L delineetur.

Dico ſagittam A C, Applicatam E I ſiue ei æqualem A G, & arcum G L inter Axem A H, & radium A I interceptum, eſſe continuè proportionales.

Demonſtratio.



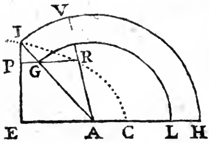
Ita eſt ſagitta A C ad radium A I; vt Applicata I E ad arcum I H per Prop. 32. Et permutando. Ita erit ſagitta AC ad rectam A G Applicatæ IE æqualem; vt radius A I ad arcum I H. Sed vt radius A I ad arcum I H; ita eſt radius A G ad arcum G L arcui I H ſimilem. Ergo. Ita eſt ſagitta A C ad A G; vt A G, ſiue Applicata I E ad arcum G L. Quare ſi centro A Quadratricis circulus &c. Quod erat demonſtrandùm.

PROPOSITIO XXXIV. *Theorema.*

IIſdem poſitis. Si per G (poſitâ A G æquali Applicatæ I E) ducatur ad Applicatam I E perpendicularis G P occurrens Quadratrici in puncto R ; & per R educatur radius A R. qui productus ſecet in V arcum I H.

Dico ſagittam A C, radium A I, & arcum V H eſſe in continuâ proportione.

Demonſtratio.



Cùm oſtenſum ſit Propoſitione antecedente ſagittam A C, Applicatam E I, & arcum G L eſſe continuè proportionales: ſi arcus V H probetur æqualis arcui G L; haud dubium quin eadem ſagitta A C, Applicata E I, & arcus V H ſint etiam continuè proportionales. Illud ergo ita declaratur. Vt ſemidiameter A I ad ſemidiametrum A G; ita eſt arcus I H ad arcum G L per Prop. 11. Lib. 5. Pappi. Sed vt A I ad A G, ſiue ad I E (ſunt enim æquales A G & E I ex ſuppoſitione) ita eſt E I ad E P. Ergo vt eſt E I ad E P: ita eſt arcus I H ad arcum G L. Sed per generationem Quadratricis, vt eſt Applicata E I ad E P; ita eſt arcus I H ad arcum V H. Ergo vt eſt E I ad E P; ita eſt arcus I H tam ad arcum G L, quàm ad arcum V H. Æquales ergo ſunt arcus G L & V H. per 9. Lib. 5. Elem. Cùm ergo ſagitta A C, radius A I, & arcus G L ſint continuè proportionales; continuè etiam proportionales erunt, A C, A I, & arcus V L. Quare iiſdem poſitis. Si per G &c. Quod erat probandum.

Corollarium.

Ex demonſtratione huius Prop. ſequitur arcus illos circulorum inæqualium, æquales eſſe; quorum radij angulis, qui arcubus illis ad centrum inſiſtunt vel arcubus ipſis ſunt reciprocè proportionales. Nam in eodem ſchemate ex eo quòd ſemidiameter A I ad ſemidiametrum A G eandem habeat rationem, quam angulus I A H habet ad angulum V A H; ſiue quam arcus I H habet ad arcum V H: collectum eſt arcum I H ad arcum V H, & ad arcum G L eandem habere rationem, quam ſcilicet habet ſemidiameter A I ad ſemidiametrum A G. Quo

fit,

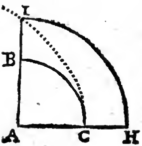
ſit, vt arcus illi V H, G L ſint æquales per Prop. 9. Lib. 5. Elem. patet autem angulum I A H, ſiue G A L, qui inſiſtit arcui G L, ad angulum V A H inſiſtentem arcui V H eandem habere rationem; quam habet reciprocè ſemidiameter A I arcus V H ad ſemidiametrum A G arcûs G L: adeò vt verum ſemper ſit, ſi fuerit ſemidiameter A I maioris circuli I H ad ſemidiametrum A G minoris circuli G L; vt viciſſim angulus G A L aſſumens arcum G L minoris circuli, ad angulum V A H, à quo arcus V H maioris circuli aſſumitur; aſſumptos arcus illos G L, V H eſſe inter ſe æquales.

PROPOSITIO XXXV. *Theorema.*

SI centro A Quadratricis per eius verticem C circulus deſcribatur.

Dico eius Quadrantis B C peripheriam æqualem eſſe lineæ rectæ A I ad Axem perpendiculari, quæ à Quadratrice abſcinditur.

Demonſtratio.



Centro A per I circuli Quadrans I H deſcribatur. Oſtenſum eſt Prop. 31. rectas A C, A I & peripheriam I H eſſe continuè proportionales. Cùm ergo, vt eſt radius A C ad A I; ita ſit arcus B C ad arcum ſimilem I H ex Prop. 11. Lib. 5. Pappi. Sit autem A I ad arcum I H; vt A C ad A I: eadem erit ratio rectæ A I ad arcum I H; quæ eſt arcûs B C ad eundem arcum I H. Ergo per Prop. 9. Lib. 5. Elem. recta A I & arcus B C ſunt æquales. Itaque ſi centro A &c. Quod erat probandum.

Scholium.

Propoſitio hæc collecta eſt à Clauio ad finem Libri 6. Euclidis ex mirabili illâ Quadratricis facultate ab eius primis Authoribus demonſtratâ: quâ conſtat eandem eſſe rationem Quadratricis ſagittæ A C ad rectam I A ad axem perpendicularem, & ad punctum I Quadratricis terminatam: quæ eſt rectæ I A ad arcum I H. Verùm Quemadmodum terminis anguſtioribus Quadratrix ab illis fuerat circumſcripta, vtpote intra circuli Quadrantem collecta: & ex eâ ita definitâ deductum fuerat tres lineas A C, A I & arcum I H Quadrantis eſſe continuè proportionales: qui caſus quidam ſingularis tantùm eſt Pro-

 poſitionis

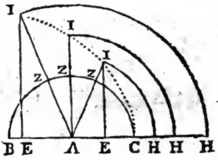
poſitionis vniuerſalis ad omnes radios & Applicatas pertinentis, vt Prop. 32. ſuperiore declaratum eſt: Et ex hac ſingulari proprietate deinceps collectum eſt rectam A I æqualem eſſe arcui B C. Ita nunc iuuat eandem proprietatem ſuâ donare totâ amplitudine, & caſum hunc ſingularem hac Propoſitione expoſitum ad vniuerſale Principium reuocare. Quod ſequente Propoſitione conficio.

PROPOSITIO XXXVI. *Theorema.*

SI ex centro Quadratricis A per eius verticem C circulus B Z C deſcribatur: Tum radius quilibet A I educatur circulum B Z C ſecans in Z, Quadratricem verò in I: vnde Applicata ducatur I E.

Dico hanc Applicatam I E æqualem eſſe arcui Z C, quem radius A I abſcindit ad partes verticis C.

Demonſtratio.

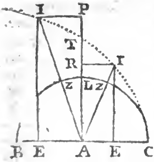


Centro A per I circulus I H deſcribatur. Quia igitur per Prop. 32. ita ſe habet ſagitta A C ad radium A I; vt ſe habet Applicata I E (aut etiam Applicata I A, vt caſum præcedentem hîc rurſus complectar, in quo Applicata cum radio concurrit) ad arcum I H. Vt autem ſagitta A C ad radium A I; ita eſt arcus Z C ad arcum I H ſimilem. Ergo Applicata I E, & arcus Z C eandem habent rationem ad arcum I H Quare per Prop. 9. Lib. 5. Elem. æquales ſunt Applicata I E, & arcus Z C inter radium A I, & Sagittam A C interceptus; quiſquis tandem ſtatuatur radius A I. Ergo vniuerſaliter verum eſt, Quòd ſi ex Quadratricis centro A &c. Quod erat demonſtrandum.

Alia Demonſtratio.

Eâdem factâ ſuppoſitione & ſchematis conſtructione, probandum eſt Applicatam I E æqualem eſſe arcui Z C abſciſſo per radium A I. Ducatur à puncto I ad diametrum generantem A L productam recta I P perpendicularis. Cùm igitur à puncto I Quadratricis ducatur radius I A, & I P ad diametrum generantem A T perpendicularis: ita

erit



erit per generationem Quadratricis recta A T ad rectam A P, vt angulus T A C eſt ad angulum I A C. Siue vt arcus L C ad arcum Z C. Sed per Prop. 35. arcus L C æqualis eſt rectæ A T. Ergo arcus Z C æqualis erit rectæ A P per Prop. 14. Lib. 5. Elem. quâ conſtat, ſi quatuor fuerint quantitates proportionales; vt proportionales ſunt A T, A P; & arcus L C, Z C. Primáque L T ſit tertiæ L C æqualis: ſecundam A P æqualem quoque fore quartæ, quæ eſt arcus Z C. Cùm ergo A P æqualis ſit Applicatæ I E per Prop. 34. Lib. 1. Elem. arcus etiam Z C eidem Applicatæ I E æqualis erit. Quod erat probandum.

Corollarium.

Ex hac demonſtratione conſtat. Si circulus B L C in partes quotcunque æquales ſecetur; & in totidem ſecetur diameter generans, cuius quarta pars eſt recta A I: partes ſingulas circuli ſingulis partibus diametri æquales eſſe; vt totus circulus eſt toti diametro æqualis.

Monitum.

Cernis, opinor, ex præcedentibus, quæ de mirabilis huius inflexæ lineæ facultatibus demonſtrata ſunt non modò non inanem à me tibi ſuperiùs datam fidem, ſed etiam præſtitam cumulatè dum illa eius propè diuina proprietas à primis illius Authoribus præ cæteris obſeruata; quâ conſtat duabus rectis lineis, nimirum Sagittæ, & primariæ Applicatæ, arcum Quadrantis circuli per terminum eiuſdem Applicatæ deſignatum tertium eſſe proportionalem, vt Prop. 31. retuli: oſtenſa eſt Prop. 32. ad quaſvis Applicatas eodem iure poſſe pertinere. Cùm permutando rationum terminos citatâ illâ Propoſitione appellatos Sagitta ad quamuis Applicatam habeat eam rationem; quam habet radius ad arcum circuli per radij & Quadratricis ſectionem deſcripti inter ipſum radium & Axem intercepti. Dum Prop. 33. Oſtendi ſagittam, Applicatam, & arcum ex Applicatâ tanquam ſemidiametro deſcriptum, & inter eundem radium & Axem interceptum, eſſe continuè proportionales. Dum Prop. 34. arcum alium arcui prædicto æqualem ſubſtitui qui foret Sagittæ & Applicatæ tertius proportionalis. Dum Prop. 36. demonſtraui radium quemlibet abſcindere ex circulo per verticem Quadratricis deſcripto arcum æqualem ei, quæ eidem radio adiungitur, Applicatæ: quod ſymptoma ei ſoli Applicatæ fuerat aſſertum, vt Prop. 35. expoſui, quæ cum diametro generante coincidit, & per centrum tranſit. Ex his, inquam, tibi conſtat quanta ad veterem lineæ huius dignitatem, licèt iam non mediocrem, fiat acceſſio. Verumtamen aliam adhuc longè ampliorem fieri comperio ex quodam, quod ipſam

ipſam inter & celebrem illam Archimedeam Helicem intercedit, commercio: quâ contemplatione ſanè iucundâ Geometriam, Geometriaeque cultores carere nolim.

Rara & præ cæteris, quibus abundat Spiralis linea facultatibus, illa, nec immeritò, admiratione digna viſa ſemper fuit, quâ curuam circularem lineam in rectam æqualem eius Author Archimedes hac in Theoreſi Archimedæ ſuperior conuertit: dum rectam lineam cuidam, quam definit, circuli peripheriæ æqualem demonſtrat abſcindi à linea, quæ Helicem quouis in puncto contingat. Verùm non minori, fortaſſe etiam maiori admiratione dignam quiſpiam cenſeat hanc, quam verſamus lineam Quadratricem dum ab illius etiam Tangente curuam recta lineæ æqualem ratione longè planiori præ ſpirâ exhiberi contemplabitur; ac demonſtratione oſtenſiuâ, quod in huiuſmodi Theorematibus rarum admodum eſt, euidenter probari comperiet. Quod vt clariori proſequar methodo, proponenda in primis videtur Helicis generatio, & cum Quadratricis ſuperiùs expoſitâ generatione conferenda: ex eâ ſiquidem vtriuſque huius lineæ origine, quæ apprimè affinis eſt, vtriuſque non abſimiles facultates non ſine voluptate licebit deinceps contemplari: quanquam, vt conſtabit, ſuis Quadratrix ita contenta ſit, vt alienis ab Helice petitis carere facilè poſſit. Hæc eſt ergo Helicis hîc obiter exponenda generatio.

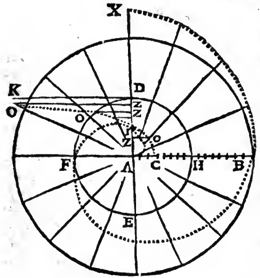
PROPOSITIO XXXVII. *Definitio.*

Helix, Volûta, ſiue linea ſpiralis, eſt curua quædam linea: quam circuli radius in orbem circa immotum centrum vniformi motu conuerſus donec ad priſtinum locum reſtituatur & punctum à centro illum eundem radium eodem temporis ſpatio decurrens deſcribunt.

Expoſitio.

Sit circuli radius A B; qui circa centrum A quietum conuerti in orbem concipiatur alios & alios eiuſdem circuli radios deinceps occupãs, donec ad ſitum priſtinum, vnde diſceſſit, A B reſtituatur: dum eodem temporis ſpatio punctum A radium illum decurrit motu vniformi, ita vt ad alterum eiuſdem radij terminum B eodem momento perueniat, quo radius A B curſum ſuum abſoluit, & ad ſitum A B poſtliminio regreſſus eſt. Eo motu punctum A lineam inflexam A I F B veſtigiis ſuis deſignabit à centro A exortam, & ad metam B terminatam: quæ Helix, ſiue Spira Archimedis in plano deſcripta (alia enim eſt in ſolido, ſiue Cylindro, aut cono exarata) nuncupari ſolet.

Hæc



Hæc porrò ſpira vltra B produci poteſt; ſi radius A B rurſus in orbem agatur, motúmque ſuper eo punctum curſum eodem modo peragat, factáque radij integrâ hac cõuerſione lineam emenſum fuerit priori lineæ A B æqualem: tunc enim ſecunda ſpiræ conuerſio, ſiue periodus abſoluta fuerit: quam in hoc ſchemate productam vſque ad X intueris; nec aliter tertia, quartâve &c. deſignari poterunt in infinitum.

Habes helicis deſcriptionem mente conceptam: quam ad praxim haud ægrè reuocare licebit, ipſámque deſignare; ſi & radium A B & circulum, in partes æquales vtrinque multitudine pares diuiſeris. Tum primo radio poſt radium A B particulam vnam radij A B, radio ſecundo duas, tres radio tertio &c. aſſignaueris; donec tandem emenſo orbe, numeróque radiorum particulas omnes radij A B exhauſeris, & ad extremum eius terminum B deueneris. Tunc enim per ſingula ſingulis in radiis deſignata puncta curuam lineam leniter deduces, vt lineas huiuſmodi anomalæ curuitatis deduci ſolent, ductámque cernis hoc in ſchemate. Deſignationis huius ratio apertior eſt, quàm vt pluribus explicari debeat. Quo enim tempore radius A B partem primam circuli emenſus eſt, eodem punctum A partem primam radij primi emenſum eſſe neceſſe eſt: vt tandem poſt radios omnes decurſos, & ad priſtinum locum, vnde diſceſſerat, reſtituto radio A B; mobile punctum A vltimam partem radij A B attingat, & in vltimo eius termino B conquieſcat.

Radius porrò A B iure dicatur radius primarius, aut radius generans; ſiue, vt quibuſdam placet, terminus reuolutionis: lineæ autem reliquæ à centro, ſiue ſpiræ ortu A ad eius peripheriam ductæ, radij ex more dicendæ ſunt. Atque hæc eſt ſpiræ generatio, hæc eiuſdem ex generationis modo inſtituta deſignatio. Accipe nunc primam ex eius generatione deductam proprietatem.

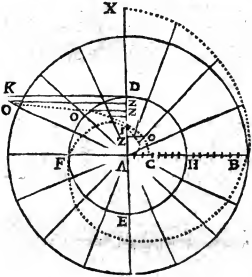
I PROP.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXVIII. *Theorema.*

SI à ſpiræ ortu A duo quicunque ducantur radij A I, A F ad ſpiræ peripheriam: eadem erit ratio radij A F, ad radium A I: quæ eſt anguli, quem radius A F cum radio primario A B continet, ad angulum I A B à radio altero A I, & eodem radio primario A B contentum.

Demonſtratio.



Hæc eſt prima ſpiræ, & ex eius generatione immediatè deriuata proprietas: ex quâ facilè innoteſcit. Cùm enim eodem tempore radius A B motu vniformi circulum decurrat; quo mobilo punctum A motu etiam vniformi radium ipſum A B dum conuertitur, decurrit. Quæ fuerit ratio temporis impenſi ad conuerſionem radij A B donec ad radium A F perueniat; ad tempus impenſum ad eiuſdem radij A B conuerſionem vſque dum radium A I attingat: eadem erit tam arcûs inter radium A B, vnde motus initur, & radium A F interiecti, ad arcum inter A B & radium A I interiectum: quàm radij A F, qui pars eſt decurſa totius radij A B, ad radium A I partem item radij A B decurſam. Sed eadem eſt arcuum, & angulorum arcubus inſiſtentium ratio per Prop. 33. Lib. 6. Elem. Ergo eadem eſt ratio radij A F ad radium A I: quæ eſt anguli F A B (hunc liceat hoc in caſu angulum appellare etſi nulla ſit inclinatio linearum) ad angulum I A B. Quod erat oſtendendum.

PROP.

PROPOSITIO XXXIX. *Definitio.*

Q Vadratrix Helici cuipiam connata ea dicitur: cuius circulus generans idem habet centrum cum circulo Helicis generante; generans verò diameter æqualis eſt primario Helicis radio.

Expoſitio.

In eodem Diagrammate centro A circulus D F E deſcribatur ſumptâ eius ſemidiametro A D æquali ſemiſſi radij A B, quo Helix genita eſt: vel certè deſcribatur per F in quo Helix radium A B productum interſecat; Eſt ſiquidem A F ſemiſſis radij A B, cùm mobile punctum A ſemiſſem radij A B decurriſſe debuerit, dum conuerſus radius A B ſemicirculum eſt emenſus. Erit ergo circuli illius D F E diameter D E æqualis radio A B: atque adeò in tot partes æquales diuidi poterit, in quot diuiſus eſt idem radius A B: & ſimiliter circulus D F E in tot etiam diuiſus fuerit, in quot diuiditur circulus Helicis generans; & quidem per eoſdem radios, quibus Helicis circulus diuiditur. Itaque ſemidiameter A D (hæc enim ſufficit ad ſuperius Quadratricis cornu deſcribendum, de quo ſolo deinceps mentio fiet) in debitas partes Z Z diſtribuatur, per quas rectæ Axi A B parallelæ, ſiue ad A D perpendiculares agantur, radios ex A emiſſos ſingulæ ſingulos ſibi reſpondentes in O interſecantes: per quas ſectiones Quadratrix deducenda erit. Hanc igitur Quadratricem, cuius diameter generans D E æqualis eſt radio Helicem generanti A B, & generans circulus D F E circa diametrum D E æqualem eidem radio A B deſcribitur: hanc, inquam, Quadratricem Helici connatam ad aliarum diſtinctionem; quarum idem quidem centrum A foret; iidémque radij circulos earum diuidentes exiſterent; ſed diameter radio A B foret inæqualis; nuncupandam cenſeo propter illam diametrum D E, & radium A B æquales, & circulum D F E eódem centro A deſcriptum, & ab iiſdem radiis in partes æquales diſtributum; à quibus Helicis circulus generans diſtribuitur.

Cæterùm, vt hæc harum duarum linearum affinitas, earúmque generationis ſimilitudo planiùs concipiatur; expedit paulò aliter quàm Propoſitione 2. explicatum eſt, linearum Quadratricem generantium motum ordiri. Ita enim citatâ Prop. inſtituitur, vt Aſymptotus D K ſenſim per diametrum generantem D E defluat, donec ad eius termi-

num inferiorem E peruenerit: eodémque tempore ſemidiameter A F circuli generantis conuertatur ſurſum verſùs donec emenſo orbe toto ad locum A F priſtinum reſtituatur. Quibus lineæ D K, & radij A F ſic inſtitutis motibus fit, vt Quadratricis initium ſtatuarur ad ſpatium infinitè diſtans, ad quod ſuperius eius cornu pertingere concipitur, ſicut & inferius, abſolutis motibus. At quia ſpiræ deſignatio inchoatur radio generante A B ſurſum verſùs conuerſo, ſpiræque principium in eo ſtatuitur: etiam aptiùs ad rem noſtram fuerit initium Quadratricis in eius vertice C ſtatuere: ita vt idem radius A B ſiue A H vtriuſque lineæ tam Quadratricis quàm Helicis deſignationi eodem tempore inſeruiat, dum verſùs D conuertitur. Tunc autem Axem F H Quadratricis parallelo ſemper ſeruato ſitu ſurſum ferri per ſemidiametrum A D continget donec eius terminum D attingat, ſitúmque Aſymptoti D K occupet: radius verò A H conuerſus eodem inſtanti ad axem A F ſemicirculo H D F emenſo perueniat, cornúque Quadratricis ſuperius longitudinis immenſæ, ad cuius terminum duæ lineæ parallelæ Aſymptotus D K, & Axis A F conuenire dicantur, exaratum ſit. Quo tempore exaratum etiam erit Helicis ſegmentum ſuperius A I F. Vt verò cornu inferius Quadratricis continuato illo motu deſignetur, radius A F deorſum verſùs conuertetur; eodémque momento Aſymptotus D K ad alterum diametri generantis terminum E tranſuolabit, à quo vſque dum ad A peruenerit ſurſum feretur ac tandem Axem A C occupabit; dum ad eundem eodem momento perueniet radius A F percurſo ſemicirculo F E H, locúmque A H, vnde primùm diſceſſerat, occupabit: eiuſdem autem radij motu mobile punctum A deferentis deſcriptus erit inferior ſpiræ arcus.

PROPOSITIO XL. *Theorema.*

SI quilibet radius A G Helicis producatur donec connatam Quadratricem ſecet in O: & à puncto O Applicata ducatur O S.

Dico hanc Applicatam OS æqualem eſſe Helicis radio A G

Demonſtratio.

Ducatur à puncto O ad ſemidiametrum generantem A D perpendicularis O Z, ſiue Axi parallela. Quia igitur per Prop. 38. eadem eſt ratio radij A F Helicis ad eiuſdem radium A G: quæ eſt anguli F A H (qui eſt duobus rectis æqualis) ad angulum G A H: ſiue, quæ eſt ſemicirculi F D H ad arcum X D H. Quæ autem ratio eſt ſemicirculi

F D H

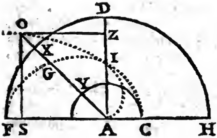
F D H ad arcum X D H; ea eſt ſemidiametri A D, ad eius partem A Z, vt ex conſtructione Quadratricis proximè explicatâ conſtat. Ergo ita eſt radius A F ad radium A G, vt eſt A D ad A Z. Sed A D eſt æqualis radio A F. Ergo A Z æqualis eſt radio A G. Sunt autem A Z, & Applicata O S in rectangulo O A æquales. Ergo æquales etiam futuræ ſunt O S & A G. Quare. Si quilibet radius &c. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XLI. *Theorema.*

SI centro connatæ Quadratricis A per eiuſdem verticem C circulus C Y deſcribatur.

Dico omnes radios ſpiræ, velut A G, abſcindere ex circulo C Y arcus ad partes C ſibi æquales: ita vt arcus Y C ſit radio A G æqualis.

Demonſtratio.



Cùm Prop. 36. oſtenſum ſit arcus circuli C Y à quolibet Quadratricis radio A O abſciſſos, æquales eſſe Applicatæ O S; quæ ad radium adiungitur in puncto, in quo Quadratricem ſecat, proximâ verò Prop. Singulis Applicatis O S æquales oſtenſi ſint ſinguli radij A G: patet ſingulos hoſce radios A G abſciſſis arcubus Y C æquales eſſe. Ergo. Si centro connatæ Quadratricis &c. Quod erat declarandum.

PROPOSITIO XLII. *Theorema.*

SI Quadratrix ſpiráque connatæ deſcribantur.

Dico ſeſe mutuò tangere in medio ſemidiametri Quadratricem generantis puncto.

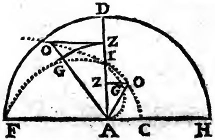
Præparatio & Expoſitio.

Sit ſpira A I G, eíque connata Quadratrix C I O. Conſtat quidem in primis vtramque hanc lineam tranſire per idem punctum I, quod medium eſt ſemidiametri generantis A D; ita vt in I bifariam ab vtrâque hac curuâ lineâ diuidatur. Nam vt radius A H conuerſus, dum ad ra-

Digitized by Google

dium A D, qui ſemicirculum F D H generantem bifariam diuidit, peruenit; ita linea F H ſitum ſeruans parallelum ad medium ſemediametri A D eodem temporis momento peruenire debet, ac ſemiſſem illius decurrere; atque adeò eandem bifariam in eo puncto ſecare debet Quadratrix. Sed an non etiam mobile punctum A, ſpirámque deſcribens medium idem punctum attigiſſe debet; cùm radius primarius illud deferens ad radium A D peruenit? tranſit ergo vtraque hæc linea curua per medium punctum I ſemidiametri A D. Probandum ergo eſt ambas illas lineas ita in puncto I conuenire, vt in alio nullo puncto conueniant, ſed ab inuicem abſcedant. Ducatur radius quilibet A O Quadratricis tam vltra quàm citra I: & à puncto O ad ſemidiametrum A D ducatur perpendicularis O Z: ac denique centro A per Z circulus deſcribatur. Is neceſſariò tranſibit per Helicis punctum G, in quo eam ſecat radius A O. Nam per Prop. 40. radius A G ſpiræ, æqualis eſt Applicatæ per O ductæ: quæ æqualis eſt rectæ A Z. Ergo circulus per Z ex centro A delineatus tranſit per G. His poſitis.

Demonſtratio.



Radio quocunque A O ad Quadratricem ducto; & à puncto O ad diametrum generantem A D ductâ perpendiculari O Z; vt linea A Z Applicatæ per O ductæ æqualis definiatur: ſemper radius A O in Triangulo rectangulo A Z O maior erit latere A Z. Sed A G æqualis eſt lateri A Z, cùm ſit Applicatæ per O ductæ æqualis. Ergo nullum eſſe poteſt Quadratricis punctum, quod extra Helicem non cadat. Vnicum ergo eſt vtrique commune punctum I, in quo ambas neceſſariò conuenire probatum eſt. Ergo in eo ſeſe mutuò tangunt, non autem ſecant: cùm Quadratrix, vbi ab eo puncto diſceditur, tota extra Helicem abſcedat. Quare. Si Quadratrix, ſpiráque connatæ &c. Quod erat probandum.

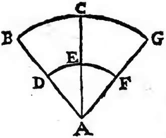
PROPOSITIO XLIII. *Theorema.*

SI duorum arcuum B C, D F radij A B, A D, ita inter ſe fuerint; vt reciprocè duo anguli D A F, D A E illis arcubus inſiſtentes,

Dico arcus illos B C, D F eſſe æquales.

Demonſtra

Demonſtratio.



Hoc ipſum quidem Corollario Prop. 34. obſeruatum eſt. Sed, cùm vſui non mediocri futurum ſit in ſequentibus, peculiari Propoſitione exponendum viſum eſt. Itaque cùm ſit A B ad A D; vt angulus D A F ad angulum B A C, ſiue ad angulum DAE : ſit autem vt angulus DAF ad angulum D A E; ita arcus D F ad arcum D E per Prop. 33. Lib. 6. Elem. ita erit arcus D F ad arcum D E, vt radius A B eſt ad radium A D. Sed vt radius A B ad radium A D; ita eſt arcus B C ad arcum D E. Vt ex Pappo Prop. 11. Lib. 5, collect. deducitur. Ergo per Prop. 9. Lib. 5. Elem. æquales ſunt arcus B C, D F. Quæ æqualitas hoc etiam modo colligi poterit. Producatur A F donec in G arcui B C producto occurrat. Erit angulus D A F, ſiue B A G ad angulum B A C: ita ex hypotheſi radius A B ad radium A D. Sed vt A B ad A D ita eſt arcus B G ad arcum D F: vt autem angulus B A G ad angulum B A C; ita idem arcus B G eſt ad arcum B C. Cùm ergo ſit arcus B G ad arcum D F, vt eſt ad arcum B C; æquales erunt duo arcus B C, D F per Prop. 9. Lib. 5. Elem. Quod erat probandum.

PROPOSITIO XLIV. *Poſtulatum.*

Poteſt datus quilibet angulus ad alium quendam angulum datam habere rationem: ſicut & arcus circuli ad alium eiuſdem circuli arcum.

Expoſitio.

Minùs æquum primâ fronte videatur hoc Poſtulatum. Si enim Angulus rectus, verbi gratia, proponatur; qui ad alium angulum rationem debeat habere ſub-ſextuplam: quiſnam futurus eſt ille angulus recti anguli ſextuplus, cùm ſpatium ad plani alicuius punctum conſtitutum quatuor tantùm rectis angulis, quos duæ lineæ ſeſe in eo puncto perpendiculariter decuſſantes continent, æquiualere poſſit? nullus ergo angulus rectus rationem ad alium quempiam angulum habere poteſt minorem quàm ſub-quadruplam; vel contrà nullus angulus ad rectum, rationem maiorem quàm ad ſummum Quadruplam. Aſſero tamen æquiſſimum eſſe Poſtulatum hoc, & vt euidentiſſimum, ſi rectè intelligatur, in Principiorum numerum referri debere.

Notan.

Notandum igitur non parem angulorum, & rectarum linearum eſſe rationem. Recta enim quælibet linea ad aliam aliquam, datam poteſt rationem habere abſque omni eius vel totius, vel alicuius eiuſdem partis repetitione: quæ in angulis neceſſaria eſt. Diſparitatis ratio in eo verſatur: quòd recta quælibet linea poſſit in maiorem, & maiorem ſine termino longitudinem produci, eóque modo ita determinari, vt integra & non conciſa ad alteram rectam, rationem quancunque datam habeat. At Anguli, huiuſmodi incrementum non admittunt. Cùm angulorum ampliſſimus quatuor rectis (ſi tamen angulus dici queat ille, qui lineis linearúmque omni inclinatione caret) ſit æqualis: Verum tamen, ſi angulus quilibet repetatur, quid obſtat quin ita, quoties res feret, repetitus ad alium datum angulum datam rationem habeat? Hoc ergo ſenſu poſitum Poſtulatum aſſenſum meretur, nec reiici poteſt.

Par eſt arcuum eiuſdem circuli cauſa: neque enim poterit arcus quilibet datus ad alium eiuſdem circuli arcum quamlibet datam rationem ſeruare, niſi repetatur, vel totus ipſe circulus, vel quædã eius pars: vt ſi ſexta circularis peripheriæ pars debeat ſub-decuplam rationem habere ad aliam eiuſdem circuli peripheriam: id abſoluetur, ſi toti peripheriæ (quæ ſextupla eſt datæ partis ſextæ) addantur quatuor partes item ſextæ, vt fiat arcus decuplus partis ſextæ, ad quem pars ſexta rationem datam ſubdecuplam habere poſſit. Eſt verò inter angulos & arcus circulorum diſparitas quædam. Nam circuli cuiuſuis arcui, vel etiam toti eius peripheriæ vel ſemel vel pluries ſumptæ dari poteſt æqualis arcus alterius circuli, vel aliam quamlibet ad eum rationem habens, vt Prop. 43. proximè antecedente declaratum eſt quod angulis non conuenit: Quilibet ſiquidem angulus ſuâ in ſpecie infimâ ita conſtituitur & completur per differentiam talis aut talis duarum linearum eum conſtituentium inclinationis, aut earum mutui ad inuicem ſitûs; vt alius nullus ab eo diuerſus poſſit ei eſſe ſimilis: contrà quàm in circulis, aut circulorum arcubus contingat; omnes enim circuli, circulorúmque peripheriæ ſimiles ſunt, & earum arcus, varios habent aliorum circulorum arcus ſimiles, qui æquales non ſunt, ſed quamlibet rationem inter ſe habere poſſunt. Atque ex hoc Principio conſequitur, vt ad figurarum planarum rectilinearum ſimilitudinem, vt ex Defin. 1. Lib. 6. Eucl. conſtat, requiratur ratio laterum æqualis; quæ eadem in lateribus valde inæqualibus ſeruari poteſt: dum angulorum æqualitas requiritur: eò quòd nimirum nullus angulus alium ſibi ſimilem agnoſcat præter eos, qui ſibi ſunt æquales. Atque ita figura ad figuram ſimilitudinem perfectam habet; ſi omnia quibus vtraque conſtat (quæ alia non ſunt præter angulos & latera) ſint ſimilia: anguli ſcilicet ſint æquales,

æquales, & latera proportionalia. Quæ ſint obiter; & ex occaſione dicta.

PROPOSITIO XLV. *Problema.*

DVctâ quacunque lineâ ad Quadratricem ex eius centro, eíque adiunctâ Applicatâ: deſcripto item ex eodem Quadratricis centro, per ſectionem eiuſdem, ductæque lineæ, circulo: reperire arcum circuli ope tum Quadratricis, tum ei connatæ Helicis; ad quem ita ſe habeat arcus deſcripti circuli inter Axem & ductam ad Quadratricem lineam interceptus; vt ſe habet Applicata ad ductam illam lineam ſiue radium, cui adiuncta eſt.

Expoſitio.

Sit in figura 33. inſtar omnium Quadratrix C I O, eíque connata Helix A I G: cuius radius generans ſit A L, idem qui eſt Quadratricis Axis. Ducatur autem ex centro Quadratricis A ad ipſam radius quicunque A O: cui adiungatur Applicata O S ad Axem perpendicularis: ac denique centro A per O circulus deſcribatur Quadratricis Axem ſecans in L.

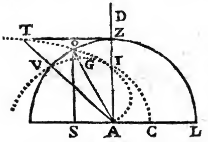
Quæritur arcus huius deſcripti per O circuli, ad quem ita ſe habeat arcus O L inter Axem & ductum radium A O interceptus; vt ſe habet Applicata O S ad radium A O: quæritur autem adhibitâ tum Quadratricis, tum Helicis operâ.

Conſtructio & Demonſtratio.

Ex generatione Quadratricis tractatûs huius initio expoſitâ colligitur vniuerſale Problema, eiúſque ſolutio: quo poteſt imperari, vt datâ quacunque ratione duabus rectis lineis expreſsâ, ductóque quouis circuli arcu; arcus inueniatur, ad quem datus arcus datam habeat rationem. Sed hoc ita vniuerſaliter propoſitum Problema ad hanc hypotheſim reduci neceſſarium eſt. Vt quæ deinceps ad eam pertinentia veniunt explicanda, faciliùs, clariúſque & tradantur & percipiantur; ea præſertim, quæ Helicem inter & Quadratricem eſt ſumma conſenſio.

Etſi porrò poſſit ad Problematis huius ſolutionem integra Quadratrix ſuo duplici cornu in infinitum producto conſtans adhiberi; vnicum tamen ex ſemicirculo generante, & generante ſemidiametro productum, quod ſimpliciùs tractari eo modo res noſtra videatur, nec

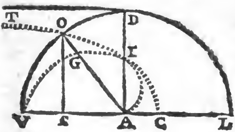
vtrumque illud cornu exigat, aſſumo. Sit itaque Quadratricis ſemidiameter generans A D, quam quidem Applicata nulla O S poteſt excedere. Vltima enim Quadratricis Applicata, quæ infinito ſpatio diſtat, æqualis tantùm eſſe poteſt huic ſemidiametro A D. At verò radius A O breuior, vel longior eſſe poteſt, prout ad Quadratricis punctum aliquod vertici propius, vel remotius admouetur. Poterit ergo interdum radio generante A D eſſe breuior, aliàs ei æqualis, aliàs eodem longior.



Primò itaque ſit radius ille A O minor radio A D: & per Z in quo circulus per O ductus ſemidiametrum generantem ſecat, ducatur linea Axi parallela Z T Quadratricem ſecans in T: per quod punctum T educatur è centro A radius ſecans in V circulum per O deſcriptum, & cum Axe A L intercipiens arcum V L. Dico arcum hunc V L, eum eſſe qui quæritur: ad quem ſcilicet arcus O L ita ſe habet; vt Applicata O S ſe habet ad radium A O. Ratio aperta eſt ex generatione Quadratricis. Nam Applicata O S pertinet ad arcum O L; recta verò A Z æqualis eſt Applicatæ, quæ per T ad Axem duceretur perpendiculariter. Vt autem ſe habent Applicatæ, ſiue Applicatis æquales O S, A Z ſiue A O; ita ſe habent arcus L O, L V illis Applicatis debiti per Quadratricis generationem.

Quòd ſi ad determinationem eiuſdem arcûs V L ſpiram velis adhibere: ecce quàm expedita ſit illius ope determinatio. Circulus enim ille centro A per O deſcriptus ſpiram ſecat in puncto V, ita vt arcus L V ab Axe Quadratricis inchoato (qui idem eſt etiam radius ſpiræ generans) & in conſequentia Helicis tendens vſque ad ſectionem V circuli & Helicis, ita ſit ad arcum L O, vt eſt Applicata O S ad radium A O Quadratricis. Ratio eſt: quia radius A G Helicis, qui ab ipsâ abſcinditur ex Quadratricis radio A O, æqualis eſt Applicatæ O S per Prop. 49. At per Prop. 38. ex Archimedis Propoſitione 14. petitam, ita eſt arcus L V ad arcum L O; vt eſt radius Helicis A V ad eiuſdem radium A G, hoc eſt, A O ad O S. Itaque hoc in primo caſu: in quo ſupponitur Quadratricis radius A O minor ſemidiametro A D Quadratricem generante, rectè definitus eſt ope tam Quadratricis, quàm Helicis, Arcus qui quærebatur. Idem in reliquis præſtemus.

Secundò

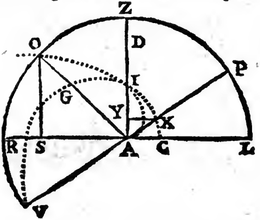


Secundò. Radius A O proponi poteſt huiuſmodi, vt generanti ſemidiametro A D ſit æqualis. Quo in caſu aſſero arcum L O ita ſe habere ad ſemicirculum generantem L D V; vt eſt Applicata O S ad A O, ſiue A D. Nam ſemidiametro generanti A D, vt ex generatione Quadratricis Prop. 2. vel Prop. 59. expoſitâ conſtat, reſpondet ſemicirculus totus generans: & verò id vel ex eo patet, quòd ſi per D ducatur recta Axi parallela; quæ Aſymptotus eſt, debeat ſecare radium A V productum, vt habeatur punctum vltimum T Quadratricis, quod infinitè diſtat, & ex eo Quadratricis puncto ducta ad Axem Applicata æqualis foret generanti ſemidiametro A D. Cùm ergo arcus L D O ad arcum L D V ita ſe habeat; vt Applicata O S arcui L D O debitam, ad ſemidiametrum A D ſiue A O Applicatæ æqualem, quæ ſemicirculo L D V debetur: patet ita eſſe arcum L D O ad arcum ſemicirculi L D V; vt eſt Applicata O S ad radium A O, cui adiungitur. In hoc ergo ſecundo caſu, in quo radius A O ponitur æqualis ſemidiametro generanti A D, ope Quadratricis definitus eſt arcus L D V, ad quem arcus L D O ita ſe habet; vt Applicata O S eſt ad radium A O. At ope Helicis idem arcus ſemicircularis L D V, quomodo inuenitur? Ecce.

Circulus per O deſcriptus occurrit neceſſariò Helici in puncto V, in quo eadem ſecatur ab Axe L A producto; qui cùm per centrum A eiuſdem circuli ducatur, eius diameter eſt, & ſemicirculum L D V abſcindit. Ideo autem Helix poſito radio A O æquali ſemidiametro generanti A D cum abſoluto ſemicirculo L D V concurrit: quia cùm radius Helicis Quadratrici Connatæ ex Definitione debeat eſſe æqualis Diametro generanti Quadratricis: erit ſemiſſis radij illius æqualis ſemidiametro generanti A D, ſiue A V. Quare ex conſtructione ſpiræ, mobile punctum ſpiram deſcribens percurriſſe debet ſemiſſem radij ſui, ſiue diametri generantis Quadratricem; quando conuerſus radius in orbem fixo eius termino A ſemicirculum percurrerit. Quo fit vt Helix Axem ſecet in V, in quo eum ſecat ſemicirculus; atque adeò ſeſe mutuo in eodem puncto V, ſemicirculus L D V, & Helix interſecent. Quo poſito oſtendetur, vt in priore caſu, ita eſſe arcum L D O ad ſemicirculum L D V; vt Applicata O S eſt ad radium A D, ſiue A V. Nam ſpira ex radio A O Quadratricis, radium A G abſcindit æqualem Applicatæ O S per Prop. 40. Sed vt radius A G eſt ad radium A V;

ita

ita eſt arcus L D O ad arcum L D V ſemicircularem per Prop. 38. Ergo etiam vt eſt O S ad A O; ita eſt arcus L D O ad arcum L D V. Quare in hoc etiam caſu, in quo radius A O ponitur æqualis ſemidiametro generanti A D, inuentus eſt quæſitus arcus.



Tertiò radius A O ad Quadratricem è centro A emiſſus, maior ſit ſemidiametro Quadratricis generante A D, atque adeò per punctum O deſcriptus productam ſemidiametrum generantem A D ſecet in Z. Hac ergo ſtatutâ hypotheſi Problema ſoluetur ope Quadratricis, cum adhibitâ Helice. Exceſſus D Z, quo radius A O ſemidiametrum generantem A D ſuperat, ſuper eâdem ſemidiametro A D reponatur ex centro A vſque ad Y: per quod punctum agatur Axi parallela Y X Quadratrici occurrens in X. Denique ex puncto X per centrum A linea traiiciatur occurrens in V circulo L Z O V. Dico arcum L Z O ad arcum LZOV eandem habere rationem; quam habet Applicata OS ad radium AO. Probatur. Vt ſe habet ſemidiameter generans A D ad rectam A Y æqualem exceſſui D Z radij A O ſupra ſemidiametrum generantem; ita ſe habet ſemicirculus L Z R ad Arcum L P. Probatur, quia ſi circulus ipſe generans, qui per D deſcribendus foret reipsâ deſcriberetur: eius ſemicirculus ad arcum, qui à lineis A L, A P interciperetur, ita ſe haberet per Quadratricis generationem; vt ſe habet A D ad A Y. Sed cùm circulus L Z R ſit circulo generanti concentricus, ſimiliter ſecatur in P, vt circulus generans ſecaretur à recta A P. Cùm ergo ita ſit ſemicirculus L Z R ad arcum L P, ſiue ei æqualem R V oppoſitum; vt eſt A D ad A Y, ſiue ei æqualem D Z. Componendo. Ita erit A Z ad D Z; vt arcus L Z R V ad arcum R V. Et per conuerſionem rationis. Ita erit A Z ad A D; vt arcus L Z R V ad ſemicirculi peripheriam L Z R. Eſt autem A D ad Applicatam O S, vt ſemicirculi L Z R peripheria ad arcum L Z O ex generatione Quadratricis. Ergo ex æqualitate. Ita erit A Z ad O S; vt arcus L Z R V ad arcum L Z O,

Digitized by Google

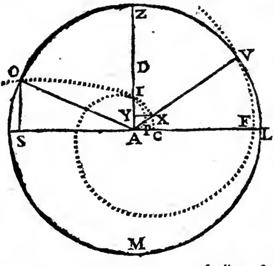
AZ	LZRV
AD	LZR
OS	LZO

LZO, vt hoc ſchema refert. Et inuertendo. Ita erit Applicata OS ad AZ, ſiue ad radium AO, vt arcus LZO ad arcum LZRV. Rectè igitur hoc modo repertus eſt arcus LZRV; ad quem ita ſe habet arcus LZO; vt Applicata OS ſe habet ad radium AO. Quod ope Quadratricis præſtandum erat. Sed hoc ipſum nunc per Helicem inueſtigemus, & quidem via longè breuiori.

Deſcriptus per O circulus ſpiram ſecet in V. Dico arcum LZV eum eſſe, qui quæritur: ad quem ſcilicet ita ſe habet arcus LZO; vt applicata OS ſe habet ad radium AO. Nam ex generatione ſpiræ Prop. 37. declaratâ & per Prop. 38. ex eâ deductam. Ita ſe habet radius AG ſpiræ ad radium AV; vt arcus LZO à radio AG producto abſciſſus ad arcum LZV. Sed radius AG æqualis eſt Applicatæ OS, & AV æqualis radio AO. Ergo, vt OS ad AO; ita eſt arcus LZO ad arcum LZV. Siue etiam ad ſemicirculum LZR vnà cum arcu LP ſuper ſemicirculi LZR circumferentiâ repetito. Atque ita exhibet ſpira eundem arcum LZV quæſitum.

Hac eâdem methodo ſemper inquiretur arcus ille LZV ſemicirculo maior adhibitâ tum Quadratrice tum ſpirâ donec ad alterum ſemicirculum excreuerit: quod fiet per Quadratricem exceſſu DZ, ſiue AY radij AO ſupra ſemidiametrum Quadratricis generantem AD ſemper creſcente donec Y attingat D, & radius AO æqualis ſit duplæ ſemidiametro generanti AD, ſiue æqualis toti diametro generanti: quo in caſu Helix emenſo orbe integro primam periodum abſoluerit; & in eodem Axis puncto L concurrent, ſeſéque interſecabunt ipſa & circulus centro A, & ſemidiametro AO, quæ ſit generanti Quadratricis diametro, ſiue primario Helicis radio æqualis, deſcriptus.

Quartò. Si radius AO extiterit maior, quàm dupla ſemidiameter generans AD, ſiue quàm tota diameter, aut radius Helicis primarius AF ad quem terminatur prima eius reuolutio: vt habeatur quæſitus arcus ad quem ita ſe habeat arcus LZO; vt applicata OS ſe habet ad radium AO: non alia eſt inſtituenda ratio, quàm quæ proximè tradita eſt, cùm radius AO maior proponitur generante ſemidiametro AD. Sumendus ſcilicet eſt exceſſus, quo radius AO binas iam percurſas ſemidiametros AD ſuperat, & ſuper ſemidiametrum AD reponendus à puncto A vſque ad Y: à quo puncto ducatur rècta ad ipſam ſemidiametrum AD perpendicularis, ſiue Axi parallela; quæ



in X Quadratrici occurrat: tum per X emittatur ex centro A recta, quæ in V circulum L Z O M ſecet, & arcum L V cum Axe intercipiet; qui addendus erit ad duos iam decurſos ſemicirculos, ſiue ad totum circulum L Z O M, vt fiat arcus L Z M L V circulo maior; ad quem arcus L Z O ita ſe habebit; vt ſe habet Applicata O S ad radium A O. Eadem autem eſt, quæ priùs in tertio caſu allata eſt demonſtratio.

Eſt ſcilicet Applicata O S ad duas ſemidiametros generantes A D vnà cum A Y (hoc eſt, ad radium A O; qui duabus ſemidiametris A D, & lineæ A Y æqualis ponitur) vt arcus L Z O Applicatæ O S reſpondens, ad ſemicirculos duos integros; qui duabus ſemidiametris velut Applicatis reſpondent; & præterea ad arcum LV Applicatæ A Y reſpondentem, hoc eſt ad arcum L V vnà cum totâ peripheriâ totius circuli. Licèt enim circulus L Z M, circulus generans non ſit, nec ad hanc Quadratricem pertineat: Anguli tamen ad centrum A ab his lineis conſtituti, vtrique circulo ſunt communes; &, vt ſuprà iam monui, ſimiliter ſecantur circuli omnes circulo generanti concentrici. Augetur ergo in hoc caſu circumferentia totius circuli L Z M additis arcubus ad ipſam, vt additus eſt arcus L V eâ ratione, quâ radius A O longior fit, longiuſque à centro A Quadratricem ſecat: qui quando duabus conſtiterit diametris generantibus, ſiue quatuor ſemidiametris A D; habebuntur duo circuli L Z M integri: ad quos arcus L Z O eandem rationem habebit; quam Applicata O S habitura eſt ad radium A O. Et ita in infinitum, vt augeri poteſt radius A O; augebitur arcus per repetitionem circuli L Z M, ad quem ita ſe habet arcus L Z O; vt Applicata O S ſe habet ad radium A O. Atque eadem ſemper methodo arcus ille quæſitus innoteſcet ope Quadratricis.

At ope Helicis idem arcus L Z M V inuenietur productâ ſpirâ vltra primam

Digitized by Google

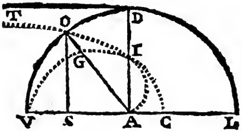
primam ſuam periodum ad axis punctum F abſolutam, donec circulum per O decriptum ſecet in V. Ita enim eum ſectura eſt: vt arcus L Z O ad arcum L V ſumptum verſus conſequentia cum totâ circumferentiâ L Z M eandem habeat rationem; quam habet Applicata O S ad radium A O, ſiue Helicis radius A G ad radium A V: qui duo radij duabus lineis O S, A O ſunt æquales, vt aliquoties iam eſt explicatum. Atque eadem ſemper futura eſt tum conſtructio per Helicem, tum eius demonſtratio, vt fruſtra aliis caſibus, qui repetitiones plures circuli L Z M poſtulant, exponendis diutius immoremur. Vnum tamen, qui non niſi ſemel occurrit, attingere neceſſe eſt. Is eſt cùm Applicata, & radius ad Quadratricem ductus ſunt æquales, imò ambo vna eadémque linea. En illum.

In ſchematis omnibus proximé allatis (ſecundum reſumo) ſemidiameter generans AD ad Axẽ in A perpendiculariter ducta, Quadratricẽ ſecat in I; quo in puncto Helix ipſam tangit, vt Prop. 42. demonſtratũ eſt. Hoc ergo in caſu eadẽ linea AI & radius eſt Quadratricis, & ad illum radium adiuncta Applicata; radius quidem, quia à centro A ad Quadratricẽ ducitur; Applicata verò, quia ad Axem perpẽdiculariter ducitur à pũcto I in Quadratrice aſſumpto. Hoc ergo in caſu, ſi deſcriptus foret è centro A circulus per I (deſcriptum concipe) ſi fieret vt Applicata AI ad radium A I; ita arcus illius circuli inter radium AI, & Axem A C interceptus ad alium arcum: haud dubium quin ille idem arcus haberetur, ſiue per Quadratricem, ſiue per ſpiram ineatur conſtructio. Nam arcus ille ſpiram in I ſolùm ſecaret; & arcum inter Axem & ipſummet punctum I Helicis, qui Problemati ſatisfacere debet, non alium à priori arcu diuerſum exhiberet.

Ducto ergo quocunque Quadratricis radio A O arcum LZV exhibuimus, tum per Quadratricem, tum per Helicem; ad quem ita ſe habet Arcus L Z O à radio A & ab Axe interceptus; vt habet Applicata O S ad radium A O. Quod præſtandum erat.

Scholium.

In Propoſitionis huius decurſu quædam occurrunt, quæ obſeruaſſe non pœniteat, quæque ad planiorem eorum, quæ vel hactenus allata ſunt, vel ſunt deinceps afferenda, cognitionem aſſequendam non mediocriter conducunt. Primum eſto, Quadratricis radium A O nullum vnquam tantæ fore longitudinis, quin circulus ex centro A per eius alterum terminum O deſcriptus, connatam Helicem multiplicatis gyrationibus explicatam aliquando ſecet. Etſi enim Quadratricis cornu rectâ quaſi viâ in infinitum porrigatur; Helix verò contrà



trà in varias reuolutiones colligatur: tot tamen gyrationibus poterit promoueri, cùm plures & plures iniri nihil obſtet, vt de puncti alicuius ſui diſtantiâ à centro A cum Quadratrice contendat. Secundum, Omnium radiorum Quadratricis Applicatas ab Helice definiri, vt ſuprà Prop. 40. oſtenſum eſt; eamque eſſe omnium maximam, quæ ex Axe ab Helice abſcinditur: quam æqualem eſſe conſtat ſemidiametro generanti A D, & ad Quadratricis punctum pertinere, in quo ſecatur ab Axe, quod nuſquam fieri poteſt. Tertium circulum centro A per extremum radij cuiuſuis terminum O deſcriptum, Helicem ſecturum in puncto, quod ſit terminus tot Helicis periodorum, quot diametros generantes continet Quadratricis radius A O. Quòd ſi præter diametros præciſas, aliqua pars adhæreat eiuſdem diametri generantis; periodorum numero arcus proportionalis addetur. Atque ita ſi radius A O æqualis præcisè fuerit diametro generanti circulus, cuius ſemidiameter eſt A O, Helicem ſecabit in ipſo vltimo primæ periodi termino, qui in Axe reperitur. Si verò radius A O præter diametrum generantem, quartam, verbi gratiâ, & eius partem contineat; circulus per O deſcriptus non antè eſt Helicem offenſurus, quàm poſt periodum integram, & quartam inchoatæ ſequentis periodi partem. Eodem modo ſi duabus, tribus, quatuor &c. diametris generantibus conſtet radius A O, Helicem ſecabit duabus, tribus, quatuor &c. periodis abſolutis: additâ etiam ſequentis reuolutionis arcu proportionali, ſi præter numerum præciſum diametrorum generantium radius A O partem aliquam diametri contineat. Quæ omnia ex proximè dictis Prop. antecedente aperta ſunt: altiùs tamen menti infigenda, vt ſequentibus inſeruiant ad quæ nunc pergo.

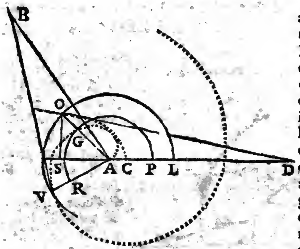
PROPO

PROPOSITIO XLVI. *Theorema.*

SI centro A Quadratricis circulus deſcribatur connatas Quadratricem & Helicem ſecans illam in O, hanc in V; Axem verò in L: & ducantur ad V & O radij AV, AO; quorum hic ad Quadratricis punctum O ductus Helicem ſecet in G: ac tandem per G circulus R G P deſcribatur.

Dico huius circuli arcum R G P inter Axem A P, & Helicis radium A V interceptum, æqualem eſſe arcui O E L inter Axem A L, & Quadratricis radium A O intercepto.

Demonſtratio.



Theorema hoc ad omnes illos diuerſos caſus, qui Propoſitione antecedēti explicati sūt, extendi debet, déque illis omnibus intelligi; ſiue circulus in O Quadratricem ſecans Helici occurrat in V ante abſolutam primam girationem (qualem caſum inſtar cæterorum omnium hîc adhibeo) ſiue poſt abſolutam, ſiue poſt abſolutas plures: eadem enim eſt omnium demonſtratio, quàm ſic inſtituo.

Quam rationem habet arcus L E O ad arcum L E O V; eandem habet arcus P F G arcum P F G R, hi enim arcus illis ſunt ſinguli ſingulis ſimiles. Sed vt arcus L E O ſe habet ad arcum L E O V; ita ſe habet radius A G Helicis ad Quadratricis radium A O, vt ex præcedente Prop. conſtat; Ergo ita eſt arcus P F G ad arcum P F G R, atque adeo per Prop. 33. Lib. 6. Elem. Angulus P A G ad angulum P A R; vt eſt radius A G ad radium A O. Hinc

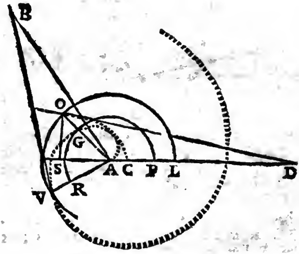
L fit,

ſit, vt angulus PAG, ſiue Angulus idem L A O ita ſe habeat ad angulum P A R; vt reciprocè huius anguli P A R radius A G, ſiue latus alterum, ipſum angulum P A R continens, ſe habet ad radium A O angulum L A O continentem. Ergo per Prop. 43. æquales ſunt arcus L E O, & P F G R. Quod idem ita etiam concludi poteſt. Ita eſt arcus P F G R ad arcum ſimilem L E O V; vt eſt illius radius A G ad huius radium A O. Sed per præcedentem Prop. vt eſt A G ad A O; ita eſt arcus L E O ad arcum L E O V. Ergo ita eſt arcus P F G R ad arcum L E O V; vt ad eumdem eſt arcus L E O. Ergo per Prop. 9. Lib. 5. Elem. arcus P F G R, & arcus L E O ſunt inter ſe æquales. Quare. Si centro A Quadratricis &c. Quod erat probandum.

PROPOSITIO XLVII. *Theorema.*

IIſdem poſitis. Dico arcus P F G, P F G R, ſiue ei proximè oſtenſos æquales arcus L E O, & L E O V, eſſe continuè proportionales.

Demonſtratio.



Arcus P F G ita eſt ad arcum P F G R; vt arcus L E O ad arcum L E O V (ſunt enim arcus ſimiles ad arcus ſimiles.) Sed arcus P F G R oſtenſus eſt pręcedēte Prop. æqualis arcui L E O. Ergo ita eſt arcus P F G ad arcum L E O; vt L E O, ſiue P F G R, eſt ad arcum L E O V ſunt ergo arcus illi continuè proportionales. Itaque. Iiſdem poſitis &c. Quod erat probandum.

PROP.

PROPOSITIO XLVIII. *Theorema per-inſigne.*

SI connatæ Quadratrix & Helix deſcriptæ ſint: circulúſque L O V centro A deſcribatur vtramque ſecans, Quadratricem quidem in O, Helicem autem in V: ad quæ puncta radij A O, A V ducantur: ducatur demum ad radium A V perpendicularis A B.

Dico. Si à puncto O linea O D Quadratricem tangens duceretur; eam ex producto Axe abſciſſuram rectam lineam A D variè commenſuratam iuxta varios caſus ſequentes circumferentiæ L E O V: cùi etiam æqualem rectam lineam A B abſcinderet ex rectâ A B ad radium A V perpendiculari, linea V B Helicem tangens in V.

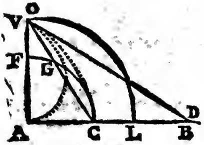
Demonſtratio.

Tot ſunt Propoſitionis huius caſus, quot ſunt Propoſitione ſuperiori 45. enumerati: qui omnes vnâ eadémque ratiocinatione demonſtrari poſſent. Verùm quia Archimedes caſus illos ad Helicem pertinentes diſtinxit; ſingulíſque ſingulas probationes etſi eaſdem, aut proximè ſimiles aſſignauit: illum in pari causâ, & vt manifeſtiùs appareat vtriuſque huius curuæ lineæ commercium, imitandum ratus; varios caſus citatâ Propoſitione adductos, ſigillatim tractabo.

Primo quidem loco caſus ille ſeſe offert, qui ſimplicitate & facilitate cæteros antecellit, eo etiam nomine commendandus: quòd à primis Quadratricis Auctoribus, cæteríſque deinceps Geometriæ cultoribus ſolus fuerit obſeruatus, ob eúmque vnum apud ipſos ſummo in pretio habita ſemper fuerit hæc inflexa linea. Hunc expoſui vltimo loco Prop. 45. Ita verò habet iuxta hypotheſim hac Propoſitione ſtatutam: cuius contextus cæteris caſibus conueniens, vt huic etiam accommodetur, quædam ſchematis puncta duplici charactere fuere deſignanda; cum hîc in vnum coaleſcant, quæ in cæteris diuerſa ſunt.

Sint itaque connatæ deſcriptæ Quadratrix & Helix, quæ ſeſe mutuò tangant in puncto O; in quo vtraque generantem diametrum A O ad Axem perpendicularem interſecat, vt oſtendi Prop. 42. deſcribatur verò centro A per punctum Quadratricis O circulus L E O; qui etiam Helicem ſecat in V: quod idem eſt cum O materialiter.

Digitized by Google



Demonſtrarunt, & quidem ſolertiſſimè Quadratricis Auctores arcum O E L eſſe duabus lineis, ſagittæ A C, & Applicatæ A O, tertiam proportionalem. Nunc ergo videndum, an linea O D Quadratricem tangens in O, & Axi occurrens in D ex eodem Axe abſcindat rectam A D: quæ ſit duabus lineis A C, & A O, ſiue A L, tertia proportionalis. Conſtabit enim tum demum arcum O E L æqualem eſſe rectæ A D per Prop. 14. Lib. 5. Elem. tunc enim eadem recta A O dicetur eandem habere rationem ad arcum O E L, & ad rectam A D: eam ſcilicet, quam habet A C ad A O. Illud autem euidentiſſimum eſt, & in terminis ipſis declaratum Prop. 25. & coroll. Propoſitionis 30. vbi probatur vniuerſaliter ſagittam A C, & radium A O ad Quadratricem ductum (ſiue A L) & rectam A D à Tangente interceptam, eſſe ſemper & in omni caſu, continuè proportionales. Quare veriſſimum eſt in hoc caſu tangentem in O Quadratricem, abſcindere in Axe rectam A D æqualem arcui L E O.

Quia verò Archimedes Prop. 20. inquit. *Si lineam ſpiralem A G V linea recta contingat in V non in termino primæ circulationis, & à contactu V ad principium ſpiræ A recta ducatur V A: & centro A interuallo A V circulus V E L deſcribatur: itémque à principio ſpiralis A ducatur linea A D ad angulos rectos lineæ A V, quæ à contactu V ad A ducta eſt. Erit linea A B inter contingentem V B, & initium ſpiræ A interiecta, æqualis circumferentiæ L E V deſcripti circuli, quæ eſt inter contactum V, & punctum L ſectionis, quâ deſcriptus circulus L E V ſecat principium reuolutionis*, hoc eſt, rectam A B vnde motus incipit, *circumferentiam ſumendo verſus præcedentia à puncto, quod eſt principium circulationis*; ſcilicet à contactu V verſùs L, qualis eſt circumferentia V E L. Hæc Archimedes citatâ Prop. quæ ad caſum hunc pertinet. Cùm ergo Helix, & Quadratrix ſeſe contingant in eodem puncto O vel V: (aliàs futura ſunt diſtincta hæc duo puncta, quæ hîc coaleſcunt) vnam & eandem lineam rectam eſſe neceſſe eſt, quæ vtramque curuam lineam contingat; eſt ſcilicet recta O D Quadratricem tangens eadem cum lineâ V B ſpiram tangente: eadémque prætereà linea eſt A D abſciſſa ex Axe à tangente OD Quadratricem; & linea A B abſciſſa à tangente V B Helicem; abſciſſa, inquam, ex lineâ A B, non vt Axis eſt, ſed vt

eſt

eſt perpendicularis ad Helicis radium A V ad contactum V ductum. Euidens ergo eſt in hoc caſu vtraque Propoſitionis huius pars. Verum ſcilicet eſt rectam O D, quæ Quadratricem tangit in O, abſcindere ex eius Axe lineam A D æqualem arcui L E V à puncto L, in quo Axem ſecat, inchoato, & ad punctum V, in quo Helicem ſecat, producto. Verum item eſt lineam, quæ Helicem tangit in V, in quo puncto eam ſecat circulus L E V; abſcindere ex rectâ A B perpendiculari ad radium A V, rectam lineam A B æqualem arcui L E V inter contactum V, & principium circulationis, ſiue radium primarium A B Helicis.

Secundò occurrit ille caſus, in quo radius A O Quadratricis eſt diametro generante, atque adeò (qui illi eſt æqualis) radio Helicis primario quacunque ratione minor, excepto præcedense caſu iam expoſito: ita vt circulus per O ex centro A deſcriptus ante Helici occurrat in V, quàm peruenerit ad primæ periodi ſuæ terminum, qui eſt Axis Quadratricis, vt Prop.45. declaratum eſt.

Itaque deſignato ſchemate, vt fert Propoſitionis hypotheſis: deſcripto ſcilicet circulo L E O V ſecante Quadratricem quidem in O, Helicem verò in V: ductiſque radiis A O, A V; quorum ille Helicem ſecet in G, per quod punctum deſcribatur circulus P F G R: ductâ deinde rectâ A B ad radium A V perpendiculari. Oſtendendum eſt, ſi ducatur linea O D Quadratricem tangens in O, eam in Axe definire rectam AD æqualem arcui L E O V; atque adeo æqualem rectæ A B, quam linea V B Helicem tangens in V abſcindit ex rectâ A B: quæ abſciſſa linea eidem arcui L E O V eſt æqualis, vt probat Archimedes citatâ Propoſitione 20. cuius verba ſuperiùs retuli. Illud ergo probo, & quidem oſtenſiuâ Demonſtratione huiuſmodi.

In hoc diagrammate ducatur ex puncto O Quadratricis Applicata O S ad Axem perpendicularis. Huic Applicatæ O S æqualis eſt Helicis radius A G per Prop.40. quo poſito ſic ratiocinor. Per Prop. 33. quã rationem habet ſagitta AC ad Applicatã OS, ſiue ad radium AG Helicis; eandem habet Applicata OS, ſiue A G ad arcum P F G: conſtat enim per citatam illam Prop rectas AC, AG, & arcum PFG eſſe continuè proportionales. Sed vt eſt AG ad arcum PFG; ita eſt radius AO ad arcũ LEO arcui PFG ſimilẽ, vt ex Pappo Prop.11. Lib.5. collect. deduci ſolet. Ergo ita eſt ſagitta A C ad AG; vt radius A O ad arcum LEO, Et permutando. Ita erit Sagitta AC ad radium AO; vt AG eſt ad arcum L E O. Sed per Prop.34. arcus P F G R æqualis eſt arcui L E O. Ergo ita eſt ſagitta A C ad radium A O; vt A G ad arcum P F G R. Sed

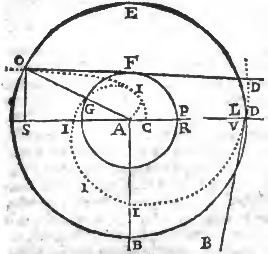
Digitized by Google

vt eſt ſagitta A G ad arcum P F G R; ita eſt A O ad arcum L E O V arcui P F G R ſimilem. Ergo ita eſt ſagitta A C ad radium A O, vt A O eſt ad arcum L E O V. Ita vt hæ tres quantitates A C, A O, arcus L E O V ſint continuè proportionales. Atque in hac harum trium quantitatum continuâ Analogiâ verſatur totum Argumenti momentum. Ecce enim vt ex eâ propoſitum Theorema concluditur. Per Prop. 25. & 30. Coroll. tres rectæ lineæ ſagitta A C, radius A O (ſiue A L) & recta A D abſciſſa in Axe inter centrum A & ipſam Tangentem O D, ſunt continuè proportionales; ſicut & tres A C, A O, & arcus L E O V continuè ſunt proportionales, vt proximè oſtenſum eſt. Cùm ergo in vtrâque ſerie eædem ſint duæ priores A C, A O; etiam reliquæ duæ, arcus ſcilicet LEOV, & recta linea A D, neceſſariò futuræ ſunt æquales per Prop. 14. Lib. 5. Elem. Itaq; quoad hunc etiam caſum manifeſta eſt prior Propoſitionis huius pars. Poſterior autem, quòd ſcilicet recta A B intercepta à linea, quæ Helicem tangit in V, æqualis ſit rectæ AD, quam oſtendi æqualem eſſe peripheriæ LEOV, euidens eſt ex citatâ Archimedis Prop. 20. in quâ probat rectam AB eidem arcui L E O V à puncto V inchoato, & verſus ſpiræ præcedentia promoto donec ad radium A L Helicis primarium, ſiue limitem circulationis peruenerit, æqualem etiam eſſe. Ergo non poterunt non eſſe æquales rectæ duæ A D, A B vt ſecundâ parte Propoſitionis aſſeritur.

Non alia vnquam futura eſt Demonſtratio Propoſitionis huius, quicunque tandem Quadratricis radius A O ducatur, & quocunque in puncto V circulus centro A per O deſcriptus gyrantem ſpiram aſſequatur, ſiue punctum illud V fuerit vltimum primæ reuolutionis, ſiue ſecundæ, tertiæ &c. aut præter reuolutionem primam, ſecundam, tertiam, aut aliam quamcunque, ſpatio aliquo promota fuerit Helix. Vt huic repetendæ pluribus immorandum minimè videretur, niſi ille Geometrarum apex Archimedes aliter cenſuiſſet, variáſque aliquot variorum horum caſuum ſingulares Propoſitiones proſecutus fuiſſet. Cuius veſtigiis ſi inhæſero, quis vitio vertat? Accedit, quòd ex variorum huiuſmodi caſuum expoſitione apertior euaſura ſit harum duarum curuarum conformitas eò ſanè magis ſuſpicienda, quò maior earum videtur eſſe diſſimilitudo: dum vna, viâ quaſi rectâ in infinitum porrigitur; at altera in gyros multiplices circa primum ſuum ortum reuoluitur, à quo non niſi ægrè recedere videatur. Hîc ergo primo loco quid de ſpirâ ſuâ pronunciet Archim. attendendum eſt: tum quid de Quadratrice noſtra pronunciandum ſit, declarandum.

In

In hæc ergo propè verba de Helice loquitur Prop. 18. cuius ſenſum appoſito ſchemate expono.



Si ſpiralem ex primâ circumuolutione ortam A I I L recta linea V B tetigerit in termino ſpiræ L (hic L & V vnum idemque punctum ſunt, ſed L pertinet ad terminum ſpiræ, at V ad interſectionẽ circuli cum ſpirâ, quæ hîc in ſpiræ termino L contingere ſupponitur;) *à puncto verò A, quod eſt principium ſpiræ, quædam ducatur recta linea A B ad angulos rectos lineæ A L, quæ eſt principium circumuolutionis: ducta A B incidet in tangentem V B, & ipſius A B; quæ pars media erit inter tangentem, & principium ſpiræ A, nempe A B, æqualis erit peripheriæ primi circuli L E O V:* cuius ſcilicet ſemidiameter A O eſt æqualis diametro Quadratricis generanti. Illa Archimedes de ſpirâ fatur, & probat. Hæc ego de quadratrice aſſero, ac oſtendo.

Tertio hoc itaque caſu, in quo ponitur radius Quadratricis A O æqualis generanti Quadratricis diametro, ſiue connatæ ſpiræ radio primario: ita vt circulus centro A per O deſcriptus L E O V ſpiram non antè ſecet in V, quàm ad vltimum punctum L primæ periodi, quod eſt in Axe A L, peruenerit: aſſero iuxta Prop. meam, lineam tangentem in O Quadratricem (qualis ſupponitur O D) productum Axem ſecturam in D, & abſciſſuram A D, lineam æqualem peripheriæ totius circuli L E O V: atque adeò æqualem lineæ rectæ A B; quæ à recta V B Helicem tangente in V, abſcinditur æqualis eidem peripheriæ L E O V iuxta Archimedem.

Per punctum G, in quo radius A O Quadratricis ſpiram interſecat, circulus deſcribatur ſecans in R radium A V ad communem ſectionem V circuli & ſpiræ ductum (hîc parem linearum & punctorum concurſum per eoſdem characteres deſigno, qui in ſuperioribus caſibus adhibiti ſunt: vt parem non ſolùm rebus, ſed etiam verbis ratiocinationem inſtituam) ducatur etiam Applicata O S, quæ, vt dictum

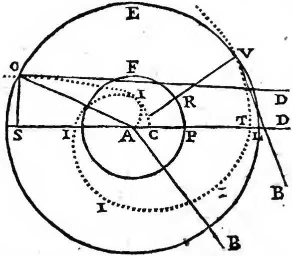
eſt

eſt iam non ſemel, æqualis eſt Helicis radio A G. His poſitis. Sic Demonſtrationem ſuperioris caſûs in hunc transfero. Sagitta A C ita eſt ad Applicatam O S, ſiue ad radium A G; vt A G eſt ad arcum P F G per Prop. 33. Sed vt eſt A G ad arcum P F G; ita eſt A O ad arcum L E O ſimilem arcui P F G ex Pappo Prop. 21. Lib. 5. Collect. Eſt ergo ita ſagitta A C ad A G, vt A O ad arcum L E O. Et permutando. Ita erit ſagitta A C ad radium A O, vt radius A G ad arcum L E O. Sed arcus L E O æqualis eſt arcui P F G R hoc eſt, totius circuli P F G R peripheriæ per Prop. 34. Ergo ita eſt A C ad AO; vt AG ad peripheriam PFG R. Sed vt eſt AG ad peripheriam P F G R; ita eſt A O ad peripheriam totius circuli L E O V peripheriæ P F G R ſimilem ex Pappo citato. Ergo tres lineæ, A C, A O, circuli totius L E O V peripheria, ſunt continuè proportionales. Verùm per Prop. 30. Coroll. tres etiam lineæ A C, A O vel A L, & recta A D per tangẽtem OD abſciſſa, ſunt continuè proportionales. Cùm ergo in vtráq; ſerie trium proportionalium duæ priores AC, A O ſint æquales: erit etiam tertia tertiæ æqualis: erit ſcilicet circũferentia LEO V æqualis rectæ AD, quã tangens in O Quadratricem abſcindit ex Axe producto. Hæc eſt prima Propoſitionis pars: quâ ſtatutâ, ſecunda eſt manifeſta: ſcilicet rectas AB, AD; quarum illa à tangẽte VB Helicem abſcinditur; hæc verò ab O D tangente Quadratricem in O, eſſe inter ſe æquales. Æqualis namque eſt vtraque toti circuli L E O V circunferentiæ; prior quidem AB, vt probat Archimedes citatâ Prop. 18. poſterior verò AD vt hîc eſt oſtenſiuè demonſtratum.

Quartò. Radius A O ad Quadratricem ductus eſſe poteſt huiuſmodi, vt generantem Quadratricis diametrum, ſiue radium Helicis primarium A T, in quo prima eius periodus terminatur, excedat: quo fit vt circulus centro A per O deſcriptus connatam Helicem A I I ſecet in V vltra primam eius periodum in T abſolutam in ſecundâ ab eodem puncto T inchoata. Tunc autem nihilominùs iuxta Archimedem linea recta V B tangens Helicem in V abſcindet rectam lineam ex ea, quæ principium ſpiræ A ducitur perpendicularis ad radium A V, qualis eſt A B: quæ ſit æqualis arcui L V cum tota circunferentia L E O L, ſiue, quod idem eſt, circunferentiæ L V E O L V (arcu L V repetito.) Huic autem eidem circunferentiæ aſſero æqualem etiam eſſe lineam A D: quam linea O D Quadratricem in O tangens abſcinderet ex producto Axe A L iuxta Propoſitionem. Quod non aliter probatur, quàm alij ſuperiores caſus hoc modo.

Centro A per G, in quo radius A O ſpiram ſecat, circulus deſcribatur

batur Axem ſecans in P, radium verò A V Helicis in R. Eſt ergo vt

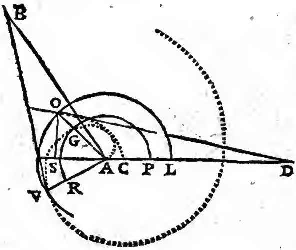


Helicis radius A G ad alterum eiuſdem radium A V; ita arcus L E O à radio A G producto abſciſſus ex totâ circũferẽtiâ circuli per O deſcripti, ad arcum L V cum totâ circũferẽtiâ per Prop. 15. Archimedis de ſpirâ. Vel per Prop. 45. ſuperiorem; iuxta quam ita ſunt etiam inter ſe iidem arcus L E O, & L V cum totâ circunferentiâ; vt inter ſe ſunt Applicata O S, & radius A O, vt ibidem declaratum eſt. Quo poſito Argumentationem ſuperiorem in aliis caſibus vſurpatam reſumere licet huiuſmodi.

Sagitta A C ita eſt per Prop. 33. ad applicatam O S, ſiue ad Helicis radium A G; vt A G ad arcum P F G. Sed vt AG ad arcum PFG; ita eſt A O ad arcum arcui P F G ſimilem L E O, vt ex Pappo Prop. 11. Lib. 5. Collect. deducitur. Ergo ita eſt A C ad A G; vt A O ad arcum L E O. Et permutando. Ita eſt A C ad A O; vt A G ad arcum L E O. Sed arcus L E O æqualis eſt arcui P F G R compoſito ex totâ circunferentiâ, & arcus P R repetito per Prop. 34. Ergo per Prop. 9. Lib. 5. Elem. ita eſt A C ad AO; vt A G ad peripheriam P F G R. Sed per Prop. Pappi citatam, vt eſt A G ad peripheriam P F G R; ita eſt A O ad peripheriam ſimilem L E O V compoſitam ex totâ circunferentiâ & arcu L V. Ergo tres lineæ A C, A O & arcus L E O V ſunt continuè proportionales. Continuè autem proportionales etiam ſunt lineæ tres AC, AO, & recta AD à tangente in O Quadratricem abſciſſâ ex producto Axe A C. per Prop. 30. Coroll. Ergo per Prop. 9. Lib. 5. Elem. æquales ſunt inter ſe recta A D & arcus L E O V: quæ eſt prima Propoſitionis pars. Vnde ſecunda, quâ aſſeritur rectam A B abſciſſam à tangente Helicem in V, æqualem eſſe rectæ A D abſciſſæ à tangente Quadratricem in O, euadit

M manifeſta.

manifeſta. Hoc ergo etiam in caſu, in quo radius A O ſupponitur maior generante Quadratricis diametro, eius tamen duplâ mino r, vera eſt Propoſitio. At ſi A O fuerit diametro generante duplâ, t riplâ &c. præcisè maior; Quid concludendum videtur? caſu ſequenti quinto & vltimo manifeſtum fiet.



Quinto itaque caſu, in quo radius A O diametrum Quadratricis generantem, ſiue generantem ſpiræ radium bis, ter, quater &c. præcisè continere ſupponitur, non minùs quàm præcedentibus expoſitis caſibus vera eſt Propoſitio. Certum ſcilicet eſt (conſule ſchema caſus tertij, & in eo ſuppone ſpiram abſolutis duabus &c. periodis, ad radium primarium eſſe regreſſam: radiúmque ipſum A L, qui æqualis eſt radio A O Quadratricis eſſe duplum, triplum &c. generantis diametri Quadratricis.) Certum, inquam, eſt eo in caſu rectam, quæ in O Quadratricem tangit, abſcindere ex producto Axe A C rectam A D æqualem duplæ, triplæ &c. peripheriæ totius circuli per O deſcripti; *vno verbo*, toties ſumptæ, quoties A O radius Quadratricis continet generantem eius diametrum. Cui peripheriæ duplæ, triplæ &c. eſt æqualis recta, quæ à recta V B Helicem tangens in V poſt duas, tres &c. periodos abſcinditur ex rectâ A B ad radium A V perpendiculari, vt aſſerit Archimedes Prop. 19. cuius Aſſertionis demonſtratio euadet tibi apertiſſima; ſi in ſchemate præcedentis caſûs quarti concipias arcum L V qui eſt exceſſus peripheriæ L V E O L V ſupra peripheriam circuli L E O L ita promotum eſſe, vt emenſo toto circuitu Axem A L attigerit, abſolutâ ſcilicet ſecundâ circulatione, cuius in eo ſchemate arcus ille L V, initium tantùm eſt: eadem enim ratiocinatio, eiſdémque verbis concepta inſtitui poterit, ſiue arcus L V in medio curſu periodi ſecundæ hæſerit, vt in caſu quarto contingit, ſiue ad vltimam

metam

metam L peruenerit emenſo circulo ſecundo. Quod quanquam clarũ ſit, ne quid hac in celebri Quadratricis cum Helice collatione, ſuperſit obſcuritatis: accipe paucis caſuum ſuperiorum huic applicatam demõſtrationẽ ex ſchemate caſûs tertij; in quo ſuppono iam punctũ V eſſe terminũ ſecundæ periodi; radiúmq; AO, vel AV ei æqualem, eſſe duplũ diametri generantis Quadratricis, ſicut & Helicis radij primarij.

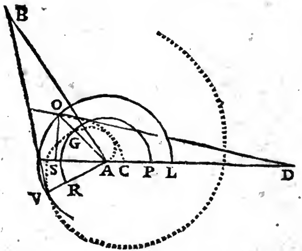
Sagitta A C eſt ad radium A G (æqualem Applicatæ O S) vt A G eſt ad arcum P F G (hic etiam, vt in tertio caſu, ad ſeruandam eandem demonſtrationis formam, idem punctum duplici charactere notari neceſſe eſt.) Sed vt A G eſt ad arcum P F G; ita eſt A O ad arcum ſimilem L E O. Ergo ita eſt ſagitta A C ad A G; vt A O ad arcum L E O. Et permutando. Ita eſt Sagitta A C ad A O; vt radius A G ad arcum L E O. Sed arcus L E O æqualis eſt arcui P F G R, ſi tamen arcus ille (qui eſt tota circuli peripheria) bis ſumatur, vt ſcilicet ita ſe habeat ſemidiameter A G circuli P F G R ad ſemidiametrum circuli L E O; vt reciprocè ſe habet angulus L A O ad angulum, qui quatuor rectos toti circunferentiæ circuli P F G R inſiſtentes, bis continet; ſicut AO, ſiue AL, aut AV bis continere ſupponitur in hoc caſu diametrum Quadratricis generantem, ſiue Helicis radium primarium diametro illi æqualem (*hic reuiſe, ſi fortè memoriâ exciderunt, quæ in hanc rem Prop. 37. explanata ſunt*) Arcus ergo L E O toti circumferentiæ P F G R bis ſumptæ eſt hîc æqualis per Prop. 33. & ad hanc circumferentiam ita ſe habet radius A G, vt ſe habet ad arcum L E O. Vt autem A G ſe habebat ad arcum L E O; ita ſe habebat A C ad A O. Ergo ita eſt A C ad A O; vt A G ad peripheriam P F G R bis ſumptam. Sed vt A G ad peripheriam P F G R bis ſumptam; ita ſe habet A O ad peripheriam circuli L E O V ſimilem bis ſumptam. Sunt ergo tres lineæ A C, A O & circumferentia L E O V bis ſumpta continuè proportionales. Sed per Prop. 30. Coroll. ſunt etiam continuè proportionales A C, A O (ſiue A L) & recta A D, quam in Axe abſcindit linea O D Quadratricem tangens in O. Ergo per Prop. 9. Lib. 5. Elem. æquales ſunt peripheria bis ſumpta L E O V, & recta A D: atque adeò recta A D æqualis erit rectæ A B definitæ per tangentem V B Helicem in puncto V: quam probat Archim. eidem circumferentiæ L E O V bis ſumptæ æqualem.

Eodem modo ratiocinabere ſi radius A O tribus, quatuor &c. diametris generantibus conſtet: atque adeò circulus per O deſcriptus Helicem ſecet in puncto V vltimo tertiæ, quartæ &c. periodi, ſiue reuolutionis. Semper enim tam recta A B à tangente Helicem, quam

Digitized by Google

recta A D à tangente Quadratricem determinatæ, æquales erunt ſingulæ, circumferentiæ circuli L E O V toties ſumptæ: quoties eius ſemidiameter A O diametrum generantem Quadratricis continebit; vel, quod in idem recidit, quot periodos Helix abſoluerit: ſingulis enim periodis, quæ in Axe Quadratricis A C producto terminantur, punctum mobile Helicem deſcribens percurrit radium primarium, qui connatæ Quadratricis diametro generanti eſt æqualis. Quòd ſi radius A O Quadratricis diametrum eiuſdem non præciſè contineat, patet ex caſu quarto, quid, & quomodo concludendum ſit. Quicunque ergo caſus proponatur, & quiſquis radius A O Quadratricis ducatur, aut quiſquis circulus Quadratricem in quouis puncto O ſecans deſcribatur; oſtenſiuè demonſtratum eſt tangentem Quadratricem in puncto ſectionis, rectam lineam in Axe abſcindere circuli deſcripti circumferentiæ variè iuxta varios caſus expoſitos commenſuratam: eíque æqualem in Helice, quod fidem ſuperet, exhiberi: ſi quo in puncto Helicem ſecat idem circulus, decernetur linea ipſam contingens. Quare tandem ſi connatæ Quadratrix, & Helix deſcriptæ ſint &c. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.



Ex proximâ, aliiſque aliquot Prop. ſuperior. ſeſe prodit ſumma illa Helicis & connatæ Quadratricis conuenientia & ſymbolizatio tanta, vt lineis iiſdem ſolo ſitu diſcrepantibus ſuos illos ſanè mirabiles effectus producere natæ ſint. (in figura 37. inſtar omnium) vt æqualibus vtriuſque poſitis radiis, A O Quadratricis, A V Helicis æquales rectæ lineæ A D, A B inter ſe, & æquales eidem peripheriæ circulari L E O V abſcindantur à rectis curuas illas tangentibus ad extrema radiorum puncta O & V. Ecce, vt Quadratricis Applicata quælibet O S ex quoli

quolibet Quadratricis puncto O ad Axem perpendiculariter inſiſtens æqualis ſit Helicis radio A G, ab Helice intercepto in Quadratricis radio illo, qui ex centro A ad punctum O adiungitur, vnde Applicata de O S deducta eſt. Ecce vt eadem ſit ratio Applicatæ O S ad Quadratricis radium A O; & Helicis radij A G ad eiuſdem Helicis radium A V, ſiue ſemidiametrum circuli centro A per O deſcripti, & Helicem ſecantis in V; quæ eſt arcûs LEO ad arcum L E O V circulo toto vel maiorem, vel minorem, vel ei æqualem, vt in variorum caſuum ſchematibus ſuperioribus explicatum eſt; præſertim caſu quarto Propoſitionis 45. in quo arcus L E O V excedit peripheriam totius circuli L E O L arcu replicato L V; ſicut radius A O, aut A V excedit generantem Quadratricis diametrum rectâ AY, & primarium Helicis radium (qui diametro Quadratricis generanti æqualis eſt) rectâ A P æquali oſtenſâ rectæ A Y. His aliæ ſimiles harum linearum conuenientiæ, ſi accuratiùs eas ſcrutari luberet, obſeruarentur. Ne porrò mirere tantam haſce inter lineas ſimilitudinem intercedere. Germanæ ſunt ſorores iiſdem ambæ parentibus progenitæ. Vtraque ſiquidem, vt ex vtriuſque generatione patet, producitur; dum idem circuli radius, eius ad centrum hærente puncto, conuertitur: tum, vt fingatur Helix, radium illum decurrit punctum mobile; at, vt Quadratrix generetur, linea Axi parallela eodem temporis ſpatio per diametrum generantem fertur, radiúmque conuerſum perpetuò ſecat: vt non ineptè Helicem vocaueris Quadratricem collectam; Quadratricem autem, expanſam Helicem.

PROPOSITIO XLIX. *Theorema.*

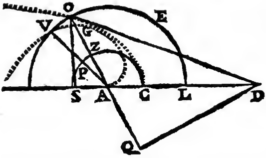
DVcto ad quodlibet Quadratricis punctum O radio AO: ductáque ad idem punctum tangente, quæ producto Axi occurrat in D: ſi à puncto D ducatur perpendicularis DQ ad radium A O.

Dico rectam illam D Q perpendicularem A O, æqualem eſſe arcui L E O circuli centro A per O deſcripti inter radium A O, & Axem A L intercepto.

Demonſtratio.

Ductâ Applicatâ O S; ſpiráque Quadratrici connata, deſcripta, quæ circulum L E O in V interſecet: ad quod punctum ducatur radius

Digitized by Google



A V. Erit per Prop. 48. recta A D in Axe à tangente OD abſciſſa, æqualis arcui L E O V: eritque præterea per Prop. 38. radius A O Quadratricis ad ſpiræ radium A G, ſiue ad Applicatam OS (per Prop. 40. radio A G æqualem) vt arcus L E O V ad arcum L E O. Sed vt radius AO ad Applicatam O S; ita eſt A D ad rectam D Q (ſunt enim duo triangula A O S, A D Q æquiangula propter angulos duos S & Q rectos æquales, æquales item duos S A O, Q A D ad verticem) Sed A D æqualis eſt per Prop. 48. arcui L E O V. Ergo per Prop. 14. Lib. 5. Elem. D Q æqualis erit arcui L E O. Ergo ducto ad quodlibet Quadratricis &c. Quod erat probandum.

Aliter.

In eodem ſchemate centro A per Quadratricis verticem C circulus deſcribatur ſecans in Z & P radios A G, A V Helicis. Quia igitur per Prop. 41. radius A V æqualis eſt arcui C Z P; radius autem A G æqualis arcui C Z: Ita erit arcus C Z P ad arcum C Z; vt radius A V ad radium A G; ſiue vt radius A O Quadratricis ad O S Applicatam (æquales ſiquidem ſunt A O A V, & A G, O S per Prop. 40.) Sed vt A O ad O S; ita eſt A D ad D Q. Ergo ita eſt A D ad D Q; vt arcus C Z P ad arcum C Z. Sed vt arcus C Z P ad arcum C Z; ita eſt arcus L E O V ad arcum L E O. Ergo ita eſt A D ad D Q; vt arcus L E O V ad arcum L E O. Sed arcus L E O V eſt æqualis rectæ A D per Prop. 48. Ergo recta D Q æqualis eſt arcui L E O. Quod erat probandum.

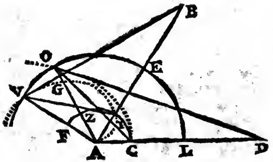
PROPOSITIO L. *Theorema.*

Iiſdem poſitis. Centro ſcilicet A deſcripto circulo C I Z per Quadratricis verticem C: circulo item L O V, qui Quadratricem ſecet in O, & Helicem in V, ad quæ puncta radij educantur A O, A V: duci verò concipiantur tangentes tum Quadratricem, vt O D, tum Helicem, vt O B; quarum illa

illa abſcindet ex Axe rectam A D æqualem arcui L O V; hæc verò eidem arcui æqualem A B ex rectâ A B ad radium A V perpendiculari: Tum ducatur ex puncto O ad verticem C Quadratricis recta O C; & ex puncto V recta ad punctum I, in quo circulus C I Z ſecatur à rectâ A B ad radium A V perpendiculari.

Dico duo fieri triangula A O C, A V I duobus triangulis A O D, A V B ſimilia.

Demonſtratio.



Per Prop. 30. Coroll. Ita eſt Sagitta A C ad A O; vt A O ad A D. Duo ergo triangula AOC, AOD habent duo latera AC, A O duobus lateribus A O, A D circa eundem angulum O A C proportionalia. Ergo æquiangula ſunt per Prop. 6. Lib. 6. Elem. atque adeò ſimilia. Quia verò radius A V æqualis eſt radio A O; item A I ſagittæ A C; ac denique A B æqualis rectæ A D: erunt etiam tres rectæ A I, A V, A B continuè proportionales: erítque vt A I latus Trianguli A V I ad eiuſdem latus A V; ita latus A V trianguli A V B, ad A B eiuſdem trianguli latus. Ergo hæc duo etiam triangula A V I, A V B per citatam Prop. ſunt ſimilia. Quare iiſdem &c. Quod erat probandum.

Corollarium 1.

Ex huius Prop. Demonſtratione colligere licet, ſi nota habeatur Quadratricis ſagitta A C, notum haberi angulum; qui ad radium tum Quadratricis tum ſpiræ à tangentibus conſtituitur. Cùm enim oſtenſum ſit triangulum A O C triangulo A O D eſſe æquiangulum, erit vtique angulus A C O angulo A O D ad radium A O à tangente O D conſtituto æqualis. Æqualis itidem erit angulus A I V angulo A V B, quem ſpiræ radius & ſpiram tangens V B continent. Vnde præterea ſequitur euidenter (quod etiam ex præcedentibus Propoſitionibus euidenter licet obſeruare) datâ alterutrius harum curuarum tangente, alterius tangentem dari. Habes etiam ductis in diagram-

mate

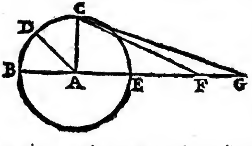
mate lineis O L, & V E; tam angulum C O D quàm angulum I V B biſariam diuiſum iri per Prop. 25. forent enim Triangula A O L, A V E Iſoſcelia, & lineæ tres, A I, A V ſiue A E, & A B continuè proportionales; ſicut continuè proportionales ſunt A C, A O ſiue A L, & A D: illæ enim tres his tribus ſunt æquales. Quo deinceps fit, vt C O ita ſe habeat ad tangentem Quadratricis O D; vt I V ſe habet ad ſpiræ tangentem VB per Prop. 6. lib. 6. Elem. & permutando. Vt C O ad I V, ita tangens O D ad tangentem V B. Quæ & alia non pauca vel hactenus expoſita, vel reponenda deinceps aditum aliquem ad lineæ rectæ circulari æqualis inueſtigationem aperire poſſe videntur: ſin minùs, certè methodum exhibent illud ipſum præſtandi quâ nec iucundior, nec elegantior, nec tutior, nec præciſior innoteſcere poteſt. *Hactenus varias tum circulares, tum rectas lineas, vel ad Quadratricis generationem comparatas, vel ex eâdem genitas proſecutus ſum. Quadam nunc allaturus ſum, vt ſpero, non ingrata, quæ ad ſuperficiem referuntur.*

PROPOSITIO LI. *Theorema.*

SI fuerit triangulum rectangulum C A F) cuius vnum latus A C circa angulum rectum, fuerit æquale radio A D ſectoris cuiuſuis D A E; alterum verò eius latus AF circa eundem angulum, æquale fuerit arcui D C E eiuſdem ſectoris.

Dico triangulum illud C A F, æquale eſſe ipſi ſectori D A E.

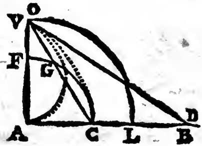
Demonſtratio.



Sit recta A G æqualis ſemiperipheriæ circulari B C E & iungatur racta C G. Erit triangulum C A G æquale ſemicirculo B C E. Nã vt demonſtrat Archim. Prop. 1. Lib. de dimenſ. arc. triangulum rectangulum cuius vnum latus circa angulum rectum eſt circuli radius, alterum verò eſt toti circulo. Ergo ſi alterum latus circa angulum rectum fuerit ſemicirculi

circuli circunferentia; erit triangulum illud æquale ſemicirculo per Prop. 1. Lib. 6. Elem. ſunt enim duo illa triangula, quorum eadem eſt altitudo, ita inter ſe vt baſes: baſis autem vnius, alterius eſt baſeos dupla. Quod cùm ita ſit: ita erit triangulum C A G ad triangulum C A F; vt baſis A G ad baſim A F per Prop. 1. Lib. 6. Elem. hoc eſt, vt ſemicirculi B C E peripheria, ad peripheriam DCE ſectoris D A E. Sed vt ſemicirculi B C E peripheria ad ſectoris peripheriam D C E; ita eſt per Prop. 33. Lib. 6. Elem. ipſe ſemicirculus B C E, ſiue ſemicirculo æquale triangulum C A G, ad ſectorem D A E. Ergo cùm triangulum C A G eandem habeat rationem ad triangulum C A F, & ad ſectorem D A E: erit per Prop. 9. Lib. 5. Eucl. triangulum C A F æquale ſectori D A E. Quare ſi fuerit triangulum &c. Quod erat probandum.

Corollarium.



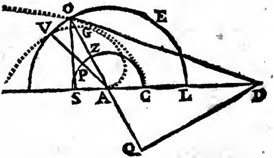
In figurâ Prop. 48. in quâ ſeſe Quadratrix Helixque mutuò tangunt, ducitur recta O B vtrámque tangens in O: & per Prop. 48. ab hac tangente abſcinditur recta A B, vel A D æqualis arcui L E O. Ergo per hanc Prop. triangulum rectangulum O A B, ſectori O A L (qui hic eſt Quadrans circuli) æquale eſt. Quia verò ſi centro A per Quadratricis verticem C circulus C G F deſcribatur; arcus C G F æqualis eſt radio A O Helicis per Prop. 41. eodem iure triangulum rectangulum C A O, cuius vnum latus A C circa angulum rectum, eſt radius ſectoris F A C; alterum verò A O, eſt æquale eiuſdem ſectoris peripheriæ F G C: æquale erit ſectori F G C. Sed præſtat vniuerſale Theorema in hunc modum proponere, quod ſectoribus omnibus conueniat. Hunc tamen, qui ſolus à Quadratricis Auctoribus obſeruabatur, placuit ſigillatim declarare.

PROPOSITIO LII. *Theorema.*

Reſumptis quæ in ſchemate Propoſitionis 49. conſtituta ſunt: centro ſcilicet A Quadratricis deſcripto circulo O E L; qui ipſam in O, eiuſdem verò Axem in L ſecet: ductâ item lineâ O D, quæ Quadratricem tangat in O, Axi autem occurrat in D: per quod punctum deducatur ad radium O A, etiam vltra A cum opus fuerit, vt hîc contingit, productum perpendicularis D Q.

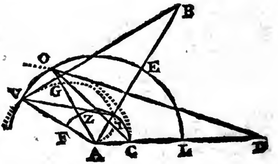
Dico triangulum A O D æquale eſſe ſectori A O E L.

Demonſtratio.



Cum trianguli A O D baſis A O ſit radius A O arcûs O E L, eiúſque altitudo ſit D Q, quæ per Prop. 49. æqualis eſt arcui OEL: erit per Prop. proximè antecedentem triangulum illud A O D æquale ſectori A O E L. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.



Si in eadem figura duci concipiatur à puncto O ad Quadratricis verticem C recta O C, vt reipſa in figura propoſitionis 50. hîc repetita ducta eſt: erit triangulum A O C ſectori A Z C æquale. Cum enim triangulum A O C ſimile ſit triangulo AOD per Prop. 50. ratio trianguli A O C ad triangulum A O D erit duplicata rationis lateris A C ad latus homologum A O trianguli A O D per Prop. 19. lib. 6. Elem.

Sed

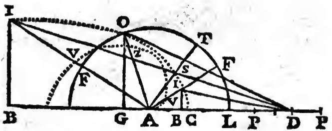
Sed ſector A Z C ad ſectorem ſimilem A O L habet etiam rationem duplicatam radij A C ad radium A O. Ergo ita eſt triangulum AOC ad triangulum A O D, vt ſector A Z C ad ſectorem A O L. Cum itaque triangulum A O D æquale ſit oſtenſum ſectori A O L: etiam triangulum A O C æquale erit ſectori A Z C. Quod idem eâdem methodo probari poteſt, quâ probata eſt hæc Prop. Nam ducta O S ad Axem perpendicularis eſt arcui C Z æqualis per Prop. 36. Cum ergo trianguli A O C altitudo O S æqualis ſit arcui C Z, ſitque eius radius A C baſis trianguli; erit per Prop. 51. triangulum AOC æquale ſectori A Z C.

PROPOSITIO LIII. *Theorema.*

SI ex centro Quadratricis A circulus deſcribatur ipſam in O ſecans: & ad idem punctum linea eam tangens aptetur, quæ Axi occurrat in D: A puncto verò D linea quælibet D I ducatur ad Quadratricem: & ad idem punctum I radius A I deſtinetur; qui circulum primò deſcriptum ſecet in F.

Dico ſectorem F A L æqualem eſſe triangulo A I D: quod ex abſciſſo Axe A D à tangente, & radio A I Quadratricis, lineâque D I conſtituitur.

Demonſtratio.



A puncto O Applicatâ O G; & à puncto I Applicata I B ad Axẽ perpendicularis demittatur. Deſcribatur etiã, ſi lubet, Quadratrici connata Helix, quam radius A I ſecet in V; radius verò A O ſecet in Z. Conſtat in primis per Prop. 52. triangulum A O D æquale eſſe ſectori O A L. Quia verò duo triangula A O D, A I D eandem ſortita ſunt baſim A D: ita erunt inter ſe, vt ipſorum altitudines O G, I B. Cùm ergo ex ipsâ Quadratricis generatione, vt Applicata OG eſt ad Applicatam IB; ita ſit angulus OAL

ad angulum F A L: aut etiam, ſi ſpira deſcribatur, ita ſit angulus O A L ad angulum F A L; vt radius A Z eſt ad radium A V (eſt enim radius A Z Applicatæ O G, & radius A V Applicatæ I B æqualis per Prop. 40.) vt autem eſt angulus O A L ad angulum F A L; ita eſt per Prop. 33. Lib. 6. Elem. ſector O A L ad ſectorem F A L. Ergo ita eſt triangulum A O D ad A I D triangulum; vt ſector O A L ad ſectorem F A L. Sed ſector O A L æqualis eſt triangulo A O D. Ergo ſector F A L æqualis quoque eſt triangulo A I D per Prop. 14. Lib. 5. Elem. Itaque. Si ex centro Quadratricis A circulus &c. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Cum linea Quadratricem ſecans, eam diuerſis duobus in punctis neceſſariò ſecet: vt lineam D S I in I & S ipſam ſecare conſtat: ductis radiis A I, A S ſectores abſcindunt F A L, T A L: quorum ille æqualis eſt per hanc Prop. triangulo A I D; hic verò triangulo ASD. Hinc fit vt triangulum A S I æquale ſit ſectori F A T. Si enim ex triangulo A I D, & ſectore F A L æqualibus demantur æqualia, nempe triangulum A S D, & ſector T A L: reliquum triangulum A S I reliquo ſectori F A T æquale eſſe neceſſe eſt. Conſtat præterea triangulum totum A I D, in duo triangula ASI, ASD diuidi proportionaliter, vt arcus F T L in T diuiditur: linea enim I D (quæ eſt baſis triangulorum) ita ſecatur in S, vt conſtabit per Prop. 64. vt arcus FTL ſecatur in T.

PROPOSITIO LIV. *Problema.*

IN Axe Quadratricis aſſignato quouis puncto vltra eius verticem rectam lineam ſpeculatiuè, quæ Quadratricem tangat, ex eo ducere.

Conſtructio.

Sit deſcriptæ Quadratricis Axis A C, eiuſdem vertex C: vltra quem in Axe producto aſſignetur punctum D: ex quo ad Quadratricem linea duci debeat; quæ ipſam tangat. Inter ſagittam A C, & rectam A D media proportionalis inueniatur A L. Tum centro A per L circulus deſcribatur; qui Quadratricem ſecet in O. Denique iungatur recta D O. Dico rectam D O, Quadratricem tangere in puncto O.

Demonſtratio.

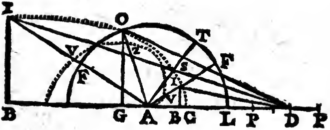
Si negetur recta OD Quadratricem in O tangere: alia, quæ ipſam in

in O tangeret, duci poſſet: eáque Axi occurreret vel citra vel vltra D, vt in P: & abſciſſa A P foret per Cor. Prop. 30. duabus lineis A C, A L tertia proportionalis. Sed eiſdem duabus lineis A C, A L, recta A D eſt tertia proportionalis: inuenta ſiquidem eſt A L media proportionalis inter A C & A D. Ergo æquales ſunt A D, A P. Quod eſt abſurdum. Recta igitur O D tangit Quadratricem. Quod quærebatur.

PROPOSITIO LV. *Problema.*

IN Axe Quadratricis aſſumptâ trianguli baſe qualibet, quæ ſit ſagittâ Quadratricis maior: eiúſque Trianguli angulus baſi oppoſitus ad Quadratricem ſtatuatur. Sectorem circuli Triangulo illi æqualem reperire.

Conſtructio.



Sit trianguli AID baſis A D in Axe Quadratricis aſſignata, maior eiuſdem ſagittâ A C: ſit verò angulus I baſi oppoſitus ad Quadratricis punctum I. Statuatur recta D O Quadratricem in O contingens. Tum centro A per O circulus deſcribatur ſecans in F latus A I trianguli etiam productum, ſi opus ſit. Dico huius circuli ſectorem F A L ab Axe A L & trianguli A I D latere A I producto comprehenſum æqualem eſſe dato triangulo A I D.

Demonſtratio.

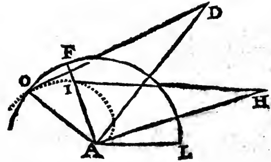
Cùm enim recta O D Quadratricem tangat in O, Axíque occurrat in D, vnde ad Quadratricem ducitur recta DI: erit per Prop. 53. triangulum A I D æquale ſectori F A L. Dato itaque triangulo, cuius baſis eſt pars Axis A D maior ſagittâ A C, & angulus I baſi oppoſitus eſt ad Quadratricem; æqualis eſt inuentus ſector FAL qui inueniendus erat.

PROPOSITIO LVI. *Theorema.*

SI ex Helicis principio A circulus deſcribatur ipſam in O ſecans, & ad punctum O ducatur tum radius A O, tum Helicem tangens linea O D; quæ occurrat in D rectæ A D ad radium A O perpendiculari: ducatur autem alius quicunque radius A I, qui circulum primò deſcriptum ſecet in F. Tum in rectâ A H, quæ ſit ad radium A I perpendicularis, ſumatur A H æqualis rectæ A D; ac demum iungatur I H.

Dico Triangulum A I H æquale eſſe ſectori F A L, quem Axis A L, & radius A I complectuntur.

Demonſtratio.

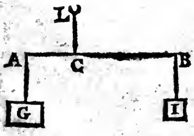


Quæ proximis Propoſitionibus circa Quadratricem demonſtrata ſunt: eadem, aut ſimilia Helici planè conueniunt: vt in his etiam quanta ſit harum duarum curuarum affinitas, liceat intueri. Sic ergo propoſitum Theorema concludo. Cùm recta O D ſupponatur ſpiram tangere in O: erit A D recta æqualis arcui L F O per Prop. 48. & per Prop. 52. triangulum A O D æquale erit ſectori O A L. Quia verò triangulum A I H baſim habet A H æqualem baſi A D trianguli A O D: ita erunt inter ſe duo hæc triangula per Prop. 1. Lib. 6. Elem. vt inter ſe ſunt eorum altitudines, hoc eſt, vt inter ſe ſunt radij duo A O, A I (hi enim radij cùm ſint ad baſes A D, A H perpendiculares, illorum triangulorum ſunt altitudines) At per Prop. 14. Archim. de ſpirâ vel Prop. 38. huius, ſe habet radius A O ad radium A I; ita ſe habet angulus O A L ad angulum I A L, ſiue arcus D F L ad arcum F L. Sed vt arcus O F L; ad arcum F L, ita eſt per Prop. 33. Lib. 6. Elem. ſector O A L ad ſectorem F A L. Ergo ita eſt triangulum A O D, ad triangulum I A H; vt ſector O A L ad ſectorem F A L. Sed ſector O A L æqualis eſt triangulo A O D. Ergo per Prop. 14. Lib. 5. Elem. triangulum A I H æquale erit ſectori

ſectori F A L. Quare ſi ex principio A Helicis &c. Quod demonſtrandum.

Monitum.

Poſt tot, eaſque tam ſingulares curuæ huius noſtræ expoſitas facultates nihil in eâ non exhauſtum ſupereſſe meritò cenſeri poterat. Et verò totius huius contemplationis exitum appetebam, cùm derepente mentem ſubiit cogitatio quædam poſtremis hiſce meis Propoſitionibus à me demonſtrata fuiſſe Theoremata: inter quæ, & quædam à Ioanne De la Faille Societatis noſtræ Geometrâ non vulgari demonſtrata, in opuſculo ſanè aureo, verámque ac ſolidam Geometriam præſeferente de centro grauitatis partium Circuli & Ellipſis, intercederet ſimilitudo; quâ ſpes fieret aliqua, ad hanc etiam tetragoniſmi inueſtigandi methodum per ſtaticem, facultates ab hac Lineâ, quando tam inaudita exhibere ſoleret, profecturas. Quæ vanáne, an vera foret penitiùs cognoſcendi cupiditate incenſus ad eam denuo excutiendam acriter animum adieci; nec ſine contentionis, operæque pretio. Dum enim mentis aciem ad ſingula nuper ſtabilita Theoremata conuerto, & ſingula perluſtro; ecce primùm intermicans quædam ſpecies occurrit: quæ luce ſenſim perfuſa copioſiore, euidentiſſimè tandem cum non mediocri meâ voluptate, nec admiratione minori demonſtrat nullum circuli, aut ſectorem, aut ſegmentum exhiberi poſſe; cuius grauitatis centrum compendiariâ, planâque methodo aſſignare nata non ſit Quadratrix. Quod quomodo poſſit abſolui ſtatim exponam; vbi paucis de centro grauium, quando in eius mentionem incidi, diſſeruero, totiúſque ſtatices fundamentum obiter fuero contemplatus. Etſi enim ad rem meam, cui pluſquam ſatis eſt, ſi hactenus admiſſis in eâ diſciplinâ nitatur, ea tractio minimè neceſſaria videatur: quia tamen non multis antè annis grauiſſima circa Principium, quo motricium potentiarum, totiúſque Mechanices mirabiles effectus demonſtrari ſolent, orta eſt, necdum dirempta diſceptatio; non aliena ab inſtituto fuerit breuis digreſſio, quâ nonnulla exponam, quæ olim ante annos pluſquam triginta, dum Matheſim prælegerem, Auditoribus tradidi; ex quibus aliquid fortaſſe lucis profecturum eſt (ea enim viris non imperitis memini non diſplicuiſſe) quo nodus hic ſolutionem nanciſci faciliùs poſſit. Eſt autem huiuſmodi.



Aſſerit Mechanices Parens Archimedes Lib. 1. Prop. 6. de Æquiponderantibus. Si duæ graues magnitudines G & I ita in librâ A B appendantur: vt quam rationem habet grauitas G ad

ad grauitatem I; eam reciprocè habeat diſtantia C B ſuſpenſionis grauitatis I à puncto firmitudinis C, ad diſtantiam C A ab eodem firmitudinis puncto C ſuſpenſionis grauitatis G: tunc Libram A B in ſitu dato conquieſcere æquali vtrimque preſſu ad æquilibrium determinatam.

Hanc Aſſertionem non eſt, qui vt veriſſimam & quotidianâ experientiâ comprobatam non admittat: ſed allatam ab eius Authore probationem haud perinde cenſent omnes veram huius æquilibrij cauſam aſſignare. Defectum hunc obſeruauit primus, & expoſuit eruditiſſimo in opuſculo reliquis eius operibus non abſimili (cui Noua de Machinis Philoſophia nomen dedit.) Vir grauiſſimus, & tum omnium diſciplinarum, tum Matheſeos in primis, facultate excultiſſimus R. P. Nicolaus Zuchius è Societate noſtrâ, in Romano collegio olim Profeſſor Mathematices, de quâ tam bene, quàm qui optimè poſteà meritus eſt editis in opticam Philoſophiam inter curas grauiſſimas doctiſſimis lucubrationibus. Hic itaque cùm non tantùm quid, quámve ob cauſam in Archimedeâ ratiocinatione minùs probaret, expoſuiſſet; ſed etiam Principium explicaſſet, vnde æquiponderationis illius ratio peti debere ipſi videretur: eius ſententiam amplexi ſunt aliquot non imperiti Geometræ: nec tamen defuere Alij, qui Archimedeis Placitis ſibi inhærendum cenſerent. Vtriuſque partis rationes, obiectáſque vtrimque difficultates hic exponi non patitur breuis ab inſtituto digreſſio: cui vt ſpero, finem non antè imponam, quàm lucis aliquid ad huius quàm grauis, tam iucundæ diſceptationis ſolutionem ſtatuendam ex eâ collectum fuerit. Quod vt conſequar faciliùs, pauca præmitto prænoſcenda ſeruatâ Propoſitionum ſerie.

PROPOSITIO LVII. *Theorema.*

CViuſuis magnitudinis grauis, grauitatis quoddam centrum datur, idque vnicum.

Expoſitio.

Magnitudinis grauis nomine non ſolùm tertia quantitatis ſpecies, ſolidum ſcilicet quodlibet grauitate donatum; ſed etiam prima, & ſecunda, hoc eſt, linea & ſuperficies, intelligenda venit. Licèt enim quantitates huiuſmodi à ſolidâ quantitate ſeparatæ nequeant reperiri: concipi tamen eas nihil vetat, déque ita conceptis varia demonſtrari. Aſſeritur itaque hîc quamlibet quantitatem grauitate donari poſſe (quid obſtat?) & grauitate donatam, centrum quoddam nanciſci grauitatis ſuæ, hoc eſt, punctum quoddam medium, vnde æqualis vndique effundatur grauitas; vel, ſi mauis, per quod ſecta plano aliquo ad

ad libitum grauis quantitas, in duas partes ſemper æquales diuidatur. Hæc eſt enim huius vocis *centri* vis, quæ à circulo, & ſpærâ mutuata ad cæteras quaſcunque quantitates tranſlata eſt. Dixi plano ſecari debere grauem quantitatem, etiamſi fuerit ſuperficies: ne alioqui ſæpius ſequeretur partes tum quantitatis, tum grauitatis ex ſectione aliter; quàm per planum factâ genitas eſſe inæquales, licèt per medium illud punctum quantitas grauis diuideretur. His declaratis, in quolibet graui grauitatis centrum, idque vnicum dari probo.

Demonſtratio.

Centrum huiuſmodi grauitatis in quolibet graui dari tam euidens cenſuit Archimedes, & reliqui deinceps; vt eo ſuppoſito eius definitionem tantùm tradiderint. Nihilominùs, vt omnis hac de re dubitandi ratio præſcindatur, id ita confirmare licebit omne graue, niſi aliquo impedimento extrinſeco prohibeatur, toto niſu ad centrum grauium, quod idem centrum eſt vniuerſi, contendit; illúdque occupat, & in eo, dum æqualis vndique grauitas vrget, conquieſcit. Quæ quies nullatenus ſtabiliri poteſt; niſi medium aliquod grauitatis illius punctum centro grauium aptetur, & vndequaque æqualiter prematur, ac in eo cohibeatur. Quo prætereà fit, vt vnicum poſſit eſſe medium illud grauitatis punctum: ſi enim duplex foret; grauius ex parte alterius illius medij puncti pondus incumberet, & conuelleret conſiſtentiam. Atque haud ſcio an aliud dari poſſit argumentum; quo conſtet in qualibet figurá, ſiue ſuperficierum cuiuſuis generis, ſiue ſolidorum, reperiri punctum quoddam medium figuræ totius, quod proinde centrum figuræ dicatur, vt reperiri vulgò ſupponitur. Quis enim facilè ſibi perſuadeat in figuris irregulariſſimis ſiue ſecundæ ſiue tertiæ ſpeciei quantitatis tale dari earum quantitatis centrum? At dari nemo non agnoſcet euidenter, ſi figuram quamlibet grauitate æqualiter fusâ conſtare, & centrum vniuerſi occupare ſupponat. Cùm enim tunc centrum grauitatis figuræ centro vniuerſi coaptetur; non tantùm in grauitate centrum dari concludetur; ſed etiam centrum figuræ, & quantitatis, quandoquidem grauitas vniformiter quantitatem comitatus. Sed hoc obiter ex datâ occaſione. Nunc ad rem.

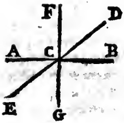
Cùm igitur quantitas quælibet grauis in centro grauium poſita centro potiatur; quis extra illud eam centro carere iure dicat? Ergo cuiuſuis magnitudinis grauis &c. Quod erat probandum.

Digitized by Google

PROPOSITIO LVIII. *Theorema.*

SI grauis magnitudinis centrum, vel ſuſpendatur, vel ſuſtentetur: datum quemlibet ſitum ab extrinſeco agente, fideliter conſeruabit magnitudo.

Demonſtratio.



Sit lineæ grauis A B (idem eſto de ſuperficie, idem de ſolido iudicium) centrum grauitatis C: quod vel ſuſpendatur lineâ pendulâ C F, vel ſubiectâ firmâ lineâ C G ſuſtentetur. Probandum eſt eam quemlibet ſitum datum, aut Horizonti parallelum, vt AB, aut ad Horizontem obliquum, vt E D, & admiſſuram, & conſeruaturam. Cùm enim æqualis ſit vtrimque grauitas, quæ æquali vtrimque niſu ad centrumgrauium fertur: quouis in ſitu ſiue AB, ſiue E D ſtatuatur data grauis linea; dicendum omnino eſt eam in dato ſitu permanſuram: nullum enim eſt motûs aliud principium intrinſecum, niſi grauitas hinc, quàm inde, maior; Quod foret contra ſuppoſitionem, cùm C ponatur grauitatis centrum, vtrimque æquali grauitate preſſum. Quare. Si grauis magnitudinis &c. Quod erat probandum.

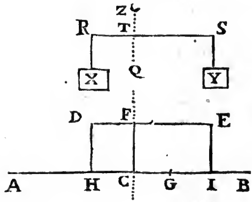
PROPOSITIO LIX. *Theorema per-inſigne.*

SI duo inæqualia pondera X, Y, iugo cuipiam R S appendantur: quod in T ita ſecetur, vt eadem ratio ſit partis TS ad partem T R; quæ eſt reciprocè ponderis X ad R appenſi, ad pondus Y appenſum ad S.

Dico. Si iugum in puncto T, vel pendulâ lineâ T Z ſuſpendatur, vel firmâ T Q ſuſtentetur, duo pondera æquiponderare; & iugum R S, datum quemcunque ſitum obſeruaturum.

Præparatio.

Per-inſigne, inquam, eſt hoc Theorema, vt pote quod fundamentum complectatur totius ſtatices: cuius quàm-iucũda ſit contemplatio, conſtat



conſtat ex motricium facultatum tractatione: quàm verò toti Geometriæ vtilis, vix potest enarrari. Conſule Antonij Laloueræ è Societate noſtrâ Elementa Tetragoniſmica, & Cycloidica in quibus non ſine voluptate & admiratione obſeruabis, quàm multa & inaudita tum Problemata vir eruditiſſimus ex ſtaticâ hauſerit, & demonſtrarit facillimâ, æquè ac breuiſſimâ methodo: quorum pauca alij quidam non vulgares Geometræ vix tandem aliâ inſiſtentes viâ demonſtrare potuerunt. Quia verò, etſi per-inſigne Theorema hoc tam obſcurè traditum magni nominis Geometris viſum eſt, vt ſuprà memini, vt ſi minus de eius veritate dubitarint, eius tamen probationem, non vt legitimam admitti poſſe rati, aliam excogitarint: aliam & ipſe meditatus ſum, quæ Principio per ſe notiſſimo niti videtur. Hac autem eget conſtructione.

Lineam quandam grauem homogeneæ grauitatis aſſumo AB. Quâ diuisâ bifariam in C, perpendicularem excito CF: per cuius punctum quoduis F lineam duco D E ad ipſammet C F perpendicularem, ſiue lineæ A B parallelam. Tum à puncto F lineam ſumo F E quamcunque, dummodò minor ſit ſemiſſe C B totius lineæ A B: ſit, exempli gratiâ, æqualis rectæ C I. Ab eodem verò puncto F ſumo F D æqualem reliquæ I B, ita vt tota D E ſit totius A B ſemiſſi æqualis. Ac denique ex punctis D & E lineas duco D H, E I ad A B perpendiculares.

Hac abſolutâ conſtructione. Manifeſtum eſt rectam H I æqualem eſſe ſemiſſi totius A B: eſt enim H I in Rectangulo D I æqualis rectæ D E, quæ poſita eſt æqualis rectæ C B. Ergo duæ reliquæ partes H A, I B totius A B, ſimul ſumptæ ſunt etiam totius A B ſemiſſis. Quòd ſi ſumatur H G æqualis rectæ HA, reliquam GI æqualem eſſe neceſſe eſt rectæ I B: hæc enim vnà cum rectâ H G æqualis eſt ſemiſſi H I totius A B: atque ita tam A G, quàm G B bifariam diuiduntur illa in H, hæc in I à lineis D H, & E I. Ergo per Prop. 15. Lib. 5. Elem. ita ſe habebit H G ad G I; vt illius dupla A G ad huius

O 2 duplam

duplam GB. Sed F E æqualis eſt rectæ H G, & F D æqualis rectæ G I (poſita ſiquidem eſt F D æqualis rectæ I B, ſiue I G: itaque ex totius A B ſemiſſibus æqualibus D E, H I reliquæ F E, H G ſunt æquales) Ergo ita eſt E F ad F D; vt A G ad G B. His ita declaratis, quibus nihil apertius dici poteſt, Propoſitionis probationem nihilo obſcuriorem accipe.

Demonſtratio.

Si linea A B vniformiter grauis ad iugum D E (quod omni & grauitate, & leuitate carere ſuppono) appendatur lineis pendiculis D H, E I: & iugum ipſum D E in firmitudinis puncto F, quod grauitatis centro C totius lineæ A B perpendiculariter imminet, vel ſuſpendatur, vel ſuſtentetur: haud dubium, quin tam iugum D E, quàm linea tota A B conſiſtant. Suſtinetur enim ipſum grauitatis lineæ A B centrum C mediante linea directionis F C: per quam ſolam labi nata eſt tota grauitas A B donec ad centrum grauium omnium, centrum eius C appulerit. Iam concipiatur grauis hæc linea A B ſecari in C, ita vt in eo puncto ſoluatur eius continuitas. Tunc partis A G grauitatis centrum erit H; partis autem alterius G B centrum erit I: eſt enim tam A G in H, quàm C B in I bifariam diuiſa. Cùm ergo centra hæc lineis pendulis D H, E I lineam directionis occupantibus à lapſu prohibeantur: in eodem planè ſitu permanebunt, etſi nunc tantùm contiguæ, in quo ante continuitatis ſolutionem conſiſtebant; Iugúmque ipſum in F ſuſpenſum, vel ſuſtentatum, à ſitu dato minimè deturbabitur à pendulis lineis D H, E I eâdem grauitatione, quâ ante ſectionem lineæ A B in G factam, ipſum afficientibus.

Hæc ita cùm ſint. Quid euidentius quam grauitatem A G ad grauitatem G B ita ſe habere; vt reciprocè ſe habet linea F E, quæ eſt diſtantia ſuſpenſionis grauitatis G B à puncto firmitudinis F, ad lineam F D, ſiue diſtantiam ab eodem firmitudinis puncto ſuſpenſionis grauitatis alterius A G? oſtenſum ſiquidem eſt proximè eandem eſſe rationem lineæ F E ad lineam F D, & lineæ A G ad G B lineam. At quæ ratio eſt linearum A G, G B, cùm grauitas vniformiter diffuſa ſupponatur per totam lineam A B; eandem eſſe rationem grauitatum neceſſe eſt. Quia verò grauis cuiuſlibet quantitatis figura nihil in eius grauitatem inuehere poteſt mutationis: loco grauium linearum A G, & G B alia quælibet cuiuſuis figuræ quantitas eiuſdem cum lineis A G & G B grauitatis, ſubſtitui concipiatur: iugum D E eâdem, qua priùs, grauitatione vtrimque affectum priorem ſitum ſuum tuebitur, ſicut & quemlibet alium ab agente extrinſeco datum admittere, tuerique natum

natum eſt. Supponamus ergo, vt ad Hypotheſim veniamus, pondus X æquale eſſe ponderi lineæ grauis AG; pondus autem Y æquale grauitati GB; necnon iugum RS Iugo DE æquale eſſe, & vtrumque ſimiliter in T & F diuiſum, eáque puncta ſint in vtroque puncta firmitudinis: haud dubium quin Iugum RS, æquè ac DE datum quemlibet ſitum ſeruare natum ſit. Quare tandem certò, tutóque concludi poteſt. Quòd ſi duo inæqualia pondera X & Y &c. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Habes ergo primum & immediatum, ac per ſe notiſſimum Principium æquiponderantiæ duarum grauitatum inæqualium, quando earum ratio eadem eſt cum reciproca ratione diſtantiarum à puncto firmitudinis ſuſpenſionum. Quia ſcilicet ambarum inæqualium grauitatum X & Y in allato ſchemate commune centrum grauitatis tunc tantùm ſuſpenditur, vel ſuſtentatur (vt ad æquiponderantiam neceſſarium eſt) cùm reciproca illa ratio ponderum X & Y, & diſtantiarum TS, TR à puncto T firmitudinis pendularum linearum SY, RX obſeruatur. Hac enim ſublatâ reciprocâ ratione, centrum illud commune grauitatum non cohibetur à lapſu, nec proinde poſſunt ipſæ æquilibrium, aut datum quemlibet ſitum obſeruare. Memini porrò duarum grauitatum inæqualium æqûalibus ſilentio prætermiſſis, non quod eadem probatio etiam æqualibus non conueniat: ſed quia poſitis grauitatibus æqualibus, vt reciproca ratio ponderum; & diſtantiarum ſuſpenſionum ſeruetur; æquales etiam debent eſſe diſtantiæ. At eo caſu poſito Principium eſt per ſe notum grauitates æquiponderare: quod Archim. Lib. 1. Æquipond. ſupponit: nec debuit Propoſitioni immiſceri, quæ probatione indigebat.

Obſerua prætereà etſi lineas pendulas RX, SY, ſicut etiam DH & ei æquales ſtatuerim, vt faciliùs texeretur tota ratiocinatio, breuiúſque concluderetur, id tamen non eſſe neceſſarium. Sicut enim lineæ huiuſmodi longiores, & breuiores ad libitum eſſe poſſunt abſque ponderum mutatione; ita etiam ad arbitrium inæquales inter ſe poſſunt conſtitui immutatâ grauitatione: ad cuius æqualitatem ſeruandam ſatis eſt, vt in aliquo loco lineæ directionis centrum grauitatis reperiatur.

Ad hæc. Obſerua allatam ponderum inæqualium hanc æquiponderantiam ob ponderum & diſtantiarum, quibus eorum ſuſpenſiones à puncto firmitudinis recedunt, reciprocam rationem, non tantùm, ad Libram; ſed etiam ad vectem eodem iure pertinere. Perinde enim

O 3 æquili

Digitized by Google

æquilibrium ponderum X & Y ſtatuitur, ſiue firmitudinis punctum T iugi R S ſuſpendatur lineâ pendula TZ, vt in Librâ contingit; ſiue, vt vectis exigit, ſuſtentetur ſuppoſito hypomochlio T Q. Vel, vt habet ſchema in Præparatione demonſtrationis conſtructum, quod ad vectem adhiberi immediatè poteſt: æquilibrium ſeruabit vectis D E, duabus grauibus lineis A G, G B; vel earum loco duobus ponderibus X & Y oneratus mediantibus pendulis lineis DH, E I: ſi fulcimento C F lineam directionis occupante ſuſtineatur.

Corollarium.

Ex eiuſdem proximi Theorematis demonſtratione ortus eſt modus motricis potentiæ vires in quacunque datâ ratione per Libram & vectem augendi; aut potiùs vires debiliores ad maiorem quàm ipſæ per ſe ſolæ poſſent, effectum per dictas machinas comparandi. Quid enim pondera, quàm motrices quædam potentiæ ſunt? ſubſtitue in ſuperiore vecte R S ponderi Y potentiam quandam grauitati Y æqualem: quæ ſcilicet ipſa per ſe ſola, & omni machinâ deſtituta pondus Y tractare poſſit, & ſuſtinere: ea poterit in vectis extremo S poſita, pondus X contrà nitendo ſuſtinere, & duplo, & triplo, & quauis aliâ ratione maius quàm Y; ſi vectem ita diuidat hypomochlium T Q; vt pars T S ſit altera parte T R duplo, vel triplo, aut alia quauis ratione, maior.

Cæterùm. Cùm vectis, ſiue Libra R S appenſis ponderibus X & Y in R & S, quorum eadem ſit ratio; quæ eſt reciprocè diſtantiarum T S, T R appenſionum à firmo puncto T, ad quemlibet ſitum ſit indifferens, & quemcunque datum tueri poſſit: non videtur potentia in S applicata maiori virtute egere ad mouendum pondus X, & in alio ſitu vectem, vel libræ iugum R S conſtituendum: quàm quæ ſufficit ad æquiponderantiam; quæ ſcilicet conatum exerat præcisè æqualem conatui ſiue grauitationi ponderis Y. Cùm enim vectis, aut libra ponderibus X & Y comparata ſit ad ſitum omnem admittendum, & conſeruandum; per motum autem ad varios tantùm ſitus eodem ſemper ponderum conatu perſeuerante deducatur: quid eſt, quod ad mouendum requiratur præter ponderis Y virtutem, & determinationem potentiæ admouendum, eiúſque applicationem? quibus non mutatur, cùm extrinſeca ſint, & per accidens aduenientia, & ponderum conatus ad æquiponderandum in quocunque ſitu diſpoſitus per illam ipſorum, & ſuſpenſionum reciprocam rationem.

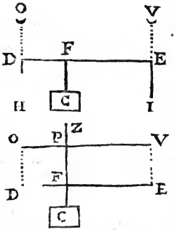
Habetur ex dictis hactenus quo nitatur Principio Libra & vectis: & quo, quæ ex vecte deducuntur à variis cunei cochleæq; vires. At Trochlea

chlea aliquo alio eget, vt quod motrici potentiæ præſtat adiumentum, declaretur. Quod non parum à vectis, Libræue fundamento differre videtur: nec ſatis apertè Authores aliquot (pauciſſimi enim ſunt, qui id ſeruati fuerint) illud expoſuerunt. En itaque Theorema, quo non parum lucis ad huius Machinæ intelligentiam acceſſurum eſt.

PROPOSITIO LX. *Theorema.*

SI Iugo cuipiam D E, vel duabus pendulis lineis O D, VE vtrique eius extremo D & E adhibitis ſuſpenſo, vel duobus hypomochliis D H, E I ſuſtentato incumbat pondus C ex puncto F iugi illius ſuſpenſum.

Dico grauitationem quâ pendula linea D O, ſiue fulcimentum D H afficitur, eam habere rationem ad grauitationem, quam patitur altera pendula linea V E, ſiue alterum fulcimentum E I: quam reciprocè habet linea F E, quæ eſt diſtantia puncti extremi E ipſius iugi à firmo puncto F, ad lineam F D, ſiue diſtantiam alterius extremi puncti D eiuſdem iugi ab eodem puncto firmo F.



Præparatio.

Exponatur iugum D E cum appenſo in F eodem pondere C, ſimul cum pendulis lineis D O, E V iugum D E pendere C graue ſuſtinentibus (eadem foret ratio fulcimentorum DH, EI ad vectem ſpectantium: quorum hic breuitatis & claritatis gratiâ mentionem omitto: quæcunque enim circa Libram concludentur, eadem vecti conueniunt, vt ex præcedente Prop. manifeſtum eſt.) Iam ipſæ duæ pendulæ lineæ D O, E V alligatæ concipiantur alteri iugo OV, quod priori D E parallelum ſit: quo fiet, vt lineæ D O, E V, quæ perpendiculares ſupponuntur ad iugum, quod ſuſtinent, DE; ſint æquales, æquale item

Digitized by Google

item iugum O V priori D E. Ad hæc O P ſumptâ æquali lineæ D E, ſiue V P æquali lineæ E F; ſuſpendatur iugum O V pendulâ lineâ P Z, quæ neceſſariò, ſi produci concipiatur, tota concurret cum lineâ directionis F C, in quâ centrum grauitatis ponderis C reperitur. His poſitis.

Demonſtratio.

Cùm linea pendula P Z centrum grauitatis grauis quantitatis C ſuſtineat: iugum O V, quod mediantibus duabus pendulis lineis D O, E V, pondus C ſuſtinet, conſiſtet in æquilibrio. Ergo grauitatio, quâ illud afficit pendula linea D O, æqualis omnino eſt grauitioni, quâ ab alterâ pendulâ lineâ E V afficitur (id enim ad æquilibrium, neceſſarium eſt.) Ergo per Prop. antecedentem ita ſe habet pondus lineæ O D, (quod aliud non eſt quam vis ipſi illata à pondere C) ad pondus lineæ E V, ſiue ad vim quam pondus C ipſi imprimit; vt ſe habet reciprocè recta P V ad P O: ſunt autem P V, P O æquales rectis F E, F D. Ergo pondus, quod ſuſtinet linea D O, ad pondus à linea E V ſuſtentatum, dum ambæ iugum D E pondere C oneratum ſuſtinent, ita ſe habet; vt reciprocè recta F E ſe habet ad rectam F D. Quare. Si iugo cuipiam D E, vel &c. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Cùm, vt ſuprà monui, eadem ſit vectis, & Libræ ratio: patet cui fundamento nitatur ſecundum illud vectis genus; cuius alter terminus puncto firmo inſiſtit, dum alteri termino potentia applicatur ad mouendum pondus medium inter potentiam & fulcimentum eo enim non minùs iuuatur potentia, quàm prioris generis vecte; in quo potentia vectis vnum extremum tractat, alteri verò extremo pondus incumbit poſito inter vtrumque extremum fulcimento. In vtroque ſiquidem, quo potentia à fulcimento magis recedit, eò facilius pondus mouet, vt ex vtriuſque demonſtratione conſtat, conſtabítque euidentiùs ex ſequente Propoſitione.

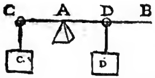
PROPOSITIO LXI. *Theorema.*

IN vtroque vectis genere, ſi idem pondus æqualiter ab hypomochlio recedat.

Dico potentiam extremo vectis applicatam æqualiter ad pondus illud mouendum vecte iuuari.

PRO

Præparatio.



Vectis C B fulcimento A inſiſtat: ſit autem potentia in B:& duo æqualia pondera C, D: quorum centra in ipſo vecte ſtatuantur (licèt id non niſi ad clariorem demonſtrationem ſit neceſſarium) æquali hinc inde à fulcimento A diſtantiâ. Oſtendendum eſt potentiam B vecte æqualiter iuuari, ſiue mouere debeat pondus C vltra hypomochlium A poſitum; ſiue pondus D inter A, & potentiam B conſtitutum. Quod vt euidentiſſimè conficiam; iuuerit obſeruare, vt graue D in æquipondio ſtatuatur, duas potentias concurrere: vna cenſetur fulcimentum, altera eſt potentia B mobilis locum alterius fulcimenti occupans. At vt graue C æquilibretur, vnica ſolùm potentia B exercetur, vt patet: ea enim ſola à lapſu cohibet graue C. Ad hæc. Vt potentia B ad quemcunque ſitum adducat, & in eo contineat graue C; vectis extremum B, cui applicatur, tractat deprimendo; quod attollendo tractare debet, cùm graue D ad ſitum quempiam ſtabiliendum eſt. Supponendum itaque eſt æquales vires à potentiâ impendi, ſiue deprimendo, ſiue atollendo: ea ſiquidem depreſſionis, vel elationis differentia nullam parit maiorem, vel minorem difficultatem, vt ad eam ſuperandam maiores vires, vel minores potentiæ ſint neceſſariæ. Suppono etiam vtriuſque grauis C & D centrum grauitatis in vecte ipſo conſtitui ad clariorem demonſtrationem; aliàs id minimè neceſſarium eſt, ſufficit enim vt ex iiſdem punctis per pendulas, & liberas lineas ſuſpendantur. His declaratis.

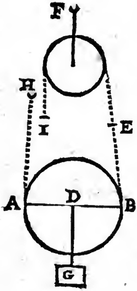
Demonſtratio.

Vt æquilibrium ſtatuatur ope potentiæ B: ea eſt ratio lineæ B D ad lineam D A; quæ eſt paſſiuæ grauitationis hypomochlio aduenientis à graui D ad grauitationem, quam ab eodem graui D patitur potentia B per Prop. antecedentem. Ergo componendo. Ita eſt B D cum D A, hoc eſt, B A ad A D; vt ambæ ſimul grauitationes paſſiuæ à pondere D duobus ſimul patientibus, fulcimento A, & potentiæ B aduenientes ad grauitationem paſſiuam potentiæ B. Sed duæ ſimul grauitationes, quæ à pondere D fulcimento A & potentiæ B adueniunt, eſt ipſa tota grauitatio, quæ à pondere D poteſt emanare. Ergo hæc tota grauitatio emanans ab Agente graui D ita ſe habet ad grauitationem, quam patitur potentia B; vt ſe habet recta BA ad AD. Sed vt B A ad A D; ita eſt B A ad A C (ſunt enim æquales ex hypo-

P thesi

theſi A D, A C) Ergo vt B A ad A C; ita eſt tota grauitatio à graui D in fulcimentum A & potentiam B emanans, ad grauitationem quam patitur potentia B. Sed vt B A ad A C; ita eſt per Prop. 49. grauitatio à graui C (quod eſt æquale graui D) eidem potentiæ B adueniens. Ergo potentia B æqualem vim patitur, ſiue graue fuerit in D, ſiue fuerit in C. Quare æqualibus viribus eget ad æquilibrium per vectem hypomochlio incumbentem, ſtatuendum; ſiue graue vecti adhæreat in C vltra fulcimentum A, ſiue transferatur in D; modò eius diſtantia AD à fulcimento æqualis ſit diſtantiæ AC. Ergo. In vtroque vectis genere ſi idem &c. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.



Ex hoc Theoremate colligitur ratio, vt ſuprà memini, quomodo per Trochleam vel ſimplicem, vel multiplicem, ſiue Polyſpaſtum potentiæ mouentis vires augeantur. Si enim hoc in ſchemate graue D medium vectis A B punctum occuparit; potentia B ponderis D ſemiſſẽ tantùm ſuſtinet, dum ſemiſſis hypomochlio A incumbit. Quod idem contingit in Trochleâ, per cuius centrum ſemper ducitur linea directionis ſuſpenſi ponderis. Sit enim trochlea, cuius diameter A B, & D eius centrum, ex quo pendet graue G: funis autem, qui in trochleam induitur, ſit H A B E; qui in H firmiter hæreat. Si itaque in E ſtatuatur potentia trochleam cum ſuo pondere G ſuſtinens; aut certè (quod fieri ſolet non ad augendas quidem eius vires, ſed ad earum vſum commodiorem præſtandum) circumducto fune in alio orbiculo ad punctum F alligato, ſtatuatur in I: erit diameter A B Trochleæ, ſecundum vectis genus proximo Theoremate demonſtratum; cuius hypomochlij A vices gerit funis H A ſuſtinens vectis extremum A; alterum autem eiuſdem vectis extremum B ſuſtinet potentia E, vel, ſi mauis, I. Quo fit, vt potentia I dimidiam tantùm partem ponderis G ſuſtineat; altera verò pars à funiculo H A ſuſpendatur. Eſt enim vt A D ad D B; ita reciprocè potentia B ad potentiam A, ſiue ad partem ponderis funiculo H A velut hypomochlio incumbentem, vt Prop. hac demonſtratum eſt. Quòd ſi plures trochleæ aptâ constru-

ctione

Digitized by Google

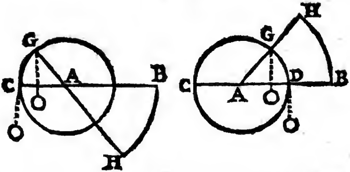
ctione in capſulis componantur; iuuari poterunt potentiæ motrices ad grauiora tractandum pondera; vnúmque ac idem erit omnium hîc expoſitum fundamentum: vectis ſcilicet, ſiue Libra eius generis, vt graue in iugo ſtatuatur inter duo ſuſpenſionum, vel ſuſtentationum puncta, quæ ſunt eiuſdem iugi extrema. Atque ad hoc quidem vectis Libræue genus varias Trochleis vtendi artes reuocat Guidus Vbaldus in Mechanicorum Libro. Quia tamen longè aliam ſtatuit rationem facultatis potentiæ motricis ad graue ſuſtinendum; quàm ſit Ratio reciprocè quàm obſeruat diſtantia ponderis à puncto firmo iugi, ad diſtantiam eiuſdem ponderis à puncto, cui applicatur, adhæretque potentia; quam proportionem neceſſariò obſeruari hîc demonſtratum eſt: ideo cautiùs legendus eſt, quædam enim ex falſo Principio deducta videntur ad veritatem minùs accommodata. Quæ, & alia non pauca, quæ ex declarato Principio, probatíſque Theorematibus proximis, pluribus proſequi non patitur breuis ab Inſtituto digreſſio: quæ vt ſuis numeris abſolutior prodeat, ad eam ſequens Scholium debet adhuc accedere.

Scholium.

Memini ſuperiùs obiter fundamenti illius, cui inniti omniſcio Zuchio viſa eſt motricium facultatum ars vniuerſa: ad cuius inueſtigationem permotus eſt, vt citato opere de nouâ Machinarum Philoſophiâ ipſe refert, tum quia aliquid in Archimedis demonſtratione, quâ Propoſitionem 6. & 7. Æquiponderantium probat, deſiderari videbatur; tum maximè quia nec Archimedes ipſe, nec vllus poſt eum alius mentionem feciſſet vectis illius ſecundi generis; in quo graue medium ſtatuitur inter duo fulcimenta ipſum ſubſtentantia; ex quo tamen machinarum aliquot artificium, vt oſtendi, colligi neceſſe eſt. Illud ergo Principium idem, cùm ſubtilitate conſtet ſingulari; nec omni tamen obſcuritate careat: paucis hîc ex mente Authoris declarandum recurrit; vt quid conuenientiæ, quid diſcriminis (ſi quid lateat) inter hoc & illud, quod à me ſtatutum eſt, euidenter innoteſcat. Itaque in hunc ferè modum ſect. 5. & 6. exponit Author ingenioſiſſimus ſuum illud nouum ſtatices fundamentum aſſumpto primi generis vecte, quod ad ſecundum, vt patebit, perinde pertinet; ſicut & ad vtriuſque generis Libram, vt ex ſuperioribus colligere demum licebit.

Sit vectis C B ita diuiſus in A, vt pars A B dupla ſit partis A C; & punctum A firmum ſtatuatur, ſiue puncto A applicetur hypomochlium: vectis autem extremo C appendatur pondus duarum Librarum; alteri verò eiuſdem vectis extremo B vnius tantùm Libræ pondus, ſiue potentia, quæ abſque omni vectis machinâ per ſe ſufficeret

Digitized by Google



ad pondus vnius libræ ſuſtinendum, aut etiam nonnihil vnâ librâ maius; vt ſcilicet motum inire poſſit (ad quem motum ineundum etiam ſufficeret; ſi, vel pondus C nonnihil duabus libris minus ſtatueretur, vel pondus B vnius Libræ minimùm longiùs à puncto A remoueretur,) qui ſi iniri ſupponatur, pondúſque C ad locum G deferri; eodem tempore pondus vel potentiam B ad H conſtitui neceſſe eſt: quò peruenire non poteſt niſi per arcum BH, qui duplus erit arcûs CG à pondere C deſcripti per Prop. 11. Lib. 5. Collectionum Pappi, quâ conſtat circulorum circumferentias, aut circulorum arcus ſimiles (quales ſunt arcus C G, B H propter angulos C A G, B A H ad commune centrum A æquales) ita eſſe inter ſe; vt inter ſe ſunt circulorum ſemidiametri. Cum ergo potentia B contrà nitens ponderi C moueatur per arcum B H, dum eodem tempore pondus C mouetur per arcum C G, qui ſemiſſis eſt arcûs B H: conſtat potentiam B duabus potentiis æquiualere; quarum vtraq; pondus vnius libræ mouendi capax foret; dum vna poſt aliam moueret in arcu B H poſita per ſpatium æquale ſpatio CG à pondere C vnius Libræ decurſo. Perinde enim eſt ſiue duæ potentiæ, æquales potentiæ B vna poſt aliam ſucceſſiuè motũ per arcum B H inſtitutum promoueant; ſiue illa ipſa potentia B, quæ motum inchoauit, eundem continuet per eundem arcum, cùm eadem mouendi facultas eius integra perſeueret, aptáque ipſa ſola perinde ſit ſpatiũ BH ſpatij CG duplum eodẽ tempore emetiri, quo graue extremo alteri C appoſitũ, decurrit ſpatium CG; atq; ideò motu duplo velociori, quã ſit motus, quo graue C fertur ad G. Quod cùm in qualibet particulâ motûs ponderis, ſiue potẽtię B, & motûs magnitudinis grauis C ſemper obſeruetur: manifeſtum euadit potentiã B, quæ vnius tãtùm Libræ pondus mouendi abſque vecte foret capax; vecte adhibito, eiq; alligatam duarum librarum pondus mouendi capacem fieri tùm in

actu

actu primo, & aptitudine ad motum exercendum, tùm in actu ſecundo, & ipſo motûs exercitio; ſi tamen (quod ſuperiùs annotatum, hîc meminiſſe oportet) pondus C vnâ librâ nonnihil minus ſupponatur. His ergo ita ſuppoſitis & declaratis, patet quomodo per vectem iuuetur potentia. Poterit ſiquidem potentia B, quæ ſola ſine vecte vnius Libræ pondus mouere poſſet; pondus duarum Librarum, aut quid minus, ad C poſitum mouere: atque adeò eâdem ſeruatâ proportione potentia B dimidiæ libræ pondus mouendi capax; ad vnius libræ, aut quid minus, pondus mouendum (ſi ad C ſtatuatur pondus) apta euadet. Ita vt potentia B ad diſtantiam à puncto firmo A duplam diſtantiæ A C ponderis poſita, duplicetur, & vt dictum eſt, duabus potentiis æqualibus æquiualeat; quarum ſingulæ ſucceſſiuè poſt aliam vectis extremum B ageret per ſemiſſem ſpatij B H, hoc eſt, per ſpatium æquale ſpatio C G.

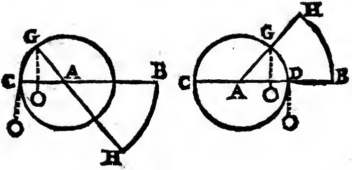
Quacunque igitur adhibitâ machinâ quâ ratione potentia maius ſpatium, quàm graue eodem tempore decurrere debet, maioríque proinde velocitate; eâdem maior euadit eius facultas graue mouendi; eò quòd toties replicetur, ſiue tot potentiis ſibi æqualibus æquiualeat; quoties ſpatium ab ipsâ decurrendum continet ſpatium, quod à graui decurri debet; ſiue etiam quò velocior eſt potentiæ motus, quàm ponderis moti. Quæ ratio ſpatiorum, ſiue motuum, eadem ſemper eſt cum ratione diſtantiarum quibus potentia, & graue recedũt à puncto firmo; cui innititur machina: quæ ratio (vt demonſtratum eſt) ipſiſſima eſt ratio; quam graue, & potentia cum diſtantiis reciprocè obſeruant. Adeò vt augmentum virium potentiæ mouentis petatur ex maiori ſpatio, ac maiori conſequenter velocitate potentiæ quàm ponderis. Quod non tantùm in vecte, aut Librâ prioris generis locum habet; ſed etiam poſterioris, & in machinis ex ipſo deductis.

Nam dum in ſecundo vecte potentia B decurrit ſpatium B H, & graue D transfert ad G: arcus D G dimidia tantùm pars eſt arcûs B H, duplóque velocior eſt motus potentiæ B ſpatium B H decurrentis, quàm motus ponderis D arcum D H eodem tempore decurrentis. Hæc ex mente (ſi eam ſatis bene ſum aſſecutus) potiùs quàm ex verbis laudati Authoris retuli, quibus nihil acutiùs. Quibus addo ex eodem citatâ ſect. 6. ad calcem.

Si pondus C (*in ſchemate vectis prioris*) duarum omnino foret librarum, nihilóque minus: aut certè vnius quidem libræ foret; ſed potentiæ B facultas abſoluta foret ſemiſſis vnius libræ: tunc in vtráque hac ſuppoſitione; quia replicata potentia B (quæ duplicata foret) ca-

Digitized by Google

pax præciſè foret reſiſtentiæ ponderis C contranitendi; ratióque tentiæ B ad pondus C eadem præciſè foret; quæ reciprocè eſt diſtantiæ A C ponderis C à puncto firmo A ad diſtantiam A B potentiæ B ab eodem puncto: tunc neutro præponderante conſiſtentia ſiue æquilibrium inter graue motricémque potentiam ſtatueretur; nec vllus iniretur motus; ad quem requiritur quædam ponderis, & potentiæ inæqualitas, vt alterum alteri præponderare queat, atque adeò motum ciere. Atque hactenus nouæ de Machinis Philoſophiæ Principium mihi videor complexus, circa quod hæc obſeruanda veniunt.



Primò quidem nihil verius, certiúſque eſſe conſtat; quàm motricis potentiæ machinâ vtentis mouendi facultatem eâ ratione eſſe maiorem facultate, quâ omni machina deſtituta pollet: quam obſeruat eius à puncto machinæ firmo diſtantia (omne enim quod mouetur Authore Ariſtotele in Quæſt. Mechan. quieſcenti cuipiam, ac firmo niti neceſſe eſt) ad ponderis, quod mouetur, diſtantiam ab eodem puncto firmo. Qua etiam ratione (quæ ex ea diſtantiarum ratione, vt oſtenſum eſt, neceſſariò ſequitur) ſpatium à motrice potentia decurſum excedit ſpatium, quod eodem tempore motum per machinam pondus emetitur: aut etiam (quod etiam inde ſequi neceſſe eſt) quâ ratione motus potentiæ velocior eſt motu ponderis. Adeo vt ſubtiliſſimi nouæ de Machinis Philoſophiæ Authoris ratiocinatio Vniuerſalis ſit, & ad Machinas omnes poſſit applicari. In iis ſiquidem omnibus ea ratione motrix potentia replicatur, eiúſque ad mouendum graue vires augentur (vnde fit vt debilior potentia per hanc replicationem grauiori ponderi mouendo par euadat;) qua ſpatium, quod decurrit, maius eſt ſpatio, quod pondus eodem tempore emetitur; vel etiam, qua ratione potentiæ mouentis velocitas, moti ponderis

deris velocitatem ſuperat. Sed vt hæc ita ſint; attamen.

Secundò. Ingenuè fatendum mihi eſt me nunquam tam apertè aſſecutum eſſe rationem illam, qua laudatus Author acutiſſimus replicationem potentiæ fieri aſſerit, licèt eam pluribus exponat, vt omni amota caligne mens ei potuerit acquieſcere. Hæſitandi hæc occurrunt argumenta. Si in eodem ſchemate vectis prioris ad extremum eius C, pondus ſtatuatur duarum librarum; ad alterum verò extremum B, pondus vnius libræ poſita diſtantia AB, diſtantiæ AC dupla; conſiſtunt, vt ex Authore retuli, in æquilibrio duo illa pondera, ſiue pondus C, & potentia paris cum pondere B facultatis, eius loco ſubſtituta. In hoc ergo caſu æquilibrij dici vix poſſe videtur juxta Principium nouæ de Machinæ Philoſophiæ, facultatem ſiue ponderis, ſiue potentiæ B replicari non tantùm in actu ſecundo & exercito, ſed nec in primo, & aptitudine ad motum duplo velociorem motu ponderis C ineundum, cùm ad quietem, & conſiſtentiam tam pondus C, quam potentia B, ſint hac ſeruatâ ponderis ad potentiam, & potentiæ à puncto A firmo diſtantiæ ad ponderis C diſtantiam reciproca ratione, omninò comparata abſque omni ad motum quemcunque inſita habitudine: vnde nec ſpatium maius quod à potentia B (ſi ab aliquo agente extrinſeco ad motum cieatur) æquilibrante percurritur; nec maior eiuſdem potentiæ motûs velocitas quidquam maioris facultatis potentiæ confert, vt ponderis C obnitentis reſiſtentiam æquandi capax euadat. Si enim potentia abſque omni ad motum ordine æquilibrum cum pondere oppoſito conſtituendi, tuendique capax euaſerit: multò minus ſpatium quod per accidens mota decurret, vel eius motûs velocitas, quæ motui adueniunt, nec ipſi ſunt eſſentialia; ad æquilibrandum potentiæ facultatem exhibere poſſunt: Sed aliunde ei obuenire dicendum videtur. Vnde porrò? ex eo ſcilicet quòd Prop.59. demonſtratum ſit inter duo pondera C, & B, ſiue inter pondus C, & potentiam B ponderi æqualem, æquilibrium conſtitui, ſiue potentiæ facultatem ponderis reſiſtentiæ fore parem: ſi diſtantiæ ponderum C,B à puncto firmo A fuerint reciprocè proportionales, vt ibidem explicatum eſt Hac enim poſita reciproca proportione, fit vt centrū grauitatis vel ex vtroq; pondere, vel ex ponderum Altero, & potentia aliqua alterius pōderis, vices ſupplente cōpoſitę ſuſpendatur, vel ſuſtentetur: Centro autem grauis cuiuſuis quouis modo à lapſu cohibito; ipſum graue in æquilibrio conſtitui neceſſe eſt per Prop.58. atque adeò ad omnem ſitum, ſine diſcrimine occupandum fieri paratum. Vnde patet rationem adiumenti, quod potentiæ mo-

tiuæ

trici præſtant machinæ, videri peti debere non ex eo, quòd replicetur eius robur, ipſáque ope machinæ fortior euadat; ſed ex eo, quòd in tali à puncto firmo, cui nititur machina, diſtantia exiſtens graue vnà cum pondere componat; cuius centrum grauitatis ſit vel ipſum punctum firmum, vel eidem puncto firmo directè immineat, aut directè ab ipſo ſuſpendatur; ex qua centri grauitatis conſtitutione ſequatur æquilibrium, parque ponderis maioris puncto firmo vicinioris; ponderiſque, ſiue potentiæ minoris ab eodem puncto remotioris ad grauitandum aut ad ſuſtinendum facultas.

Illud demum, cuius aliquoties iam memini, etiam conſtare videtur. Nimirum, conſtituto æquilibrio, vectis, V. G. C B prioris generis potentiam B, nulla alia maiori facultate egere ad motum ineundum, & continuandum, quàm quæ ei ſufficit ad æquilibrium. Cùm enim ea par ſit reſiſtentiæ ponderis, & ad omnem ſitum, qui motum ſequitur, indifferens; non facultas maior ad motum, ſed tantùm applicatio, & vſus potentiæ accedere debet: ad quem agens ſiue ratione, ſiue ſenſu tantùm ductum ſeſe per ſe determinare poteſt. Atque hæc de ſtatice ex occaſione eorum quæ conſequuntur, ſatis. Nunc ad inſtitutum.

PROPOSITIO LXII. *Theorema.*

SI triangula duo A B C, D E F æquales habeant duos Angulos A & D: quorum vterque diuidatur in duos angulos vtrumque vtrique æquales, nempe G A B, H D E; & G A C, H D F: diuidantur & baſes C B, F E proportionaliter, illa in G, hæc in H.

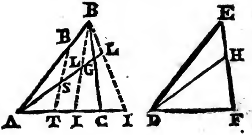
Dico æquiangula eſſe duo illa triangula, & ſimilia ſimiliterque poſita.

Dico prætereà nullam lineam in alterutro duci poſſe ad latera triangulorum terminatam; quæ ſimiliter ſecetur à linea angulos diuidente; vt baſis BC diuiſa eſt in G, aut baſis E F in H, niſi fuerit hiſce baſibus parallela.

Demonſtratio prioris partis.

Si ſimilia non ſunt duo triangula A B C, D E F; angulus A B C vel maior eſt, vel minor angulo D E F; ſi enim duo illi anguli A B C, D E F

Digitized by Google



DEF forent æquales: iam tum ſequeretur per Prop.4. Lib.6. Elem. ſimilia eſſe duo illa triangula fiat ergo angulus ABI æqualis angulo DEF: erit triangulum ABI ſimile triangulo DEF; & ſecabitur baſis BI in L ſimiliter, vt EF ſecta eſt in H, ſiue ex hypotheſi, vt BC in G. Ergo GL parallela eſt per Prop.2. Lib. 6. lineæ CI. Quod eſt abſurdum: Conueniunt enim GL & CI in A. Quare dicendum eſt angulos ABC, DEF, eſſe æquales: atque adeò duo triangula ABC, DEF eſſe ſimilia per Prop.4. Lib.6. & Elem. ſimiliter poſita. Quod erat primo loco probandum.

Demonſtratio ſecundæ partis.

Si quæpiam linea RT vſpiam in alterutro triangulorum duci queat, quæ ita ſecetur in S à lineâ AG, vt BC ſecta eſt in G, nec tamen ſit lineæ BC parallela: ducatur ei per B parallela BI; quam in L ſecet recta AG. Itaque BI ſecabitur in L, vt RT ei parallela ſecatur in S. Sed BC ex hypotheſi ita ſecatur in G, vt RT ſecatur in S. Ergo BI, in L, & BC in G ſecantur ſimiliter. Ergo per Prop.2. Lib. 6. Elem. lineæ GL, CI, ſunt parallelæ quod eſt abſurdum, cùm in A conueniant. Quare nulla linea, quæ non ſit parallela baſi BC, aut EF duci poteſt in his triangulis, quæ ſimiliter ſecari poſſit à linea AG, aut DH vt BC ſecatur in G, aut EF ſecatur in H. Ergo ſi triangula duo ABC, DEF æquales &c. quod erat probandum.

PROPOSITIO LXIII. *Theorema.*

CViuſuis ſectoris circuli centrum grauitatis à centro circuli minùs diſtat, quàm duabus ſemidiametri tertiis partibus.

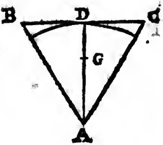
Expoſitio.

Sit circuli quicunque ſector AEF: qui bifariam diuidatur à ſemidiametro AD: erit ſectoris centrum grauitatis in hac biſecante lineâ AD, vt per ſe patet. Dico autem centrum illud grauitatis, quicun-

Digitized by Google

que tandem fuerit ſector, minùs diſtare à circuli centro A, quàm ſint duæ tertiæ partes radij A D. Hoc eſt, diuiſo radio A B in tres partes æquales, quarum duas complectatur A G: punctum illud G *nullius ſectoris eſſe poſſe centrum grauitatis; ſed omnium ſectorum id generis centra grauitatis cadere inter* G & A.

Demonſtratio.



Per punctum D, in quo radius A D circulum ſecat, ducatur linea circulum tangens, ſiue ad A D perpendicularis: quam duo ſectoris latera A E, A F producta ſecent in B & C. Erit triangulum A B C Iſoſceles, ſunt enim duo anguli D A B, D A C; & duo A D B A D C æquales ex hypotheſi. Ergo & duo reliqui B, & C, ad baſim ſunt æquales: vnde per Prop. 6. Lib. 1. Elem. triangulum A B C Iſoſceles eſſe neceſſe eſt, quo poſito. Cùm centrum cuiuſuis trianguli per Prop. 14. Lib. 1. Æquip. Archim. ſit in lineâ baſim biſecante: ſit autem etiam in lineâ baſi parallela, quæ latera ita ſecat, vt pars angulo adhærens ſit reliquæ partis dupla per lem. Commandini ad Prop. 15. Lib. 1. Æquip. demonſtratum: trianguli A B C centrum neceſſariò eſt punctum G. Nam linea A D bifariam ſecat baſim B C in D; & ſi per G ageretur baſi parallela, ſecaret latera, vt ſecta eſt A D in G. Cùm verò etiam nec G, ſicut nec linea A D vnquam mutetur; licèt duo latera A B, A C mutentur, vel ad A D propiùs accedendo, & angulum B A C ſemper minorem continendo, donec cum ipſa A D ambæ coaleſcant; vel ab eâdem A D recedendo, maiorémque angulum B A C conſtituendo, donec ipſæ A B, A C ſibi in directum componantur omni earum euaneſcente inclinatione, & angulo, & ſector ipſe euadat ſemicirculus; ſit verò ſectoris cuiuſcunque centrum grauitatis, vt mox aperiam, centro A vicinius, quàm grauitatis centrum cuiuſcunque Iſoſcelis trianguli A B C: manifeſtum eſt ſectoris cuiuſcunque centrum grauitatis minùs diſtare ab angulo A ſiue centro circuli, quàm duabus tertiis partibus A G totius lineæ A D, ſiue ſemidiametri circuli, vt fert propoſitio. Sed oſtendi debet centrum grauitatis ſectoris ſemper eſſe centro A vicinius, quàm centrum G trianguli. Hoc autem manifeſtum eſt per Axioma 4. Lib. 1. æquip. Archimedis: quo conſtat, ſi à graui magnitudine, vt triangulo A B C, quidpiam demátur, velut ab eo triangulo demuntur duo mixta triangula

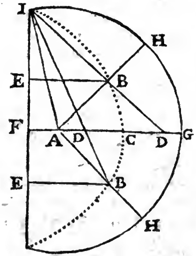
gula D B E, D C F; vt reliquus fiat ſector: centrum Grauitatis in oppoſitam partem recedere recedit: ergò à centro G trianguli cuiuſuis A B C, centrum cuiuſuis ſectoris A E F versùs A, eíque fit propius: minúſque ab eo diſtat quàm duabus tertiis A G ſemidiametri circuli partibus. Quare cuiuſuis ſectoris &c. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Hinc ſequitur omnium circuli ſectorum, quos linea A D bifariam ſecet, ſemicirculo tum maiorum, tum minorum centra grauitatis reperiri in linea G A duas tertias partes totius ſemidiametri A D continente: eóque fore centro circuli A viciniora, quò maiores extiterint ſectores; donec tandem ad centrum A totius circuli centrum & grauitatis, & magnitudinis deueniatur.

PROPOSITIO LXIV. *Theorema.*

SI ex quouis quadratricis puncto I recta ducatur ipſius cornu vel ſuperius, vel inferius ſecans in B; Axem verò A C in D: ac per B ducatur radius A B, ſecturus in H circulum centro A per I deſcriptum.



Dico rectam I D ita ſecari in B à Quadratrice: vt ita ſe habeat I D ad B D; vt ſe habet angulus I A C ad Angulum B A C; ſiue, vt arcus I G ad arcum H G.

Demonſtratio.

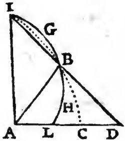
Ducatur à puncto B ad applicatam I F perpendicularis B E, ſiue Axi A C parallela. Secatur I D in B, vt I F ſecatur in E; ſunt enim in triangulo I F D duæ lineæ F D, E B parallela inter ſe. Sed per conſtructionem Quadratricis, vt ſe habet I F ad E F; ita ſe habet angulus I A C, ad angulum B A C, ſiue arcus I G ad arcum H G. Ergo etiam, vt I D, eſt ad B D: ita tam angulus I A C,

ad angulum A B C quàm arcus I G eſt ad arcum H G. Quare ſi ex quouis Quadratricis &c. quoderat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXV. *Theorema.*

SInt duo Quadratricis radij A I, A B; quorum ille ſit ab Axe A C remotior, quam iſte.

Dico A I maiorem eſſe, quàm A B.



Demonſtratio.

Si A I maior non eſt quàm A B; erit illi æqualis, aut eo minor. Dicatur æqualis. Centro igitur A per I deſcriptus circulus tranſibit per B: Ducatur per I & B recta ſecans in D Axem: circulus per I & B deſcriptus ſecabit Axem inter D & A, vt in L. Itaque, cùm per Prop. præced. ita ſit I B ad B D; vt angulus I A B ad B A D: vt autem angulus I A B ad B A D; ita ſit ſector A I G B ad ſectorem A B H L: Item per Prop. 1. Lib. 6. Elem. ita triangulum I A B ad triangulum B A D: Erit ſector AIGB ad ſectorem A B H L, vt triangulum I A B ad triangulum B A D. Sed ſector A I G B eſt maior triangulo A I B. Ergo & ſector A B H L maior eſt triangulo A B D. Quod eſt abſurdum: ergo A B non eſt æqualis A I, multò minus erit maior. Ergo eſt minor, vt aſſertum eſt.

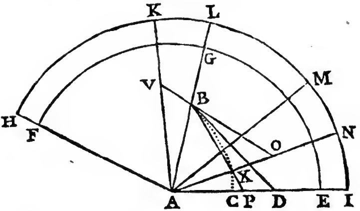
PROPOSITIO LXVI. *Theorema per-inſigne.*

SI linea quæpiam B D Quadratricem in B tetigerit, Axemque ſecuerit in D: ſumatur autem D E æqualis ſemiſſi lineæ A D à tangente B D abſciſſæ: centróque A per E circulus deſcribatur, quem in G ſecet radius ex A per B eiectus: ac demum ſumpto arcu G F æquali G E, ducatur radius A F, vt fiat ſector integer A F G E; quem bifariam recta A G per B acta diuidit.

Dico punctum B Quadratricis, eſſe centrum grauitatis ſectoris A F G E.

Prepa

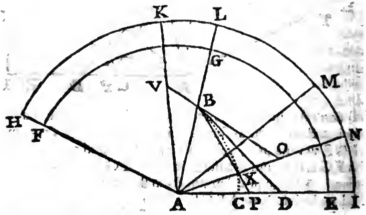
Præparatio.



Si B non eſt centrum grauitatis ſectoris AFGE:erit ſaltem centrum grauitatis ſectoris alicuius ſimilis huic ſectori A F G E, eodem ſectore A F G E vel maioris, vel minoris; Sector enim quilibet ſimilis ſectori A F G E centrum grauitatis in rectâ A G bifariam illum ſecante ſortitur. Sit ergo primùm punctum B centrum grauitatis ſectoris A H L I maioris ſectore A F G E. Quo ſuppoſito erit eius ſemidiameter A I maior, quàm ſeſqui altera rectæ A D : cùm eius ſeſquialtetera ex conſtructione ſit A E (eſt enim poſita D E æqualis ſemiſſi rectæ A D ; atque adeò A E ſeſqui-altera rectæ A D) quod cùm ita ſit, dari poteſt aliquis ſector circuli H L I, cuius centrum à centro A ſpatio diſtet æquali rectæ A D per Prop. 63. eiúſque Coroll. vbi oſtenſum eſt centrum grauitatis cuiuſcunque ſectoris cadere infra punctum radij ſectorem bifariam diuidentis, in quo puncto radius ille ita ſecatur in partes inæquales; vt pars centro A adhærens dupla ſit reliquæ. Sit ergo ſector ille AMNI : quo bifariam diuiſo ductâ ſemidiametro A N, in eâ ſumatur AO æqualis rectæ A D; vt ſit punctum O centrum grauitatis ſectoris A M N I. Tum ſumpto arcu N K æquali arcui I L ducatur A K : erit, vt patet arcus L K æqualis arcui N I, vel N M : erit etiam arcus K M æqualis arcui K H; Nam ſi ab æqualibus arcubus L I, L H demantur æquales I N, L K; æquales reliqui fient arcus K H, L N. Sed arcus L N æqualis eſt arcui K M : eo quòd, ſi ad arcus æquales L K, M N addatur communis arcus L M; æquales fiant arcus K M, L N. Ergo æquales etiam ſunt arcus K H, K M. Vnde fit vt centrum grauitatis ſectoris A H K M, ſit in lineâ

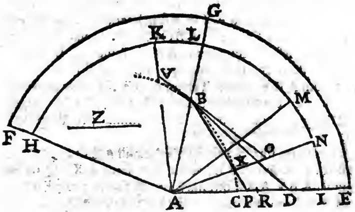
A K ipſum biſecante. Quare ſi ex ſectoris A M N I centro O ducatur per B centrum grauitatis ſectoris totius A H L I, linea O B V ſecans in V rectam A K: erit V centrum grauitatis ſectoris A H K M per Prop. 8. Lib. 1. Archim. de Æquipond. denique ducatur ex puncto B per punctum X, in quo recta A O Quadratricem ſecat, recta B X; quæ Axem ſecet in P. His ita poſitis, colligitur Theorematis demonſtratio ad priorem partem ſpectans.

Demonſtratio.



Cùm B ſit centrum totius ſectoris A H L I; ſectoris autem A M N I centrum ſit O; & ſectoris A H K M centrum ſit V; ductáque ſit linea O B V centra illa connectens: per Prop. 6. aut 7. Lib. 1. Archim. aut per Prop. 48. ſuper. ita erit O B ad B V; vt reciprocè ſector A H K M, cuius centrum eſt V, ad ſectorem A M N I, cuius centrum eſt O. Ergo per Prop. 15. Lib. 5. Elem. ita etiam erit O B ad B V; vt ſector A K M, ſemiſſis ſectoris A H K M; ad ſectorem A M N, ſiue ad A N I, aut A K L ſemiſſem ſectoris A M N I. Sed per Prop. 33. Lib. 6. Elem. vt ſector A K M ad ſectorem A K L; ita eſt angulus K A M, ſiue L A N ad angulum K A L. Ergo ita eſt O B ad B V; vt angulus L A N ad angulum K A L, ſiue ad angulum N A I angulo K A L æqualem. Sed vt angulus L A N ad angulum N A I; ita eſt per Prop. 64. recta B X ad X P. Ergo ita eſt O B ad B V; vt B X ad X P. Ergo per Prop. 62. duo Triangula O A V, & A B P ſunt ſimilia. Nam angulus V A O æqualis eſt angulo B A P, & ex vtroque angulo illo æquali egrediuntur lineæ A B, A X continentes angulos B A V, X A P æquales; ac denique in eadem ſunt ratione O B, B V; & B X, X P. Cùm ergo, vt dictum

ctum eſt, Triangula hæc O A V, A B P ſint ſimilia; ſit vt Trianguli A O V angulus O, æqualis ſit angulo A B P Trianguli A B P. Quod cùm ita ſit. Duo etiam triangula A O B A B X, cùm habeant angulum B A O communem; anguli autem A O B, A B X oſtenſi ſint æquales: erunt & ipſa, æquiangula & ſimilia. Quare ita erit A O ad A B, vt A B eſt ad A X. Sed A O æqualis eſt ex conſtructione rectæ A D à tangente B D abſciſſæ. Ergo ita etiam eſt A D ad A B; vt A B ad A X. Sed ita etiam eſt per Prop. 30. Coroll. A D à tangente abſciſſa ad radium A B; vt radius A B ad Quadratricis ſagittam A C. Ergo per Prop. 9. Lib. 5. Elem. æquales ſunt radius A X & ſagitta A C. Quod eſt abſurdum. Nam per Prop. 65. ſagitta A C omnium radiorum Quadratricis breuiſſima eſt: reliquorum verò remotior à ſagittâ, propiore ſemper maior eſt. Punctum igitur B non poteſt eſſe centrum ſectoris A H L I: cuius ſemidiameter A I maior ſit ſemidiametro A E ſectoris F G E: quæ eſt ſeſqui-altera lineæ A D inter centrum A & lineam BD, quæ in B Quadratricem tangit. Quod primum erat demonſtrandum.



Dicatur ſecundò punctum Quadratricis B eſſe centrum grauitatis ſectoris A H I L, ſectore A F G E minoris. Ita ſecetur in R eius ſemidiameter A I; vt A I ſit ſeſqui-altera rectæ A R: ſit nimirum pars A R partis R I dupla. Tum duabus lineis A R, A B tertia proportionalis Z inueniatur. Hæc maior neceſſariò futura eſt quàm Quadratricis ſagitta A C. Nam cùm A B ſit etiam per Prop. 30. Coroll. media proportionalis inter A D à tangente B D abſciſſam, & ſagittam A C: erit Quadratum lineæ A B æquale tam rectangulo lineis A D, A C; quàm rectangu-

rectangulo A R, & Z comprehenſo. Cùm ergo duo hæc rectangula ſint æqualia: Ita erit per Prop. 16. Lib. 6. Elem. A D ad A R; vt Z ad A C. Sed A D maior eſt quàm A R. Ergo Z maior etiam eſſe debet quàm ſagitta A C per Prop. 14. Lib. 6. Elem. Quare ſi centro A, & radio Z arcus circuli deſcribatur: is ſecabit Quadratricem in aliquo puncto, vt in puncto X. Iam per X ducatur tum à puncto B recta ſecans in P Axem, tum à centro A radium A N: deinde arcui N I æqualis ſumatur N M, itémque L K: ductis etiam lineis A M, A K: denique ſumptâ A O rectæ A R æquali, ex O per B traiiciatur linea recta radium A K ſectura in V.

Hac abſolutâ conſtructione, conſtat vt in præcedente caſu, arcus K M, K H eſſe inter ſe æquales: atque adeò ſectorem A H K M bifariam diuidi à radio A K, & in radio A K centrum grauitatis reperiri ſectoris A H K M. Quo eodem iure ſectoris A M N I grauitatis centrum in rectâ M N ſectorem bifariam ſecante reperiri debet.

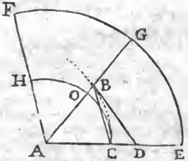
Ad hæc conſtat tam duo triangula, ABO, AXB, quàm duo ABV, A X P eſſe ſimilia. Nam ex conſtructione AO æqualis eſt rectæ A R; & AX rectæ Z: inter quas eſt A B media proportionalis. Cùm ergo ita ſit vt AO ad AB; ita A B ad A X; quæ ſunt latera circa communem angulum A: erunt duo Triangula A B O, A X B æquiangula per Prop. 6. Lib. 6. Elem. Eſt ſcilicet angulus A B O angulo A X B æqualis. Ergo & anguli iis deinceps poſiti, nempe A B V, A X P, ille pertinens ad Triangulum A B V; hic ad Triangulum A X P; ſunt æquales, æquales autem ſunt ex conſtructione anguli B A V, P A X. Ergo & hæc duo Triangula ſunt æquiangula, & ſimilia per Prop. 32. Lib. 1. Elem.

Quæ cùm ita ſint. Latus B O Trianguli A B O, ita erit ad B A; vt latus B X, Trianguli A B X, ad eiuſdem latus A X. Quia verò duo Triangula A B V, A X P oſtenſa ſunt eſſe ſimilia: ita eſt A B ad BV; vt AX ad X P. Ergo ex æquo ita erit O B ad B V; vt B X ad X P. Sed vt B X ad X P; ita eſt angulus L A N ad angulum N A I per Prop. 64. Ergo ita eſt O B ad B V; vt Angulus L A N ad angulum N A I: vel vt angulus K A M, ad angulum M A N (ſunt enim hi duo duobus illis æquales.) Ergo etiam ita erit O B ad B V; vt angulus H A M anguli K A M duplus, ad angulum M A I anguli M A N duplum per Prop. 15. Lib. 5. Elem. Ergo etiam per Prop. 33. Lib. 6. ita erit OB, ad B V, vt ſector A H K M ad ſectorem A M N I: eadem enim eſt ratio ſectorum, & ipſorum angulorum.

Quare cùm totius ſectoris A H L I ex duobus ſectoribus A H K M &

& A M N I conflati centrum grauitatis aſſeratur eſſe Quadratricis punctum B: centrum autem ſectoris A H K M reperiatur neceſſariò in radio A K il'um ſectorem biſecante; ſicut & grauitatis centrum ſectoris A M N I in radio A N ipſum biſecante reperiri debet: ac demum ducatur recta O V per grauitatis centrum B totius ſectoris A H L I; qua in B ſecatur in reciprocâ ratione partialium ſectorum: nec alia poſſit per Prop. 62. duci per B linea recta, quæ in eadem ratione ſecetur: neceſſarium verò ſit per Prop. 6. Lib. 1. Æquipon. Archim. eam in eâ reciproca ratione ſecari, quæ per centrum grauis totius & partium eius ducitur. Concludendum omnino eſt, & V centrum eſſe ſectoris A H K M, & ſectoris A M N I centrum eſſe O. Verùm, cùm A O poſita ſit æqualis lineæ A R, quæ duas tertias partes ex hypotheſi continet ſemidiametri A I continebit & ipſa A O duas tertias partes ſemidiametri A N. Ergo ſectoris A M N I centrum grauitatis O diſtat à circuli centro A duabus partibus tertiis. Quod eſt abſurdum: cùm per Prop. 63. cuiuſuis ſectoris centrum grauitatis, minus quàm duabus tertiis partibus ſemidiametri ab ipſo circuli centro diſtare neceſſe ſit. Cùm ergo punctum B Quadratricis non poſſit eſſe centrum grauitatis ſectoris vllius, cuius ſemidiameter vel maior ſit quàm ſeſqui-altera lineæ abſciſſæ à tangente Quadratricem; vel eâdem minor: dicendum eſt eſſe centrum illius ſectoris; cuius ſemidiameter eſt abſciſſæ illius à tangente, ſeſqui-altera. Quare. Si linea quæpiam B D &c. Quod erat probandum.

Alia Demonſtratio.



Iuuat ad Propoſitionis tam eximiæ firmius ſtabiliendam, & apertiùs exponendam veritatem, aliam eius demonſtrationem inſtituere; quæ ex Propoſitione 32. operis initio laudati de centro grauitatis partium circuli & Ellipſis ab eximio Geometrâ Ioanne de la Faille Soc. Ieſu lucubrati colligitur. Si enim habet ex eius ſenſu, & penè verbis. *Si quolibet circuli ſectore A H O C biſariam ſecto in O, à latere eius A C velut baſi deſcriptum fuerit triangulum A B C, dimidio ſectori A O C æquale, communem cum ſectore habens eum angulum, qui ad centrum A circuli eſt: deinde à vertice B trianguli ad baſim producta linea B D, quæ priori triangulo A B C ſimile triangulum*

R *A B D*

Digitized by Google

A B D conſtituat: centróque A ſectoris, alius deſcribatur ſector A F G E eiuſdem anguli cum dato ſectore A H O C; cuius latus A E ſit ſeſqui-alterum lineæ A D, quæ inter centrum circuli A, & concurſum D, lineæ B D à vertice ductæ ad productam baſim A C interiicitur. Trianguli A B C vertex B, erit centrum grauitatis ſectoris A F G E poſtremò deſcripti. Hæc eſt laudati Authoris Propoſitio, quam acutè, accuratéque probat ex Principiis ab iis quæ ego adhibui, longè diuerſis: ex quâ ita licet argumentari. Ducto quocunque Quadratricis radio A B, ſi ex puncto B duæ ducantur lineæ BC, BD, illa ad Quadratricis verticem C; hæc Quadratricē tangens in B: duo conſtituuntur triangula BAD, BAC ſimilia per Prop. 50. Ad hæc. Si centro A per verticem Quadratricis C circulus deſcribatur: eſt ſector AOC triãgulo ABC æqualis per Prop. 52. Quod cùm ita ſit: cernis, opinor, hîc obſeruatam omnem citati Authoris ſuppoſitionem. Ex quâ eandem ſequi concluſionem neceſſe eſt. Nimirum. Si A D bifariam diuidatur, eiúſque ſemiſſi æqualis ponatur D E, poſitáque ſemidiametro A E ſector A F G E conſtituatur: erit eius ſectoris centrum grauitatis punctum Quadratricis B, quod eſt vertex trianguli A B C. Nihil ergo verius, quàm punctum quodlibet B Quadratricis eſſe grauitatis centrum ſectoris A F G E: cuius radius A E eſt ſeſqui-alter lineæ A D inter centrum A, & lineam B D Quadratricem tangentem interceptæ, & hæc mea Propoſitio aſſerit.

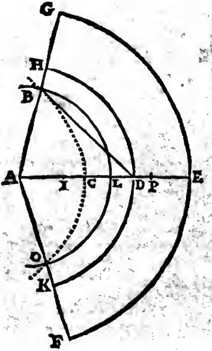
Monitum.

Inſititia ſunt, mi Lector, quæ ſequuntur tum Corollaria, tum Scholia ex Propoſitione præcedente deducta. Quanquam enim ea obſeruatione digniſſima cenſurum te non dubitem; ſcito tamen non niſi tardiùs, abſoluto ſcilicet hoc toto opuſculo à me fuiſſe obſeruata; vix vt ſatis tempori Typographicis operis tranſmitti potuerint: vt minimè mirere, ſi neque in Propoſitionum ſeriem, prout fuiſſet aptius, componantur; neque ad ſequentia, prout non ſine compendio interdum fieri potuiſſet, exponenda adhibeantur; quod, cùm locus occurret, facilè licebit aduertere ea porrò cuiuſmodi ſint, accipe.

Corollarium 1.

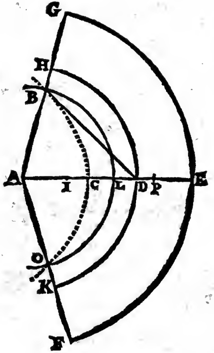
Repetatur Theorematis præcedentis non-nihil mutata conſtructio in hunc modum. Supponatur recta B D Quadratricem tangere in B, Axíque occurrere in D: tum fiat A E ſeſqui-altera rectæ A D, quam ex Axe abſcindit tangens B D: centro porrò A per B circulus deſcribatur; qui alterum Quadratricis cornu ſecet in O, per quod punctum ex centro A radius emittatur: eodem etiam centro A circulus per E deſcribatur radiis AB, AO productis occurrens in G & F. His poſitis, ex præcedente Prop. ſequitur punctum L centrum eſſe grauitatis

uitatis ſectoris A G E F. Nam iuxta eam Propoſitionem punctum B eſt centrum grauitatis ſectoris, qui componeretur ex ſectore A G E; & altero ſectore huic æquali ex altera parte radij A G conſtituto: cui toti ſectori æqualem eſſe patet ſectorem A G E F. Ergo ſicut B centrum eſt grauitatis prioris illius ſectoris ex citatâ Prop. Ita L, quod æquè ac punctum B diſtat à centro A, eſt centrum grauitatis ſectoris A G E F. Atque hoc quidem planum & apertum eſt. Hoc porrò poſito.



Si ſtatuatur A P ſeſqui-altera rectæ A L (quæ eſt diſtantia centri grauitatis ſectoris ipſius A G E F à centro A) dico punctum P eſſe centrum grauitatis arcûs ipſius G E F ſectorem A G E F conſtituentis. Huius Aſſertionis veritas tum ex Theoremate præcedenti, tum ex quadam Guldini noſtri Propoſitione deducitur; quam refert, & meritò mirum in modum commendat inſignis & ipſe Geometra Antonius Lalouera noſtræ item Societatis Lib. 5. Prop. 21. Coroll. 2. operis inauditi de Cycloide. Hic ergo refert ab illo demonſtratum, ſi cuiuſuis arcûs G E F centrum grauitatis notum habeatur, notum fieri ſectoris ipſius A G E F centrum grauitatis L: ſi vt ternarius ad binarium, ita fiat centri grauitatis arcûs G E F diſtantia A P à centro A ad rectam A L: erit enim L, centrum grauitatis ſectoris ipſius A G E F. Ergo conuertendo. Si notum habeatur priùs centrum L grauitatis ſectoris A G E F, ſi fiat vt binarius ad ternarium, ita A L diſtantia centri grauitatis ſectoris A G E F à centro A ad A P, hoc eſt, ſi A P fiat ſeſqui-altera rectæ A L; erit P centrum grauitatis arcûs G E F, cui angulus ſectoris inſiſtit. Conſtat ergo quomodo ex præcedenti Theoremate, & Guldini Aſſertione notum euadere queat centrum grauitatis arcûs cuiuſcunque ſectorem conſtituentis.

Corollarium 2.



Si centro A Quadratricis circulus quicunque deſcribatur ſecans in B ſuperius Quadratricis cornu, inferius autem in O, & Axem in L: ac demum Quadratricis ſagitta A C ita diuidatur in I, vt ipſa ſit ſuæ partis A I ſeſqui-altera, ſiue, quod idem eſt, ſit C I ſagittæ A C pars tertia. Dico punctum I eſſe centrum grauitatis ſectoris ABLO. Quod ſic oſtendo repetito ſuperiori ſchemate.

Cùm A E, rectæ A D; & A C, rectæ A I ſit ex hypotheſi ſeſqui-altera: Rectangulum primâ A E & quartâ A I comprehenſum æquale eſt Rectangulo ſecundâ A D & tertiâ A C contento. Sed Rectangulum ſub A D, A C æquale eſt Quadrato A L, ſiue A B (ſunt enim tres lineæ A D, A L, A C continuè proportionales per Prop. 30. huius) ergo eidem Quadrato rectæ A L æquale eſt Rectangulum rectis A E, A I contentum. Ergo ita eſt A E ad A L, vt A I. Sed A L eſt diſtantia centri L grauitatis ſectoris A G E F à centro A. Ergo A I diſtantia eſt ab eodem centro A centri grauitatis ſectoris A B L O ſimilis, ſimiliterque poſiti ſectori A G E F; ipſúmque punctum I, cùm in ſectore A B L O ſimiliter ſe habeat, vt ſe habet centrum L grauitatis ſectoris A G E F, erit grauitatis centrum eiuſdem ſectoris A B L O per Axi. 6. Lib. 1. de Æquipond. Archim. Quod demonſtrandum hîc erat.

Corollarium 3.

Iiſdem poſitis, Vertex C Quadratricis centrum grauitatis arcûs B L O, cui inſiſtit eiuſdem ſectoris A B L O angulus. Id apertè conſtat ex probatione Corollarij primi: eſt enim A I diſtantia centri grauitatis ſectoris A B L O à centro A ad A C, vt binarius ad ternarium: Ergo C eſt centrum grauitatis arcûs B L O.

Quicunque ergo circulus centro A Quadratricis deſcribatur vtrumque

que eius cornu ſecans (ſecabit enim, cùm ſagitta A C ſit omnium radiorum Quadratricis breuiſſimus, reliquorum autem ſagittæ propinquior remotiore breuior ſemper ſit per Prop.65. huius) vt in B & O, centrum grauitatis ſectoris; qui ex centro A ad ſectiones B & O eductis radiis conſtituitur; ſemper erit punctum I: punctum verò C vertex Quadratricis, ſemper erit centrum grauitatis arcûs B L O, ſiue baſeos eiuſdem ſectoris. Quá Quadratricis facultate haud ſcio an alia aliqua vel ipſius, vel aliûs cuiuſcunque eius generis curuarum linearum admiratione dignior obſeruari queat.

Corollarium 4.

Hinc facili negotio ſoluetur Problema, quod paulò grauiore ſolutum eſt inferius (ſed ibi moniti ſuperioris memineris) eſt autem huiuſmodi. *Dati cuiuſuis ſectoris A G E F* (ſchemate vtar eodem) *centrum grauitatis, vna cum centro arcûs, cui inſiſtit, definire.*

Angulus G A F dati ſectoris bifariam diuidatur: eiúſque ſemiſſi ad punctum A Axis A C, fiat æqualis angulus G A C ducto radio A G, qui Quadratricem ſecet in B. Tum centro A per B, circulus deſcribatur ſecans in O alterum Quadratricis cornu, eiúſque Axem in L. Iam conſtat ex præcedenti Coroll. punctum I centrum eſſe grauitatis ſectoris A B L O ſimilis ex conſtructione ſectori dato A G E F; punctum autem C centrum eſſe grauitatis arcûs B L O, qui ſectoris eiuſdem baſis eſt. Fiat ergo vt radius A L ad A I, ita radius A E ad A L (ex ſchematis huius conſtructione A L caſu eſt radius ipſe prioris ſectoris, aliàs aliter continget) erit L centrum grauitatis dati ſectoris A G E F. Similiter; ſi fiat vt idem radius A L ad A C, ita radius A E ad A P: erit P centrum grauitatis arcûs G E F. Vtrumque conſtat ex allato ſuperiùs Axiomate 6. Lib.1. Æquipond. Archimedis. Tam enim duo puncta I & L, quàm duo C & P in ſimilibus figuris, ſectoribus ſcilicet A B L O, A G E F, ſimiliter ſunt poſita. Ergo L & P ſunt ea quæ inueſtiganda erant centra grauitatis in dato quouis ſectore A G E F.

Corollarium 5.

In eodem ſchemate tangat B D Quadratricem in B, Axi occurrens in D: ſi centro A per D arcus H D K deſcribatur ſectorem A H D K conſtituens ſimilem ſectori A B L O: erit L centrum grauitatis arcûs H D K, idem quod Prop. antecedente demonſtratum eſt eſſe centrum grauitatis ſectoris AGEF, cuius radius AE poſitus eſt ſeſqui-alter radij A D. Quod oſtendo.

Tres lineæ A D, A B ſiue A L, & A C continuè ſunt proportio-

nales per Prop. 30. huius. Cùm ergo ſit A C ad A L, vt A L ad A D; punctum C ſimiliter conſtituitur in ſectore A B L O, eiúſve arcu B L O, vt conſtitutum eſt punctum L in ſectore A H D K, eiúſque arcu H D K. Sed C eſt centrum grauitatis arcûs B L O per Coroll. 3. Ergo L eſt etiam centrum grauitatis arcûs H D K per Axio. 6. Lib. 1. Æquipond Archimedis.

Corollarium 6.

Ex eo verò quòd quilibet arcus centro A Quadratricis deſcriptus eámque ſecans, qualis eſt arcus B L O, ſuæ centrum grauitatis in ipſo Quadratricis vertice C nanciſcatur (ecce nouam è Quadratricis theſauro depromptam pretij non exigui gemmam) conficitur planam ipſam ſuperficiem ſiue Lunulam B L O C arcu circulari B L O, & Quadratricis arcu BCO circumſcriptam, illud ipſum centrum C nanciſci grauitatis ſuæ.

Hanc Propoſitionem haud ægrè admiſſuri ſunt, qui quantitatem ex indiuiſibilibus conflari ſibi perſuadent. Conſtaret ſcilicet Lunula illa arcubus innumeris centro A deſcriptis: quorum omnium vnicum eſt grauitatis centrum C, & vnicum perpendiculum ad Axem in puncto C rectum. Neque verò multò ægriùs eandem ſunt admiſſuri, qui ex ſaniore Philoſophiâ Quantitatis ex Indiuiſibilibus compoſitionem illam reiiciunt. Norunt quippe hanc per indiuiſibilia argumentandi methodum, etſi per ſe ſola ad aſſentiendum minùs euidenter cogat intellectum; reduci tamen poſſe ad vera, & à Geometris vſurpari ſolita Principia operâ licèt paulò longiore; cui maximo cum compendio parcitur, vbi per indiuiſibilia agi poſſe conſtiterit: eá ſiquidem methodus, ſi minùs Propoſitum colligit, eſt tamen ſignum certiſſimum, & character manifeſtus veritatis demonſtrandæ: quod ad aſſenſum ſufficit, vt hîc ſufficere mihi concedi velim, vbi obiter tantùm hæc Corollaria obſeruanda ſuſcepi. Vnum tamen addo maioris expoſitionis gratiâ.

Memini in mentem veniat dubitare, quin cuiuſuis circularis ſuperficiei centrum grauitatis ſit ipſum circuli centrum: cuius euidentiæ Argumentum ex indiuiſibilium methodo facilè poteſt explicari; ſi nimirum eius omnes diametri attendantur centrum idem cum circulari ipſâ ſuperficie poſſidere, omnes ſiquidem in eo bifariam ſecantur. Sed aptiùs idem iuxta eadem indiuiſibilium Principia concipies: ſi attendas circulos numero infinitos ex eodem propoſiti circuli centro intra ipſum deſcribi: quorum omnium peripheriæ idem eſt centrum grauitatis; atque adeò totius areæ ipſius circularis, quæ ex huiuſmodi

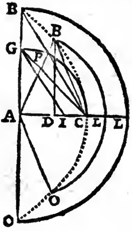
di peripheriis numero infinitis conſtare iuxta indiuiſibilium methodum ſupponitur. Quòd ſi attendatur orbicularis plana ſuperficies, ſiue corona inter duos concentricos circulos intercepta; non aliud quàm circulus ipſe totus centrum obtinebit grauitatis propter eandem rationem. At huius Lunulæ B L O C cum integro circulo B L O par eſt omnino ratio: omnes enim arcus centro A intra hanc lunulam deſcripti, C Quadratricem ſecantes vtrimque, centrum grauitatis in Quadratricis vertice C obtinent. Ergo ipſa ſuperficies lunaris BLOC iuxta indiuiſibilia idem ſibi vendicat grauitatis centrum C: Nec aliud ab illo foret grauitatis centrum ſuperficiei, quàm duo arcus centro A deſcripti, & ad Quadratricem terminati interciperent, quemadmodum in totâ circulari coronâ contingere paulò antè declaratum eſt.

Cæterùm hic nec mirari, nec moueri adeò quiſquam debet, quòd ex falsâ quantitatis ex indiuiſibilibus compoſitione ſuppoſitâ, veritas colligatur Geometricæ Propoſitionis; tum quia, vt ſuperiùs monui, non per ſe, ſed veluti ex charactere, ſignóque certiſſimo Propoſitionis huiuſmodi veritas elicitur ope indiuiſibilium, reducíque poteſt ad methodum verè Geometricam per illam inita argumentatio: tum quia vt hîc, ita non raró aliàs ex falsâ ſuppoſitione veram concluſionem colligere nouit Geometria. Quis in dubium vocauit aliquando Archimedis ratiocinationes, quibus per Libram, Parabolam in Quadratum conuertit? Quis non miratur, & amplectitur inaudita Theoremata, quę Lalouera noſter tum in Elementis Tetragoniſmicis, tum præſertim in Promotâ veterum Geometriâ Archimedem ſecutus adhibitis Libræ Principiis demonſtrauit? An non tam ambo Librâ vtuntur omninò falsâ, dum ei appenſa grauia ad grauium centrum ferri ſupponunt per lineas ad Libræ iugum perpendiculares, atque adeò inter ſe parallelas, quas tamen in centro concurrere neceſſe eſt? Sed hæc obiter de hac indiuiſibilium methodo ex huius Corollarij occaſione dicta ſunto.

Corollarium 7.

Si centro A Quadratricis circulus deſcribatur Quadratricem ſecans in B, & O; eiúſque Axem in L: ex demonſtratis patet centrum grauitatis ſectoris A B L O haberi in puncto I Axis; ſi ſagitta A C ita diuidatur in I, vt A C ſeſqui-altera ſit rectæ A I. Hoc verò ſtatuto Aſſero tertiam partem Quadrati, quod poteſt ſemidiameter A L, ita ſe habere ad ſectorem A B L, vt ſe habet A I ad Applicatam B D, ſiue ad ſinum rectum arcus B L, ſiue is fuerit maior, aut minor Qua-

drante circuli, aut ipſi æqualis: quo in caſu Applicata erit B A ſinus totus, punctúmque D cum centro A coaleſcet.

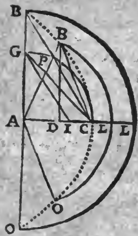


Aſſertionis huius demonſtratio hac eget præparatione. Centro A per Quadratricis verticem C circulus deſcribatur ſecans in G Applicatam primariam, quæ ſcilicet eſt ad Axem in centro A perpendicularis. Tum ducantur rectæ G I, G C, B C. Quibus poſitis patet triangulum A G I eſſe per Prop. 1. Lib. 6. Elem. duas tertias partes trianguli A G C. Quod cùm ſit, ſemiſſis Quadrati ſemidiametri A C, erit triangulum A G C, pars tertia Quadrati huius. His ita paratis Propoſitum colligo in hunc modum.

Triangulum A G I ita eſt ad triangulum A B C; vt illius altitudo A I ad huius altitudinem B D; cùm illius baſis A G ſit huius baſi A C æqualis. Sed per Coroll. 2. Prop. 50. huius, triangulum A B C eſt ſectori A C P (cùm angulus B A C ſectoris rectus eſt, P congruit puncto G) æquale. Ergo triangulum A G I ita ſe habet ad ſectorem A C P; vt A I ad B D. Sed triangulum A G I eſt tertia pars Quadrati ſemidiametri A C. Ergo ita eſt A I ad B D; vt tertia pars Quadrati ſemidiametri A C ad ſectorem A C P. Iam, cùm ita ſit A C ad A L, vt eſt rurſus A C ad A L; erit ſector A C P ſuper primam A C ad ſectorem ſimilem A L B ſuper ſecundam A L; vt eſt Quadratum ſuper tertiam A C ad Quadratum ſuper quartam A L per Prop. 22. Lib. 6. Elem. & per Prop. 15. Lib. 5. Elem. vt tertia pars Quadrati tertiæ A C ad tertiam partem Quadrati quartæ A L. Et permutando. Ita erit ſector A C P ad tertiam partem Quadrati ſemidiametri A C; vt ſector A L B eſt ad tertiam partem Quadrati ſemidiametri A L. Et inuertendo. Ita erit tertia pars Quadrati ſemidiametri A C ad ſectorem A C P; vt tertia pars Quadrati ſemidiametri A L ad ſectorem A L B. Sed vt tertia pars Quadrati ſemidiametri A C ad ſectorem A C P; ita eſt oſtenſa recta A I ad rectam B D. Ergo ita etiam eſt tertia pars Quadrati ſemidiametri A L ad ſectorem A L B; vt eſt recta A I ad rectam B D ſiue ſignum rectum arcûs B L, aut anguli B A L. Quod erat demonſtrandum. Eadem planè futura eſt demonſtratio cùm continget ſectorem A L B eſſe circuli Quadrantem, mutatis tantùm Characteribus G in P, & A in D, aut potius vtriſque eidem puncto affixis.

Scholium

Scholium 1.



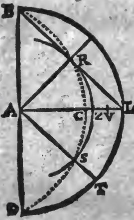
Quæ proximo Corollario expoſui, meditanti mihi, in mentem venit non ſine voluptate ſingulari Propoſitio Viceſima & vltima Lib. 3. Elementorum Tetragoniſmicorum inſignis Geometræ Lalouerae noſtri; nec minore fortaſſe ipſe, aut quis alius Lector capietur, vbi aduertet quàm alienis à ſe inuicem Principiis, methodiſque eandem veritatem Ambo collegerimus: vnde hiſce noſtris Geometricis exercitationibus non parum fidei, authoritatiſque comparetur. Ecce vt ſonet citata Propoſitio ad ſchema meum appoſitè.

Vt ſe habet recta A I, centrum circuli A, & centrum grauitatis I ſemicirculi A B L O connectens, ad ſemidiametrum A B; ita tertia pars Quadrati; quod poteſt diameter B O eiuſdem circuli, eſt ad eiuſdem circuli aream. Cùm ergo eadem ſit proportio rationis Quadrati, quod poteſt diameter BO, ad totum circulum; & rationis quartæ partis illius Quadrati ad quartam partem areæ totius circuli hoc eſt, Quadrati, quod poteſt ſemidiameter A B, ad circuli Quadrantem, A B L (ſicut enim Quadratum ſemidiametri A B eſt ſubquadruplum Quadrati diametri BO; ita ſector ſiue Quadrans A B L eſt ſubquadruplus areæ totius circuli) ſit item per Prop. 15. Lib. 5. Elem. eadem proportio rationis tertiæ partis Quadrati, quod poteſt ſemidiameter A B, ad areã Quadrantis ABL; & Rationis tertiæ partis Quadrati, quod poteſt tota diameter BO, ad aream totius circuli: conſtat rectam AI ad rectam A B ſemidiametrum circuli, ſiue ſinum totum ita ſe habere; vt ſe habet tertia pars Quadrati ſemidiametri AB ad circuli Quadrantem ABL iuxtà Authoris laudati mentem. Conſtat ergo in hoc ſingulari caſu, in quo ſector A B L eſt Quadrans circuli; & Applicata ad Axem perpendicularis, eſt ſemidiameter, ſiue ſinus totus A B, de quo ſolo diſſeruit clariſſimus Geometra; quàm benè conſentiant aſſertiones noſtræ, licet ea, quam Corollario proximo expoſui, ad ſectores omnes æquè ac ad circuli Quadrantem pertineat.

Scholium 2.

Non ſine voluptate contemplaturum ſpero ſtudioſum Geometram conſonantiam miram; quæ inter ea intercedit, quæ hactenus tum

hac Prop. 66. tum præcedentibus ex eâ deductis Corollariis de centro grauitatis arcuum ſectores conſtituentium expoſui; & inter ea, quæ de eodem centro demonſtrauit acutiſſimus Lalouera, in primis Propoſitione 21. Lib. 5. de Cycloïde; cum præſertim obſeruabit mediis à ſe inuicem tam alienis eandem metam vtrumque noſtrûm fuiſſe aſſecutum: vt propterea conſenſionem hanc paulò planiùs explicare (neq; enim eſt adeò obuia) non abs re videatur. Accedit quòd ex eo non parum certitudinis & euidentiæ Aſſertionibus vtriuſque conciliabitur, & Quadratrici noſtræ non parum commendationis, vtpote quæ non ſolùm antiquæ Helicis Archimedææ primariis facultatibus, vt ex ſuperioribus conſtat, ſit inſignis; ſed nec iis careat, quibus præſtat recentiùs excogitata minor Cycloïdes.



Primò itaque ſi centro A Quadratricis per puncta B & O, in quibus generans diameter à Quadratrice ſecatur deſcribatur ſemicirculus B L O: vertex C Quadratricis erit centrum grauitatis arcûs ſemicircularis B L O vt Corollario 3. & 4. declaratum eſt; & Quadratricis ſagitta A C erit eiuſdem centri grauitatis C diſtantia à centro ipſo A ſemicirculi. En vt hoc iis conſentiat, quæ citatâ Prop. 21. Lib. 5. de Cycloïde aſſeruntur à laudato Authore.

Aſſerit enim centrum grauitatis ſemiperipheriæ B L O diſtare à centro A, vnde deſcripta eſt, duplo termini ſecundi Progreſſionis, quam vocat, *ſubadiuncta*. Mihi igitur incumbit declarare ſagittam A C ipſummet eſſe terminum illum ſecundùm bis ſumptum Progreſſionis *ſubadiunctæ*. Quod conficio, ſi priùs quænam ſit Progreſſio illa tam adiuncta quàm ſubadiuncta, expoſuero iuxta eius ſenſum ad initium Libri 3. de Clycloïde propoſitum. Ait igitur, ſi ineatur quædam progreſſio, cuius primus terminus ſit circuli ſemidiameter, ſecundus verò eiuſdem circuli ſemiperipheria, & iuxta hanc rationem extendatur Progreſſio: ea eſt quæ *Adiuncta* dicitur. Quod ſi eodem ſeruato termino primo, radio ſcilicet circuli, altera Progreſſio inſtituatur, ita vt ſecundus terminus ad primum, nempe ad radium circuli, ita ſe habeat, vt ipſe radius ſe habet ad ſemiperipheriam, & ſic extendatur ad quotcunque terminos Progreſſio: ea eſt, quæ ab ipſo vocari ſolet *ſubadiuncta*. Quibus declaratis, ſi in Paradigmate

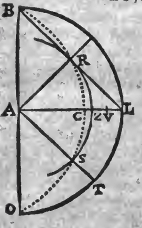
digmate noſtro radius A L ſtatuatur primus terminus, ſecundus autem ſemiperipheria B L O: ea erit ſecundus terminus *Progreſſionis Adiunctæ.* At verò ſi, vt eſt radius A L ad ſemiperipheriam B L O; ita fiat alius terminus ad ipſum radium A L, erit alius ille terminus, terminus *ſubadiunctæ Progreſſionis.* Oſtendendum itaque mihi nunc eſt ſagittam Quadratricis A C eſſe duplum terminum ſecundum ſubadiunctæ Progreſſionis: ſic enim conſtabit eandem eſſe vtriuſque noſtrûm Aſſertionem. Id porrò ſic oſtendo.

Quadratricis ſagitta A C, radius A B, & circuli Quadrans B L ſunt per Prop. 31. huius, continuè proportionales. Ergo Rectangulum ſagittâ A C, & Quadrante B L in rectam conuerſo contentum æquale eſt Quadrato radij A B, ſiue A L. Sed Rectangulo ſagittâ A C, & arcu B L in rectam conuerſo æquale eſt Rectangulum ſub dimidiâ ſagitta A C, & duplo arcu B L, hoc eſt, ſemicirculo B L O contentum per Prop. 14. Lib. 6. Elem. ſic enim ſunt horum duorum Rectangulorum reciproca latera. Ergo Rectangulum hoc dimidiâ A C, & ſemicirculi arcu B L O in rectam conuerſo contentum, eſt etiam Quadrato radij A L æquale. Ergo ita eſt radius A L ad ſemiperipheriam B L O, hoc eſt, primus terminus ad ſecundum *Adiunctæ Progreſſionis*; vt dimidia ſagittæ A C ad ipſum radium A L, hoc eſt, vt terminus ſecundus Progreſſionis ſubadiunctæ ad primum. En igitur vt Quadratricis ſagitta A C dupla ſit termini ſecundi *ſubadiunctæ Progreſſionis*; atque vt in aſſignanda diſtantiâ centri grauitatis ſemiperipheriæ B L O ab ipſo circuli centro A Ambo concurramus viâ licet longiſſimè diuersâ inſiſtentes.

Secundò. Oſtendi Prop. 31. circuli Quadrantem B L, radium A B, ſagittam A C eſſe continuè proportionales. Hoc ipſum Lalouera Propoſitionis eiuſdem 21. Lib. 5. parte ſecundâ demonſtrat è ſuis Principiis è ſtaticâ deductis. Oſtendit enim ſecundum *ſubadiunctæ Progreſſionis* terminum bis ſumptum (quem ita ſumptum æqualem eſſe Quadratricis ſagittæ A C proximè demonſtraui) & radium A B, & arcum B L eſſe continuè proportionales. Quæ maior poſſit in hoc conſonantia deſiderari?

Tertiò. Si centro A per B, vbi radius generans Quadratricem ſecat, Quadrans B P L deſcribatur: tum recta ducatur B L; hæc bifariam ſecatur in R à Quadratrice iuxta Prop. 8. huius, & per Prop. 3. Lib. 3. Elem. iuncta A R perpendicularis eſt ad ipſam chordam B L, eiuſdémque ſemiſſi R L eſt æqualis propter angulos R A L, R L A ſemirectos æquales. Iam ſi centro A per punctum Quadratricis R

arcus deſcribatur R Z S: conſtat per Coroll. 3. Quadratricis verticem C eſſe arcus illius centrum grauitatis: quo habito licebit per Coroll. 4. centrum grauitatis, cuiuſuis arcûs arcui R Z S ſimilis, hoc eſt, circuli cuiuſcunque Quadrantis (eſt enim R Z S circuli Quadrans) centrum grauitatis definire; arcûs, verbi gratia, P L T: ſi nimirum fiat vt radius A Z ad radium A L, ita ſagitta A C ad A V: erit enim V ad arcum P L T ſimiliter poſitum, vt poſitum eſt C ad arcum R Z S: Quare iuxta Axioma 6. Lib. 1. Æquipond. Archim. vt C centrum eſt grauitatis arcûs R Z S, ita V centrum eſt grauitatis arcûs P L T.



His planè conſentiunt, quæ à Lalouera Coroll. 1. Propoſitionis 21. Lib. 5. aſſeruntur. Ait enim. Si fiat vt latus Quadrati ad eius diametrum ita ſecundus terminus bis ſumptus ſubadiunctæ Progreſſionis ad rectam aliam lineam: erit hæc recta à centro ipſo circuli diſtantia centri grauitatis arcûs, quem abſcindit recta circulo Applicata eâ conditione, vt pars radij ad Applicatam perpendicularis inter centrum & ipſam Applicatam interiecta, ita ſe habeat ad totum radium, vt latus Quadrati ad eius diametrum. Atqui caſus hic alius non eſt, quàm qui eſt à me proximè expoſitus. Ecce enim in meo ſchemate; Applicata B L abſcindens arcum B P L, ita abſcindit in R radium A P ad ipſam perpendicularem, vt eius pars A R ita ſe habeat ad totum radium A P, ſiue A L; vt latus Quadrati ad eius diametrum: eſt enim A R latus Quadrati, cuius A L eſt diameter, vt patet, cùm ſint R A, R L æquales. Vt autem A R ad A P, ſiue vt radius A Z arcûs R Z S, ad radium A L arcûs ſimilis P L T; ita factus eſt A C ſecundus ſubadiunctæ Progreſſionis terminus bis ſumptus ad A V diſtantiam centri grauitatis V arcûs P L T à centro ipſo A circuli. Patet ergo in hoc ſingulari caſu; qui, vt ex dictis colligitur, pertinet tantùm ad circuli Quadrantem, idem obtineri centrum V grauitatis arcûs P L T tum Laloueræ, tum meâ ex Quadratrice petitâ methodo. Arcûs verò cuiuſuis dati centrum grauitatis inueſtigandi rationem vniuerſalem, quam Coroll. 4. expoſui, cum idem præſtandi methodo, quam laudatus Author Coroll. 1. Propoſitionis 21. Lib. 5. peti poſſe monet, cum id ſatis planum & expeditum mihi non videatur, conferre pluribus non immoror. Id ego quidem iure videar pronuncia-

re

re vix aliam poſſe huiuſmodi centra grauitatis arcuum quorumcunque determinandi viam iniri poſſe vel breuiorem, vel tutiorem; quàm proximè citato Coroll. à me explanatam.

Quartò. Non mirum ſi hæc, pluráque alia, quæ illo inſigni ſuo in opere laudatus Author de Cycloïde commentatus eſt, Quadratrici quoquo modo conuenire comperiantur. Sic enim habeto, quòd quemadmodum Quadratricis generatio Helicis Archimedææ ortui affinis ſuperis eſt oſtenſa; & ex eâ affinitate nec paucas nec ignobiles Helicis facultates ſibi vendicare Quadratrix demonſtrata eſt: ita etiam eandē propter eandē generationis cum Cycloïde affinitatē non paucis gaudere huius ornamentis. En paucis in quo eluceat dicta illa affinitas.

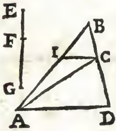


Si Quadratrix B D C; per cuius punctum D quodlibet, omnium inſtar, ſiue illud citra B (vbi diameter generans Quadratricem ſecat) ſiue vltra B ſumatur; tum radius A D, tum recta D E Axi perpendicularis ducantur. Deinde centro A per Quadratricis verticem C circulus deſcribatur radium A D ſecans in I: per quod agatur recta I O ad Axem A C perpendicularis occurrens in F rectæ D E. Dico punctum F eſſe ad Cycloïdem minorem, cuius circulus genitor eſt C I. Atque ita ſi plura huiuſmodi puncta F reperiantur, per ea deducetur Cycloïdes, tranſibítque per C & B, erítque eius pars citra B ad A conuerſa, ab eodem auerſa vltra B. Quod oſtendo. Per D ducatur D G ad Axem recta: Ea eſt per prop. 36. huius, arcui I C æqualis. At F O, quæ per I ducitur parallela rectæ D G, ipſi D G eſt æqualis. Ergo F O eſt æqualis arcui I C. Ergo ex generatione Cycloïdis minoris punctum F eſt ad Cycloïdem genitam ex circulo centro A per Quadratricis verticem C deſcripto. Vnde patet radium A D, & rectam E D, ex quibus Quadratricis generatio abſoluitur, perinde concurrere ad Cycloïdis huius generationem vnicâ tantùm ductâ de nouo rectâ lineâ F O per punctum I, in quo radius A D genitorem circulum ſecat, rectæ D G parallela. Ex his cernis quantum haſce duas inter curuas lineas interſit commercium: vnde colligas quàm multæ vtrique communes facultates ex eo poſſint deriuari: quas ſi pluribus proſequar; næ ego longiùs quàm par ſit, à præſtitutis finibus digrediar. Vnde igitur declinauit, eò curſum reſtituamus.

PROPOSITIO LXVII. *Problema.*

TRibus lineis A B, A C, A D ſeſe in A ſecantibus, per aliquod in earum aliquâ datum punctum lineam tranſuerſam, & ad extremas A B, A D terminatam ducere: quæ à media ſecetur iuxta datam quamlibet rationem.

Constructio prior.



Data ſit ratio E F ad F G: datúmque primò punctum B in lineâ A B per quod duci debeat linea tranſuerſa B D, quæ à media A C ita ſecetur in C; velut E G ſecta eſt in F: Secetur A B in I; vt in F ſecta E G: Tum per punctum I ducatur I C parallela lineæ A D, ſecans in C lineam mediam A C. Denique ex puncto dato B per C inuentum, ducatur recta B D. Dico B D ita ſecari in C; quemadmodum data linea E G ſecta eſt in F.

Demonſtratio.

Cùm linea I C parallela ſit rectæ A D in Triangulo A B D: Ita eſt per Prop. 2. Lib. 6. Elem. B C ad C D; vt eſt B I ad I A. Sed B I ad I A ita eſt, vt G F ad F E: ſiue inuertendo, A I ad I B; vt E F, ad F G. Ducta eſt igitur recta B D, ita ſecta in C; vt E G ſecta eſt in F, vt primo loco quærebatur.

Conſtructio poſterior.

Datum deinde in media lineâ A C ſit punctum C: per quod duci debeat linea recta ad extremas A B, A D terminata, quæ in C ita ſecetur; vt E G ſecta eſt in F. Per punctum C ducatur recta C I parallela lineæ A D: Tum fiat A I ad I B; vt E F eſt ad F G: ac demum ex B per C agatur recta B D. Erit D C ad C B, vt E F eſt ad F G.

Demonſtratio.

Eſt D C ad C B, vt A I eſt ad I B. Sed A I ad I B ex conſtructione ita eſt; vt E F ad F G. Ergo vt eſt E F ad F G; ita eſt D C ad C B. Dato ergo puncto C in mediâ trium linearum ducta eſt recta B D ita diuiſa in C; vt in F diuiſa eſt recta E G. Quare tribus lineis &c. Quod faciendum erat.

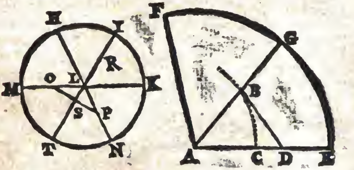
PRO

Digitized by Google

PROPOSITIO LXVIII. *Theorema.*

Circuli cuiuſuis dato quocunque ſectore: eius centrum grauitatis reperire eſt ope Quadratricis.

Præparatio, & Demonſtratio.



Obſeruas fortaſſe cur hæc Propoſitio, quæ Problematis naturam ſapit, in modum tamen Theorematis enuncietur. Quia ſcilicet cùm linea Quadratricem tangens ad Problematis ſolutionem neceſſaria ſit, cuius ducendæ, etſi aliqua, non tamen abſoluta ars nobis innoteſcit: minùs aptè Problema propoſitum meritò cenſeretur; cui deinceps minùs benè ſatisfieret. Dico itaque ope Quadratricis definiri poſſe grauitatis centrum in dato cuiuſuis circuli ſectore quocunque: qualis eſt ſector H L K circuli H I K T. Sit enim Quadratrix, cuius centrum ex A, & Axis A C; ad cuius extremum A, ſiue Quadratricis centrum fiat angulus F A E æqualis angulo H L K ſectoris dati: vtroque autem hoc angulo bifariam diuiſo ductis lineis L I, A G; hæc Quadratricem ſecet in B: à quo puncto duci poteſt (quid enim obſtat?) linea Quadratricem tangens B D. Quòd ſi bifariam A D ſecetur; partiúmque altera à D vſque ad E ſuper Axe reponatur; ac ſemidiametro A E circulus deſcribatur rectæ A F occurrens in F; ac ſectorem A F G E ſectori dato L H I K ſimilem conſtituens: erit conſtituti ſectoris centrum grauitatis punctum B Quadratricis per Prop. 66. ſi igitur circulus H I K T æqualis fuerit circulo F G E; radio Quadratricis A B ex centro L circuli H I K ſuper ſemidiametro L I repoſito, erit definitum grauitatis centrum dati ſectoris. At ſi circulus F G F circulo H I K fuerit inæqualis, vt hîc; ita ſecetur in R ſe-

midia

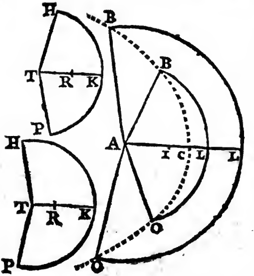
midiameter L I; vt ſemidiameter A G ſecta eſt in B: erit R grauitatis centrum dati ſectoris L H I K; ſimiles enim figuræ, cuiuſmodi ſunt hi duo ſectores, grauitatis centrum nanciſcuntur ſimiliter poſitum per Axioma 6. lib. 1. Archim. de æquipond. conſtat autem ſimiliter poſita eſſe duo hæc puncta R & B ſuis in ſectoribus. Cùm igitur quocunque circulo dato liceat punctum R eodem modo definire, conſtat cuiuſcunque ſectoris centrum grauitatis poſſe definiri ac determinari. Ergo. Circuli cuiuſuis dato &c. Quod erat probandum.

Scholium.

Si ſector proponatur, cuius angulus extrorſum vergat; fuerit ſcilicet ſector ſemicirculo maior, qualis eſt hîc ſector L H T K: faciliùs habebitur eius centrum, ſi centrum reperiatur ſectoris L H I K deinceps poſiti ſiue cum ipſo circulum complentis. Inuento enim centro R minoris huius ſectoris: ſi fiat vt ſector L H T K, ad ſectorem LHIK; ita R L, ad L S: erit per Prop. 8. Lib. 1. Archim. Æquipond. punctum S grauitatis centrum ſectoris L H T K. Eſt enim centrum L circuli, ipſius etiam circuli centrum grauitatis cùm ergo duo ſimul ſectores circulum totum compleant: erunt puncta ſingulorum S, R, à centro communi L amborum diſſita iuxta reciprocam rationem ipſorum ſectorum, eorundem centra grauitatis. Quomodo autem habeatur nota ratio ſectoris L H T K, ad ſectorem L H I K; vt fiat R L ad L S; vt ſector L H T K ad ſectorem L H I K: conſtat ex Quadratrice; eius enim ope habentur rectæ lineæ, quæ ita ſe habent ad inuicem; vt arcus H T K & H I K, ſiue anguli illis arcubus ad centrum L inſiſtentes, aut etiam ſectores.

Verùm, idem centrum S faciliùs obtineri poſſe videtur: ſi productâ ſemidiametro I L, bifariam ſecetur ſector L H T K tum vnius è factis ſectoribus, vt L H M T, centrum O reperiatur: quod in rectam L N ad P reponatur, ac demum hæc duo centra O & P rectâ lineâ O P connectantur; quæ rectam L T ſecet in S. Erit enim S centrum ſectoris L H T K ſemicirculo maioris. Centrum enim totius ſectoris in eâdem rectâ lineâ reperitur, in quâ duo centra O & P reperiuntur per Prop. 8. Lib. 1. Æquip. Cum ergo idem totius ſectoris centrum reperiatur etiam in rectâ L T eundem ſectorem biſecante: erit neceſſariò communis ſectio S linearum O P, L T, centrum totius ſectoris L H T K. Quæ induſtria in ſequentibus poterit etiam ſæpius obſeruari.

Verùm idem centrum grauitatis ſectoris cuiuſcunque ſiue minoris ſiue maioris ſemicirculo, aut ei æqualis aſſignare licebit methodo longè



gè faciliore, quàm exhibent deducta ex Propoſitione *66.* Corollaria. Sit enim ſector quicunque H T P minor, maiórve ſemicirculo (vtrumque enim iiſdem characteribus deſigno) qui bifariam diuidatur rectâ T K, bifariam ſecante tam arcum H K P, quàm angulum H T P. Conſtat in primis centrum grauitatis ſectoris huius in rectâ hac T K neceſſariò reperiri. Illud porrò ſic definietur. Deſcripta habeatur Quadratrix aliqua, cuius centrum ſit A, vertex C; ſagitta autem A C ita ſecetur in I, vt tota A C ſeſqui-altera ſit partis A I, ſiue (quod idem eſt) fiat C I tertia pars totius A C. Tum fiat angulus C A B æqualis angulo K T H, nempe ſemiſſi anguli ſectoris; recta autem A B Quadratrici occurrat in B. Denique vt A B eſt ad A I; ita fiat T K ad T R. Dico punctum R eſſe centrum dati ſectoris.

Nam ſi centro A per B circulus deſcribatur alterum Quadratricis cornu ſecans in O, ducatúrque radius A O: ſector B A O ſimilis eſt ſectori dato H T P. Ergo per Axioma *6.* Lib. 1. Archim. de Æquip. centrum grauitatis vtriuſque huius ſectoris ſitum in vtroque ſortitur ſimilem. Cùm ergo punctum I citato loco oſtenſum ſit centrum eſſe ſectoris A B L O; punctum etiam R centrum erit grauitatis ſectoris T H K P. Cùm enim ita ſit ex conſtructione radius T K ſectorem bifariam diuidens, ad T R; vt A B, ſiue A L bifariam etiam ſectorem alterum diuidens, ad A I: conſtat puncta I & R ſimiliter in ſectoribus ſuis eſſe conſtituta; atque adeò ex citato Axiomate centrum grauitatis ſectoris T H K P occupare definitum punctum R.

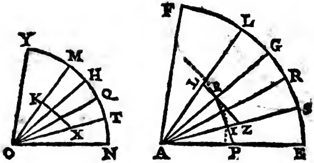
Hoc eodem modo licebit centrum grauitatis arcûs H K P definire: ſi nimirum vt eſt A B, ſiue A L ad A C; ita fiat T K ad aliam ſuper T K à centro T reponendam. Ratio clara eſt ex citatis nuper Corollariis Propoſitionis *66.*

Digitized by Google

PROPOSITIO LXIX. *Problema.*

Datis duobus cuiuſuis circuli ſectoribus ſibi adiacentibus datóque alterutrius centro: centrum tum alterius, tum ex vtroque compoſiti ſectoris reperire, aut dato ex vtroque conflati ſectoris centro, centra vtriuſque determinare.

Conſtructio.



Dati ſint ſectores O Y M Q, O Q T N ſibi adhærentes, qui biſariam diuidantur ductis radiis O M, O T: totus etiam ſector O Y N biſecetur radio ducto O H. Tũ ad centrum A cuiuſpiam Quadratricis, eiúſque Axem A E fiat angulus F A E æqualis angulo Y O N; qui in angulos diſtribuatur ſingulos ſingulis æquales; in quos diſtributus eſt idem angulus Y O N, ductis radiis A L, A G &c. Quadratricem ſecantibus ergo poterit ſector reperiri per Prop. 68. cuius centrum ſit punctum B Quadratricis, in quo eam ſecat radius A G, bifariam ſecans angulum F A E. Sit itaque B grauitatis centrum ſectoris A F G E ex duobus ſectoribus A R S E, A R L E, qui ſimiles ſunt duobus ſectoribus datis O Q T N, O Q M Y, compoſiti. ducatur per I, in quo radius A S angulum R A E bifariam diuidens, Quadratricem interſecat, linea B I P. Tum, per idem punctum B ducatur linea V B Z ad duos radios A L, A S terminata, quæ ita ſecatur in B per Prop. 67. vt B P ſecatur in I. Deniquе lineæ O M, O T ſecentur in K & X ſimiliter; vt radij A L, A S ſecantur in V & Z. Erit K centrum grauitatis ſectoris O Y M Q, & X centrum grauitatis ſectoris alterius O Q T N.

Demonſtratio.

Certum eſt per Axioma 6. Lib. 1. de æquip. Archim. puncta K & X centra eſſe grauitatis ſectorum O Q M Y, O Q T N ſi ſectorum

ſimilium

ſimilium A R L F, A R S E centra fuerint V & Z. Hoc autem ſic oſtenditur. Conſtat primò centra illa reperiri in radiis A L, A S biſecantibus ſectores A R L F, A R S E: cùm enim radij illi dictos ſectores bifariam diuidant, non niſi per centrum agi poſſunt. Conſtat item per Prop. 8. Lib. 1. de Æquip. Archim. lineam connectentem centra grauitatis duorum ſectorum A R L F, A R S E duci per centrum grauitatis B ſectoris A F G E ex duobus illis conflati. Reſtat itaque probandum lineam V B Z, quæ ita in B ſecatur; vt B I P ſecatur in I (quæ quidem vnica eſſe poteſt per Prop. 62.) rectè definire ſectorum illorum centra. Quod ita oſtenditur. Vt ſe habet ſector A R L F ad ſectorem A R S E, vel illius ſemiſſis, ſector A L R ad huius ſemiſſem, ſectorem A S E; ita ſe habet per Prop. 48. reciprocè diſtantia centri ſectoris A R S E à centro communi B ſectoris A F G E ex duobus ſectoribus illis conflati, ad diſtantiam ab eodem centro communi B, centri ſectoris A R L F. Sed ita eſt Z B ad B V; vt ſector A L R (qui ſemiſſis eſt ſectoris A R L F) ſiue ei æqualis A G R S ad ſectorem A S E, ſemiſſem ſectoris A R S E. Ergo V eſt centrum ſectoris A R L F; & Z eſt centrum ſectoris A R S E. Probatur Aſſumptum. Ex conſtructione ita eſt Z B ad B V; vt B I eſt ad I P. Sed per Prop. 64. vt B I eſt ad I P; ita eſt angulus G A S ad angulum S A E: & vt angulus ille G A S ad angulum S A E; ita eſt ſector A G R S ad ſectorem A S E. Ergo ita eſt Z B ad B V; vt ſector A F L R ad ſectorem A S R E. Quare V eſt illius ſectoris grauitatis contrum; centrum verò huius eſt Z. Quod cùm ita ſit, etiam K centrum grauitatis erit ſectoris O Q M Y; & X centrum ſectoris O Q T N. Ergo datis duobus cuiuſuis &c. centra grauitatis reperta ſuut. Quod erat faciendum.

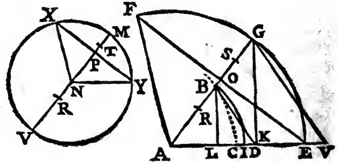
Scholium.

Eâdem ferè methodo Problematis huius ſolutio ope Quadratricis colligeretur: ſi primo loco non centrum B ſectoris ex duobus datis ſectoribus conflati inueſtigaretur, ſed alterutrius eorundem datorum ſectorum: ex eo ſiquidem ſtatuto centrum tum totius ex duobus compoſiti ſectoris in lineâ A G, tum alterius in lineâ ipſum biſecante definiretur adhibitâ lineâ B P; quæ in I ſecatur in ratione, quam ſectores dati inter ſe obſeruant. Porrò aduerte ſectorem, cuius centrum inquiritur, Axi AE adiacere debere, Axémque eſſe vnum ſectoris latus; neque enim aliter; vt conſtat ex Prop. antecedente, & aliis ſuperioribus, poteſt determinari ſemidiameter ſectoris, cum in ſolo Axe à lineâ Quadratricem tangente determinetur.

PROPOSITIO LXX. *Problema.*

SEgmenti cuiuſcunque ſiue minoris, ſiue maioris ſemicirculo, centrum grauitatis inueſtigare.

Conſtructio prioris partis.



Datum ſit ſegmentum quoddam X M Y abſciſſum ex ſectore N X M Y: qui primò ſit ſemicirculo minor. In circulo, cuius centrum ſit A idem cum Quadratricis centro, reperiatur per Prop. 68. ſector A F G E ſimilis ſectori N X M Y, & cuius grauitatis centrum ſit, in quo puncto radius A G Quadratricem interſecat. Tum ex eodem puncto B ducatur B D Quadratricem tangens, & B L ad Axem A E perpendicularis. Deinde recta A O perpendicularis ad chordam F E, quæ ſegmentum abſcindit, ita ſecetur in R; vt A O ſit ſeſqui-altera rectæ A R. Ac denique fiat vt D L ad L A; ita R B ad B S. Dico S eſſe ſegmenti F G E centrum grauitatis.

Demonſtratio.

Centro A deſcribatur arcus B I: & à puncto G ducatur tum G K ad Axem perpendicularis, tum G V rectæ B D, quæ Quadratricem tangit, parallela. Conſtat primò per Prop. 52. ſectorem A B I æqualem eſſe triangulo A B D. Hinc ſecundò conſtat ſectorem A G E triangulo A G V æqualem eſſe. Nam tam ſector A G E ſectori A B I ſimilis eſt, quàm triangulum A G V triangulo A B D ſimile; eò quòd G V ducta ſit lineæ B D parallela. Ergo eandem habent inter ſe rationem Triangulum A B D, & ſector A B I quorum eſt idem latus A B; quam habent per Prop. 22. Lib. 6. Elem. triangulum A G V, & ſector A G E quorum eſt idem latus A G homologum lateri A B; quorum

vtrumque

Digitized by Google

vtrumque duobus lateribus æquiualet: ſunt enim & triangulorum, & ſectorum ſimilium latera. Hinc deinceps tertiò ſequitur, vt tam triangulum G K V ſemiſegmento G O E, quàm triangulum B L D ſemiſegmento B L I ſit æquale: ſi nimirum ex æqualibus inter ſe ſectoribus & triangulis æqualia ſiue communia demantur triangula AGK, ABL. Hæc cùm ita ſint: vt ſe habet triangulum B L D ad triangulum BLA; ita ſe habet ſemiſegmentum GOE triangulo GKV oſtenſum æquale, ad triãgulum GKA, ſiue ad huic æquale triangulum AOE. Ergo etiam per Prop.15.Lib.5.Elem.ita totum ſegmentum FGE ad totum triangulum A F E. Sed vt triangulum B L D ad triangulum B L A; ita eſt baſis L D ad baſim L A. Ergo vt L D eſt ad L A; ita eſt ſegmentum F G E ad triangulum F A E. Sed ex conſtructione vt L D eſt ad L A; ita ſtatuta eſt R B ad B S. Ergo vt ſegmentum F G E ad triangulum F A E; ita eſt reciprocè R B diſtantia centri R trianguli F A E à centro B totius ſectoris A F G E, ad B S diſtantiam puncti S ab eodem centro B. Ergo per Prop.6. Lib.1. Æquip. Archim. vel Prop.48. huius. S eſt centrum grauitatis ſegmenti F G E. Quod cùm ita ſit, ſi cuiuſlibet ſegmenti ſegmento F G E ſimilis ſagitta, ſiue linea ſubtenſam bifariam, & ad angulos rectos ſecans (qualis eſt P M) ita diuidatur in T, vt OG diuiſa eſt in S: erit T centrum grauitatis dati ſegmenti XMY per Axioma 6. Lib.1. Æquip. Archim. Itaque ope Quadratricis aſſignatum eſt grauitatis centrum ſegmenti ſemicirculo minoris: quæ eſt prior huius Propoſitionis pars.

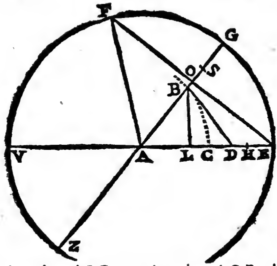
Conſtructio poſterioris partis Propoſitionis.

Datum iam ſit ſegmentum F Z E ſemicirculo maius rectâ lineâ FE à circulo abſciſſum, cuius centrum grauitatis quæritur. Supponatur in primis repertum eſſe centrum S ſegmenti F G E ſemicirculo minoris: ad cuius inueſtigationem ducta fuit recta B D Quadratricem tangens in B; vnde demiſſa eſt ad Axem perpendicularis B L. Tum fiat vt angulus GAE ad angulum G A V, ſiue vt arcus G E ad arcum G V, qui ſemicirculum complet (quod ope Quadratricis abſolui facilè poteſt, vt Prop.2. & 6. conſtat;) ita A D ad aliam lineam, cui ponatur æqualis L H. Denique fiat vt A H ad L D; ita A S (quæ eſt diſtantia centri S ſegmenti F G E à centro circuli A) ad A Q. Erit Q centrum grauitatis ſegmenti propoſiti F Z E ſemicirculo maioris.

Demonſtratio.

Conſtat primò arcum G F V æqualem eſſe arcui F V Z, ſiue angulum, aut ſectorem G A V eſſe angulo, aut ſectori F A Z æqualem. Eſt enim angulus G A E æqualis angulo V A Z ad verticem:

Digitized by Google



ſed G A F æqualis eſt angulo G A E. Quare ſi addatur communis angulus F A V: æquales fient anguli G A V, F A Z, ſiue ſectores, quorum illi ſunt anguli. Conſtat ſecundò ex prioris partis probatione ita eſſe triangulum A B L, ad triangulum L B D; vt eſt triangulum A O E ad ſemiſegmentum O G E. Ergo componendo. Ita eſt A B L triangulum ad triangulum A B D; vt triangulum A O E ad ſectorem A G E. Ergo etiam ita erit A L ad A D; (ſunt enim triangula A B L, A B D eiuſdem altitudinis) vt triangulum A O E ad ſectorem A G E (ſiue, duplis aſſumptis, vt triangulum A F E ad ſectorem A F G E:) ſed vt ſector A G E ad ſectorem A V F G; ita poſita eſt A D ad L H. Ex æquo igitur ita eſt A L ad L H, vt triangulum A O E ad ſectorem A V F G, ſiue ad ſectorem huic æqualem A F V Z; ſiue, vt triangulum AFE trianguli A O E duplum, ad ſectorem AFZE ſectoris AFVZ duplum. Ergo componendo. Ita eſt AL ad AH; vt triangulum AFE ad ſegmentum F Z E. Et inuertendo. Ita eſt A H ad A L, vt ſegmentum F Z F ad triangulum A F E. Eſt autem vt A L ad L D; ita triangulum A F E ad ſegmentum F G E. Ergo ex æquo. Ita erit A H ad L D; vt ſegmentum F Z E ad ſegmentum F G E. Quæ cùm ita ſint. Cùm ex conſtructione ita ſit S A ad A Q; vt eſt A H ad L D; ita erit S A ad A Q, vt reciprocè eſt ſegmentum F Z E ad ſegmentum F G E. Cùm ergo A centrum circuli ſit centrum commune duorum ſimul ſegmentorum: ſit autem S centrum ſegmenti F G E: cuius diſtantia S A à centro communi A ita ſe habet ad A Q, vt viciſſim ſegmentum F Z E ſe habet ad ſegmentum F G E: erit per Prop. 6. Lib. 1. de Æquip. Archim. vel per Prop. 48. ſuperiorẽ, punctum Q grauitatis centrum ſegmenti FZE ſemicirculo maioris. Hoc autem centro Q in vno ſemel ſegmento definito: omnium ſimilium ſegmentorum centra definiuntur; ſunt enim in iis omnibus centra ſimiliter poſita

per

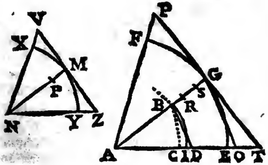
Digitized by Google

per Axioma 6. Lib. 1. de Æquipond. Quare in altero circulo, cuius ſegmenti X M Y ſemicirculo minoris, ſimiliſque ſegmento F G E, centrum T determinatum eſt; reperietur centrum ſegmenti X V Y deinceps poſiti: ſi fiat, vt S A ad A Q; ita T N ad N R: erit ſiquidem R centrum grauitatis ſegmenti X V Y ſemicirculo maioris. Itaque ſiue ſegmentum fuerit ſemicirculo minus, ſiue maius: eius centrum grauitatis inueſtigatum eſt. Quod faciendum erat.

PROPOSITIO LXXI. *Problema.*

SI triangulo Iſoſceli N V Z inſcriptus fuerit circuli ſector X M Y; vt fiant triangula duo mixta M V X, M Z Y: amborum centrum grauitatis aſſignare.

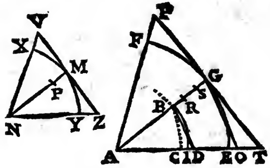
Conſtructio.



Iuxta obſeruatam in præcedentibus methodum ſit Quadratricis alicuius centrum A: quod ſtatuatur centrum ſectoris A F G E ſectori N X M Y dato ſimilis: cuius centrum grauitatis ſit B; ſit nimirum ſemidiameter A E ſeſqui-altera lineæ A D, quam abſcindit B D tangens in B Quadratricem, vt ſuprà Prop. 66. declaratur. Tum ſumatur A R æqualis rectæ A D à tangente B D abſciſſæ, ac tandem fiat (ductâ G O Quadratricem tangenti B D parallelâ) vt T O ad O A; ita B R ad R S. Erit punctum S centrum grauitatis duorum mixtorum triangulorum G E T, G F P. Quo abſoluto, ſi radius N M datum ſectorem N X M Y bifariam ſecans ita in P diuidatur, vt eius homologa A G diuiſa eſt in S, præſtitum fuerit, quod proponitur. Oſtendendum itaque eſt quomodo S ſit centrum grauitatis duorum illorum mixtorum triangulorum G F P, G E T.

Demonſtratio.

Centro A per B circulus deſcribatur Axem Quadratricis ſecans in I. Conſtat ergo primò per Prop. 50. triangulum A B D ſectori A B I eſſe æquale: vnde ſequitur ſectori A G E æquale etiam eſſe triangulum



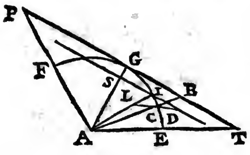
lum A G O; tam enim ſector A G E ſectori A B I ſimilis, quàm triangulum A G O eſt ſimile triangulo A B D; eò quòd ex conſtructione G O lineæ B D parallela ſit: ſit autem per Prop. 12. Lib. 6. Elem. vt ſector A B I ad triangulum A B D; ita ſector A G E ad triangulum A G O: ſunt enim hæ quatuor figuræ ſuper latera A B, A G proportionalia in ratione æqualitatis A B ad A B, & A G ad A G conſtructæ. Quod cùm ita ſit, erit triangulum G O T æquale triangulo mixto G E T. Si enim ab eodem triangulo A G T demantur duæ quantitates æquales, ſector A G E, & triangulum A G O: quæ reliquæ fiunt (triangulum G O T, & triangulum G E T mixtum) non niſi æquales eſſe poſſunt. Ad hæc conſtat punctum R centrum eſſe grauitatis trianguli A P T: poſita ſiquidem eſt A R æqualis rectæ A D; cuius A E, ſiue A G eſt ex conſtructione ſeſqui-altera. Cùm ergo A G bifariam diuidat baſim P T, erit R centrum trianguli APT per Prop. 14. Lib. 14. Æquip. Archim. His ita conſtitutis. Cùm ex conſtructione ita ſit R B diſtantia centri B ſectoris A F G E, ad R S; vt T O ad O A: vt autem eſt T O ad O A; ita per Prop. 1. Lib. 6. Elem. eſt triangulum T G O ſiue triangulum mixtum T G E triangulo T G O æquale ad ſectorem A G E: & duplis aſſumptis, ita triangula duo mixta G F P, G E T ad ſectorem A F G E: ita erit R B ad R S; vt duo illa mixta triangula ad ſectorem A F G E. Cùm ergo R ſit centrum totius trianguli A P T, & B ſit centrum ſectoris A F G E: erit S centrum duorum ſimul mixtorum triangulorum per Prop. 6. Lib. 1. Æquip. Archim. aut Prop. 48. recta enim linea per duo centra B & R, ſectoris A F G E, & trianguli A P T tranſiens, tranſit etiam per centrum reliquæ quantitatis, duorum ſcilicet triangulorum mixtorum per Prop. 8. Lib. 1. æquip. Archim. illiúſque diſtantia à communi centro R ita debet eſſe ad diſtantiam centri ſectoris B; vt reciprocè ſector ipſe A F G E eſt ad duo ſimul illa mixta triangula, hoc eſt, vt AO ad O T, quemadmodum declaratum eſt. At ex conſtructione ita eſt R S ad R B, vt A O ad O T: tribus ſiquidem lineis T O, O A, & B R quarta proportionalis R S ſtatuta eſt. Inuento autem centro S duorum

mixtorum triangulorum G F P, G O T; rectè inuentum eſt centrum P triangulorum M X V, M Y Z. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LXXII. *Problema.*

Alterutrius è duobus mixtis triangulis G F P, G E T, quorum centrum proximâ Prop. inuentum eſt, centrum inueſtigare.

Conſtructio, & Demonſtratio.



Sit itaque centrum mixti trianguli G E T inueſtigandum. Reperiatur in ſemidiametro A G, amborum centrum S: & per S ducatur ad A G perpendicularis. Certum eſt in eâ perpendiculari reperiri vtriuſque huius trianguli centra. Cum enim æqualia, & ſimilia ſint hæc duo triangula; debent eorum centra, ſi triangula inter ſe coaptari concipiantur, ſibi etiam inuicem coaptari per Axio. 5. Lib. 1. Æquip. Archim. Vt ergo linea illa recta, quæ per commune centrum S amborum ducitur (linea enim recta per centrum commune tranſiens, tranſit etiam per vtriuſque centrum per Prop. 8. Lib. 1. Æquip. Archim.) poſſit coaptari, dum triangulum A G P circa A G conuerti intelligitur, donec triangulo A G T ſuperponatur, neceſſariò perpendicularis eſſe debet ad A G: aliàs centrum centro minimè congrueret. Hoc itaque ſuppoſito, reperiatur centrum trianguli A G T diuiſâ ſcilicet baſi G T bifariam in B, ductáque A B ita diuiſâ in C, vt tota A B ſit ſeſqui-altera partis A C: erit C centrum grauitatis trianguli A G T per Lem. Commandini ad Prop. 15. Lib. 1. Æquip. Archim. Sit etiam repertum per Prop. 68. centrum L ſectoris A G E. Tum hæc duo centra L & C rectâ lineâ connectantur: quæ producta occurrat in D lineæ ductæ per S perpendiculari ad A G: erit centrum grauitatis propoſiti trianguli mixti G E T. Patet, huius enim trianguli centrum reperitur, vt oſtenſum eſt, in lineâ per commune duorum triangulorum mixtorum centrum S. ductâ ad A G perpendiculariter per S: idémque reperitur in lineâ L C con-

V nectente

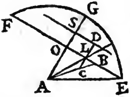
Digitized by Google

nectente centra L & C ſectoris A G E, & & trianguli AGT per Prop. 8. Lib. 1. Æquip. Ergo aliud eſſe non poteſt, quàm D, in quo duæ lineæ S D, L C D ſeſe interſecant. Dati ergo huius generis trianguli mixti centrum definitum eſt. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LXXIII. *Problema.*

SEmiſegmenti ſemicirculo minoris G O E centrum grauitatis deſignare.

Conſtructio.



Reperiatur in primis totius ſegmenti FGE centrum S in rectâ A G; ad quam ducatur per S linea perpendicularis in eâ enim perpendiculari centrum dicti ſemiſegmenti reperiri neceſſe eſt, vt Prop. proximâ declaratum eſt. Inueſtigetur item per Prop. 68. centrum L ſectoris A G E; ac demum centrum C trianguli A O E, ductâ nimirum A B bifariam ſecante eius baſim O E: quæ ita diuidatur in C vt tota A B ſeſqui-altera ſit partis A C. Si enim per hæc duo centra L & C recta linea agatur, ſectura eſt iam ductam per S ad A G perpendicularem, in D centro dati ſemiſegmenti O G E. Cùm enim L centrum ſit ſectoris A G E, quantitatis ſcilicet ex ſemiſegmento G O E, & ex triangulo A O E conflatæ, trianguli autem centrum ſit C, per Prop. 8. Lib. 1. Æquip. linea connectens hæc duo centra L & C tranſit per reliquæ partis (quæ eſt ſemiſegmentum) grauitatis centrum. Ergo concurſus D linearum S D, & C L D eſt centrum ſemiſegmenti quæſitum.

Epilogus.

Habetis, Geometriæ Cultores, non tam induſtriæ, quam ineſſe mihi pertenuem me non latet; quàm mei ſpecimen conatûs ad datam initio præſtandam fidem: quam vtrum ex voto veſtro meóque præſtiterim, ex tabulis hactenus à me prolatis Vos ipſi iudicatote. Mihi quidem certè primo & altero huius opuſculi Libro, quod propoſitum erat, videor aſſecutus: nimirum, ſententiam aduersùs celebrem illum circuli Tetragoniſmum ab inſigni Geometrâ R. P. Gregorio à S. Vincentio excogitatum, non tantùm ex æquo iure, legibúſque tum Geometricis tum Arithmeticis aliàs in Examine Quadraturæ à me fuiſſe latam, ſed etiam eandem hîc non leuiter eſſe confirmatam; dum,

Digitized by Google

dum, quæ aduerſùs eam à ſtrenuo Quadraturarum fautore R.P. Aynſcom in ſuâ earum deductione Argumenta ſunt allata (certum eſt autem allata fuiſſe, omnium quæ excogitari potuere, grauiſſima, cùm de cauſâ vltimò decernendum foret) oſtenſa ſunt, veterum, ipſius etiam Geometriæ Parentis Euclidis placitis non minùs, imò magis aduerſari; quàm quæ ab ipſo Authore primùm adducta fuerant, à me in citato Examine non ſine communi Geometrarum approbatione diſcuſſa, reiectáq;. In quibus illud non in poſtremis perpendendum ſeſe obtulit, quod ab vtroque hoc Authore pronunciatur; nimirum, ſi quæ de Angulis poſteritati tradidit Euclides admittantur, neque ipſum ſibi conſtare poſſe; neque alia quædam Geometrica Principia, qualia ſunt definitiones tertia, & quinta Libri 5. Elementorum, inter ſe conuenire. Quod cùm ab aliis quibuſdam Geometriæ ſcriptoribus aſſeratur; ne nota hæc Euclidi, totíque Geometriæ inuſta ſupereſſet ſaluáque foret hactenus illibata vtriuſque fama: pluribus mens Geometriæ Parentis exponenda fuit: iuxta quam nihil aptius cohærere, nihil firmius ſtare, quàm hæc, aliáque omnia nobiliſſimæ huius diſciplinæ fundamenta, euidenter oſtenſum eſt.

Quidquid ergo labis ex nouis illis Principiis, Geometriæ impendebat, longiùs depulſum eſt. Verùm, non ſatis inſtituto feciſſe videar, niſi etiam eidem diſciplinæ noui ornamenti quidpiam ad eandem Tetragoniſmi materiam pertinens, collatum hîc fuerit. Ad id vix poterat aptius, quàm Quadratrix, Argumentum aſſumi. Ea enim à primâ ipsâ luce, in quam antiquiſſimus eius Author Dinoſtratus ipſam edidit, tantâ obliuione ſepulta latuit, vt vix eius meminerint aliqui; nullúſque, quod acceperim, eam, licèt inſignium facultatum fons ſit vberrimus, penitiùs ſcrutandam ſuſceperit. Quàm felicior recentiùs excogitatæ Cycloïdis ſors extitit! quam vix natam excepere, ſuíſque vigiliis excoluêre clariſſima temporis huius Geometrarum Lumina. Quæ vt ſpero, his paucis, quæ pro modulo, libro huius opuſculi tertio complexus ſum, mentem inducent ad plura & reconditiora huius inflexæ Lineæ inueſtiganda myſteria, adeoque eius ope ipſam circuli tam expetitam Quadraturam; ad quam vix planior, apertiórque aditus patere poſſe videatur; præſertim ex quo ipſum Quadratricis verticem deſignari poſſe demonſtraui ope lineæ rectæ, quæ quouis in puncto ipſam tangat; cuiuſmodi duci poſſe apertè declaratum eſt: quod caput vel vnicum probet euidenter minimè inanem, fidéque maiorem ad frontem totius operis appoſitum eſſe titulum: vt alia non pauca taceam nihilo magis nota, quæque Paradoxum ſapiant:

Digitized by Google

quæ hoc toto tertio Libro proſecutus ſum. Quibus, ſic habetote, nec pauciora, nec veſtris vigiliis, lucubrationibúſque, Geometræ doctiſſimi, minùs digna, ſed meis viribus ſuperiora; dum hæc, quæ veſtri iuris feci, meditarer, obiter obſeruare licuit: ad euoluenda ſi tenue hoc opus meum mentes veſtras comparauerit, ſtudiáque acuerit; næ ego me de Geometriâ non malè meritum eſſe, mihi ipſi gratulaturus ſum, eóque impenſius Diuinam Sapientiam Diſciplinarum omnium fontem celebraturus; cuius vnicam Gloriam vt in cæteris, ita in his ſpectare & æquum, & conſtitutum eſt.

FINIS.

A01 1462182

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

D. 106.

XXXIV
f. 27

Digitized by Google